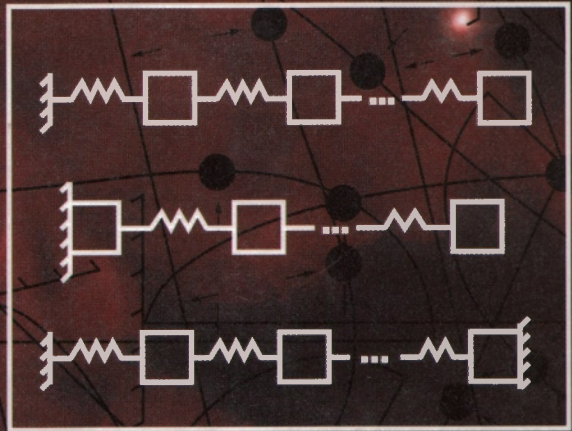


Г. М. А. Глэдвелл

# Обратные задачи теории колебаний



R&C  
Dynamics



R&C  
Dynamics

# Inverse Problems in Vibration

Second Edition

by

Graham M. L. Gladwell

*University of Waterloo,  
Department of Civil Engineering,  
Waterloo, Ontario, Canada*



KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS  
DORDRECHT / BOSTON / LONDON

Грэхэм М. Л. Глэдвелл

# Обратные задачи теории колебаний

Перевод с английского  
А. С. Матвеева и Е. М. Крейнес

Под научной редакцией  
А. Э. Гутермана



Москва ♦ Ижевск

2008



УДК 512.643, 534.1

ББК 22.236.35

Г 557



Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
по проекту №07-01-07072.

### **Глэдвелл Г. М. Л.**

Обратные задачи теории колебаний. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 608 с.

В первом издании этой книги, вышедшем в 1986 году, обратные задачи теории колебаний получили достаточно узкую интерпретацию: в нем рассматривались задачи восстановления по заданному характеру колебания и заданным значениям собственных частот и/или формы колебаний единственной незатухающей колебательной системы специального вида.

В предлагаемом новом издании круг тем существенно расширился и в него включены такие разделы, как изоспектральные системы — семейства систем, обладающих некоторым общим характером поведения; приложения понятия потока Тода; новые, неклассические, подходы к обратным задачам Штурма—Лиувилля; качественные свойства форм колебаний некоторых конечноэлементных моделей; распознавание ущерба.

Поскольку основной упор делается на исследования и качественные результаты, а не на вычисления, книга будет интересна исследователям, работающим в области теории колебаний, матричного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, испытаний без разрушения образца, анализа форм колебаний, виброизоляции и т. д.

**ISBN 978-5-93972-660-3**

Translation from the English language edition:

*Inverse Problems in Vibration, 2nd ed.* By Graham M. L. Gladwell

© 2004 Kluwer Academic Publishers, being a part of

Springer Science+Business Media

All Rights Reserved

© Перевод на русский язык:

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

По всей видимости, присутствие божественного начала не исключено полностью, но и не подтверждается явно. Однако все говорит о том, что Бог существует и скрывает это.

Блез Паскаль. *Мысли*, 556.

---

---

# Оглавление

<b>Предисловие редактора перевода</b> . . . . .	11
<b>Предисловие</b> . . . . .	13
<b>ГЛАВА 1. Матричный анализ</b> . . . . .	19
1.1. Введение . . . . .	19
1.2. Основные определения и обозначения . . . . .	19
1.3. Обращение матриц и определители . . . . .	26
1.4. Собственные значения и собственные векторы . . . . .	35
<b>ГЛАВА 2. Колебания дискретных систем</b> . . . . .	42
2.1. Введение . . . . .	42
2.2. Колебания некоторых простых систем . . . . .	42
2.3. Поперечные колебания балки . . . . .	47
2.4. Обобщенные координаты и уравнения Лагранжа для <i>стержня</i> . . . . .	50
2.5. Колебания мембраны и акустического резонатора . . . . .	55
2.6. Собственные частоты и собственные колебания . . . . .	60
2.7. Главные координаты и динамические характеристики . . . . .	64
2.8. Принцип Рэлея . . . . .	67
2.9. Колебания при наличии связей . . . . .	70
2.10. Итерационные и независимые определения собственных значений . . . . .	74
<b>ГЛАВА 3. Матрицы Якоби</b> . . . . .	78
3.1. Последовательности Штурма . . . . .	78
3.2. Ортогональные многочлены . . . . .	82
3.3. Собственные векторы якобиевых матриц . . . . .	88
3.4. Задачи нахождения обобщенных собственных значений . . . . .	93

<b>ГЛАВА 4. Обратные задачи для якобиевых систем . . . . .</b>	<b>96</b>
4.1. Введение . . . . .	96
4.2. Обратная задача для якобиевой матрицы . . . . .	99
4.3. Варианты обратной задачи для якобиевой матрицы . . . . .	102
4.4. Восстановление систем масс, связанных пружинами, по краевым условиям . . . . .	110
4.5. Восстановление модифицированных систем . . . . .	118
4.6. Персимметрические системы . . . . .	122
4.7. Обобщенные обратные задачи на собственные значения . . . . .	124
4.8. Восстановление по внутренней точке . . . . .	126
<b>ГЛАВА 5. Обратные задачи для некоторых более общих систем</b>	<b>132</b>
5.1. Введение: теория графов . . . . .	132
5.2. Преобразования матриц . . . . .	137
5.3. Звезда и граф путей . . . . .	142
5.4. Периодические якобиевы матрицы . . . . .	145
5.5. Блочный алгоритм Ланцоша . . . . .	147
5.6. Обратные задачи для пятидиагональных матриц . . . . .	150
5.7. Обратные задачи для графов, являющихся деревьями . . . . .	153
<b>ГЛАВА 6. Положительность . . . . .</b>	<b>162</b>
6.1. Введение . . . . .	162
6.2. Миноры . . . . .	164
6.3. Общее представление симметричной матрицы . . . . .	171
6.4. Квадратичные формы . . . . .	173
6.5. Теорема Перрона . . . . .	178
6.6. Вполне неотрицательные матрицы . . . . .	182
6.7. Осцилляторные матрицы . . . . .	189
6.8. Вполне положительные матрицы . . . . .	196
6.9. Осцилляторные системы векторов . . . . .	199
6.10. Спектральные свойства вполне неотрицательных матриц . . . . .	202
6.11. Анализ $u$ -линий . . . . .	207
<b>ГЛАВА 7. Изоспектральные системы . . . . .</b>	<b>210</b>
7.1. Введение . . . . .	210
7.2. Изоспектральный поток . . . . .	212
7.3. Изоспектральные якобиевы системы . . . . .	219
7.4. Изоспектральные осцилляционные системы . . . . .	227
7.5. Изоспектральные колебания балки . . . . .	233
7.6. Конечные изоспектральные модели . . . . .	239
7.7. Изоспектральный поток: продолжение . . . . .	244

<b>ГЛАВА 8. Дискретная колеблющаяся балка</b> . . . . .	252
8.1. Введение . . . . .	252
8.2. Анализ собственных колебаний консольной балки . . . . .	253
8.3. Вынужденный отклик балки на внешнее воздействие . . . . .	257
8.4. Спектральные характеристики колебаний балки . . . . .	259
8.5. Условия на начальные данные обратной задачи . . . . .	262
8.6. Использование ортогональности в обратной задаче . . . . .	266
8.7. Численный метод решения обратной задачи . . . . .	270
<b>ГЛАВА 9. Дискретные колебания и узлы</b> . . . . .	273
9.1. Введение . . . . .	273
9.2. Обратная задача для якобиевой матрицы . . . . .	274
9.3. Обратная задача для одиночного колебания системы масс, соединенных пружинами . . . . .	278
9.4. Восстановление системы масс, соединенных пружинами, по двум колебаниям . . . . .	282
9.5. Обратная задача для колеблющейся балки . . . . .	284
9.6. Теорема Куранта об узловых линиях . . . . .	288
9.7. Свойства собственных векторов систем с конечным числом элементов . . . . .	293
9.8. Графы сильного знака . . . . .	300
9.9. Графы слабого знака . . . . .	307
9.10. Обобщение М-, К-задач . . . . .	310
<b>ГЛАВА 10. Функции Грина и интегральные уравнения</b> . . . . .	311
10.1. Введение . . . . .	311
10.2. Функции Грина . . . . .	319
10.3. Элементы функционального анализа . . . . .	323
10.4. Интегральное уравнение для функции Грина . . . . .	338
10.5. Осцилляционные свойства функций Грина . . . . .	343
10.6. Осцилляторные системы функций . . . . .	350
10.7. Теорема Перрона и составные ядра . . . . .	358
10.8. Чередование собственных значений . . . . .	365
10.9. Асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций . . . . .	371
10.10. Импульсные характеристики . . . . .	382

<b>ГЛАВА 11. Обратная задача для непрерывных систем второго порядка</b> . . . . .	388
11.1. Исторический обзор . . . . .	388
11.2. Операторы преобразований . . . . .	394
11.3. Гиперболическое уравнение для $K(x, y)$ . . . . .	397
11.4. Единственность решения обратной задачи . . . . .	406
11.5. Интегральное уравнение Гельфанда–Левитана . . . . .	409
11.6. Восстановление системы Штурма–Лиувилля . . . . .	419
11.7. Обратная задача для колеблющегося стержня . . . . .	423
11.8. Обратная задача для натянутой струны . . . . .	428
11.9. Некоторые неклассические методы . . . . .	430
11.10. Другие теоремы единственности . . . . .	437
11.11. Восстановление по импульсной характеристике . . . . .	444
<b>ГЛАВА 12. Различные обратные задачи</b> . . . . .	449
12.1. Воссоздание кусочно-однородного стержня по двум спектрам . . . . .	449
12.2. Изоспектральные стержни и преобразование Дарбу . . . . .	460
12.3. Двойное преобразование Дарбу . . . . .	469
12.4. Исследования Готтлиба . . . . .	475
12.5. Явная формула для потенциалов . . . . .	484
12.6. Исследования Рама и других . . . . .	487
<b>ГЛАВА 13. Балка Эйлера–Бернулли</b> . . . . .	493
13.1. Введение . . . . .	493
13.2. Осцилляторные свойства функции Грина . . . . .	499
13.3. Узлы и нули консольной балки . . . . .	510
13.4. Фундаментальные условия на начальные данные . . . . .	513
13.5. Спектр балки . . . . .	517
13.6. Формулировка обратной задачи . . . . .	524
13.7. Метод восстановления . . . . .	526
13.8. Достаточность вполне положительности матрицы $\mathbf{P}$ . . . . .	534
<b>ГЛАВА 14. Непрерывные спектры колебаний и узлы</b> . . . . .	538
14.1. Введение . . . . .	538
14.2. Теоремы Штурма . . . . .	539
14.3. Приложения теорем Штурма . . . . .	545
14.4. Исследования Хольда и МакЛафлин . . . . .	550

---

<b>ГЛАВА 15. Выявление дефектов</b> . . . . .	558
15.1. Введение . . . . .	558
15.2. Выявление дефектов в стержнях . . . . .	560
15.3. Выявление дефектов в балках . . . . .	564
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	570
<b>Литература</b> . . . . .	577
<b>Список периодических изданий</b> . . . . .	603



---

---

## Предисловие редактора перевода

Монография Грэхэма Глэдвелла «Обратные задачи теории колебаний» недавно была переиздана за рубежом и безусловно заслуживает внимания российского читателя. Главное достоинство этой монографии состоит в том, что в ней нашли отражение, в большей или меньшей степени, все важные аспекты этой теории. Вместе с тем, эта книга, адресованная начинающему читателю, дает основательную подготовку в этой классической области. Также, на наш взгляд, настоящая книга отличается целым рядом методических достоинств. Несомненно, одно из них состоит в том, что для изложения теории, в более чем полном объеме, применяется язык матричного анализа, что позволило автору сделать изложение строгим и, в то же время, доступным. Книга написана живо и неформально. Наиболее существенные факты снабжены комментариями, разъясняющими их роль, место и значение в теории. Автор старается осветить наиболее важные вопросы с разных точек зрения, подчеркивает различные связи и зависимости. В текст включено много высказываний, казалось бы, необязательных, но играющих несомненную роль в побуждении читателя к активному усвоению материала.

Обратные задачи теории колебаний состоят в построении колебательных систем заданного вида, скажем, струн, балок, мембран, обладающих тем или иным характером колебаний. По виду рассматриваемых колебательных систем книгу можно разделить на две отдельные части. Одна из них содержит главы 1–9 и относится к изучению дискретных систем, вторая, содержащая главы с десятой по четырнадцатую, посвящена исследованию непрерывных систем.

Книга завершается главой, посвященной такой важной прикладной задаче, как распознавание дефектов колебательных систем по характеру их колебаний.

По сравнению с первым изданием, вышедшем в 1986 году, в предлагаемом новом издании охват тем существенно расширился. Если ранее рассматривались только задачи восстановления по заданному характеру колебания и заданным значениям собственных частот и/или формы колебаний единственной незатухающей колебательной системы специ-

ального вида, то новое издание включает также исследования изоспектральных систем — семейства систем, обладающих некоторым общим характером поведения; приложения понятия потока Тода; новые, неклассические подходы к обратным задачам Штурма-Лиувилля; качественные свойства форм колебаний некоторых конечноэлементных моделей; распознавание ущерба.

Основной упор в книге делается на исследования общего поведения систем и глубокие содержательные качественные результаты, а не на конкретные вычисления, поэтому книга должна быть интересной как читателям, только осваивающим это научное направление, так и исследователям, работающим в этой области.

Во время подготовки русского перевода было налажено общение с автором. В результате были устранены незначительные погрешности оригинала, преимущественно опечатки.

А. Э. Гутерман

---

---

## Предисловие

Только окончив написание книги, мы понимаем, с чего следовало бы ее начать.

Блез Паскаль. «Мысли», 19.

В 1902 году Жак Адамар предложил определение *корректно поставленной задачи*. Оно включало в себя известные свойства классических задач математической физики и содержало 3 пункта:

**существование:** задача имеет решение;

**единственность:** это решение единственно;

**непрерывность:** решение является непрерывной функцией данных задачи.

До и после 1902 года в большинстве исследований по теоретической физике и инженерии задачи формулировались с выбранными надлежащим образом начальными и/или граничными условиями, так что их решения действительно удовлетворяли указанным выше свойствам — постановка задач была корректной.

Со временем выяснилось, что существуют важные и, по-видимому, осмысленные вопросы, выходящие за рамки корректно поставленных задач в смысле Адамара. Первоначально их называли некорректно поставленными задачами. Большинство из них имели вид классических задач за исключением того, что известные и неизвестные величины менялись местами: известные величины были связаны с решением классической задачи, тогда как неизвестные — с исходными данными. Таким образом, было введено понятие *обратной задачи*, в отличие от *прямых* классических задач. (В дальнейшем стало ясно, что подобный выбор терминологии явился отчасти исторической случайностью.) Для полноты изложения следует заметить, что не все обратные задачи некорректно поставлены и не все некорректно поставленные задачи являются обратными! Эта книга посвящена обратным задачам теории колебаний, многие из которых поставлены «некорректно», поскольку не удовлетворяют одному или нескольким условиям Адамара: они могут иметь решение только

в случае, если данные выбраны должным образом; они могут иметь несколько решений; решение может не являться непрерывной функцией исходных данных, в частности, при малом изменении данных, есть вероятность выйти за пределы области определения решения и войти в область, где решение теряет смысл.

В классической теории колебаний мы имеем дело, по большей части, со свободными незатухающими малыми колебаниями различных дискретных или непрерывных систем. В этой книге мы рассматриваем только такую классическую теорию колебаний. Одной из основных задач теории является определение собственных частот (математически, собственных значений операторов) и собственных колебаний тела. Само тело моделируется дискретной системой жестко закрепленных масс, жестких стержней, невесомых пружин или конечно-элементной моделью и описывается матричным обыкновенным дифференциальным уравнением по времени с постоянными коэффициентами. Такое уравнение имеет конечное число собственных значений, а собственным формам колебаний отвечают собственные векторы. Тело, моделируемое непрерывной системой, описывается набором уравнений в частных производных по времени и по одной или нескольким пространственным координатам. Уравнение имеет бесконечное множество собственных значений (непрерывный спектр), а собственные состояния являются собственными функциями пространственных переменных.

В рамках классической теории обратные задачи касаются построения моделей заданного типа, например: систем масс, связанных пружинами, струн с заданными собственными значениями и/или собственными векторами (или собственными функциями), т. е. с заданными *спектральными параметрами*. В общем случае по заданным спектральным параметрам можно построить единственную систему, множество систем или вообще ни одной. В первом издании книги мы рассматривали значительно более узкий класс обратных задач, так называемых *задач восстановления*, имеющих *единственное* решение заданного вида с указанными спектральными свойствами. В новом издании мы расширили круг изучаемых вопросов, чтобы включить в рассмотрение обратные задачи, не подпадающие под эту строгую классификацию.

Прежде чем описывать содержание книги, заметим, что мы не касаемся численных методов. В приложениях наиболее универсальным подходом к решению обратных задач является метод наименьших квадратов, суть которого состоит в поиске системы, минимизирующей различие между расчетным и желаемым поведением. В то время как ранние исследования были непоследовательными, в наше время устоялись стро-

гие методы, основанные на работе Тихонова, Морозова и др. С подробностями можно ознакомиться в работе Кирша (Kirsch, 1996). Однако подчеркнем, что здесь мы не ссылаемся на подобные работы. Наоборот, нас интересует фундаментальный анализ, качественные свойства, имеет ли задача одно или несколько решений и т. д. Случается, что один из описываемых методов, теоретически приводящий к решению, оказывается на практике непригодным, тогда ищется другой, более подходящий, метод; в таких случаях мы описываем оба подхода и указываем, почему один из них оказался действенным, а другой нет (например, см. раздел 4.3). Занимаясь фундаментальным анализом, мы охватываем сравнительно малый диапазон физических систем. По существу, он ограничен основными элементами конструкций: стержнями, балками и мембранами, — и исключает их комбинации. Такое сужение рамок вполне объяснимо: действительно, до появления метода конечных элементов и внедрения высокопроизводительных вычислительных машин удавалось решить лишь прямые задачи теории колебаний, включавшие в себя отдельные элементы конструкции. Изучение обратных задач находится на более ранней стадии развития, нежели изучение прямых задач.

Книга состоит из двух частей: в главах 1–9 описываются дискретные системы, а главы 10–14 посвящены изучению непрерывных систем.

Матричный анализ, являющийся основным языком описания дискретных систем, представлен в необходимом объеме в главах 1 и 3. В главе 1 выписаны основные определения и дано введение в теорию квадратичных форм: теорема о минимаксе, собственные значения и т. д. В главе 2 даны физические основы колебательных систем, подлежащих анализу. В главе 3 проводится классический анализ *якобиевых* матриц, которые появляются в простейших видах колебательных систем — линейных последовательностях масс, соединенных пружинами. В главе 4 рассматриваются обратные задачи для якобиевых матриц. В главе 5 дано введение в теорию дискретных систем более общего вида, а также представлены сведения из теории графов, необходимые для дальнейшего анализа.

Обратные задачи теории колебаний сводятся к построению колебательных систем частного вида, например струна, балка, мембрана, которые характеризуются определенным набором свойств. Сконструированная таким образом система должна быть *реалистичной*: определяющие ее параметры (массы, длины, жесткости и т. д.) должны быть положительными. Проблема определения знаков лежит в основе любой состоятельной дискуссии на тему обратных задач. В главе 6, касающейся положительной определенности, дано математическое введение,

относящееся к различным типам матриц: положительным, вполне положительным, осцилляционным и т. д. Изложенные там методы, разработанные Фекетом (Fekete), Перроном (Perron), Гантмахером и Крейном, впервые были применены к колебательным системам Гантмахером и Крейном в их классической монографии «*Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*» (1950), которая была недавно (2002) переиздана Американским математическим обществом.

Иногда исходных данных недостаточно для построения единственной колебательной системы, в этом случае получается семейство систем, имеющих одинаковые свойства, — *изоспектральные семейства*. В главе 7 описана процедура построения таких изоспектральных семейств и проверки того, что каждый представитель семейства обладает необходимыми свойствами положительности. По существу, имеется два способа построения таких семейств: алгебраический и дифференциальный. В первом случае используется тщательно подобранное преобразование вращения, переводящее одного представителя в другого. Во втором — используется конструкция *изоспектрального потока*: матрица может изменяться вдоль некоторой траектории под действием так называемого *потока Тоды*, при этом она сохраняет прежние собственные значения и в то же время обладает определенной структурой и свойствами положительности.

В главе 8 рассматривается частный случай колебательной системы: прогибные колебания балки. Эта задача являлась камнем преткновения в ранней истории исследования обратных задач.

Глава 9 завершает первую часть книги изучением колебаний, т. е. собственных волн и узлов. Этот анализ во многом опирается на исследование свойств положительной определенности главы 6.

Во второй части книги (главы 10–14) рассматриваются непрерывные системы. Задачи описываются на языке дифференциальных и интегральных уравнений. Интегральные уравнения, содержащие функцию Грина системы, проще для анализа ввиду того, что именно функция Грина и ядро Гантмахера–Крейна обладают крайне важными свойствами положительной определенности. Более того, оператор функции Грина, стоящий в интегральном уравнении, дает конкретный пример положительно определенного компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве, что позволяет непосредственно использовать хорошо разработанную теорию этих операторов, как описано в главе 10.

В главе 11 эта теория вместе с фундаментальным операторным преобразованием Гельфанда–Левитана используется для решения некоторых обратных задач, описывающихся уравнением Штурма–Лиувилля.

Это уравнение, представленное в трех связанных формах, является основополагающим для описания колебаний струн и стержней. В данной главе представлен классический подход, а также несколько недавно разработанных приемов, более подходящих для вычислений.

В главе 12 обсуждаются семейства изоспектральных непрерывных систем. В главе 13 преобразование Гельфанда–Левитана применяется к обратной задаче для сплошной балки Эйлера–Бернулли.

Глава 14 содержит краткий (слишком краткий) анализ обратных узловых задач. В то время как определить форму колебаний на практике сложно, относительно просто локализовать узлы конкретной волны. В настоящее время заслуживает внимания область исследований, основы которой заложили МакЛафлин (McLaughlin) и Хольд (Hald). Круг изучаемых вопросов касается условий достаточности узловых данных для нахождения, например, распределения масс на колеблющейся струне, стержне или мембране и построения подобных колебательных систем, зная расположение узлов некоторых колебаний. В разделе 14.4 приведен краткий обзор подобных исследований.

Завершает книгу еще одна короткая глава о выявлении дефектов колебательных систем.

История физики и математики приводит к важному далеко идущему заключению: изучение одной задачи может пролить свет на множество других вопросов, которые, на первый взгляд, никак не связаны друг с другом. Обратные задачи теории колебаний являют собой яркий пример таких взаимосвязей. С одной стороны, при их решении не обойтись без сведений из других областей науки, в особенности линейной алгебры и теории операторов, с другой стороны, их исследование дает возможность взглянуть под иным углом на классические прямые задачи, выдвигая на передний план качественные фундаментальные свойства решений.

Следует сделать несколько замечаний по поводу эпиграфов, взятых из трактата Блеза Паскаля «Мысли» (Pascal's Pensées). Мной использован перевод У. Ф. Троттера (W. F. Trotter), появившийся в «Эверимен либрари (Everyman's Library)», напечатанной издательством «Дент и сыновья» (J. M. Dent & Sons) в 1956 г. Моя копия датирована 26 апреля 1957 и содержит билет стоимостью 8 старых пенсов на лондонский автобус № 73, следующий от Юстон Роад к Сток Ньюингтон, напоминая мне, что «Мысли» были моим ежедневным чтением в автобусе по дороге домой и из дома, когда я преподавал математику в лондонском университете. Я выбрал именно «Мысли» для эпиграфов, поскольку, как можно понять из записей Паскаля, он рассматривал поиски Бога как обратную



задачу. Несмотря на некоторую загадочность, его комментарии о роли разума, сердца и воли в поисках решения этой задачи настолько же глубоки и значимы сейчас, какими были и в 1654 году. Возможно, эти выдержки пробудят у читателя интерес к творчеству Паскаля.

Эпиграф к главе II напоминает о том, что многие люди внесли вклад в создание этой книги. Некоторым из них автор выразил благодарность в предисловии к первому изданию. Новое издание содержит материал, заимствованный из статей, написанных автором совместно с его студентами Брэдом Вилмсом (Brad Willms), Мохамедом Мовахедди (Mohamed Movahheddy), Хонгмеем Жу (Hongmei Zhu) и коллегами Брайаном Дэвисом (Brian Davies), Джозефом Лейдолдом (Josef Leydold), Питером Стэдлером (Peter Stadler) и Антонино Морасси (Antonino). Кроме того, при написании книги свободно использовались материалы многочисленных общедоступных статей, что отражено в библиографии.

На подготовительной стадии книгу частично прочитали Антонино Морасси, Маив Макарти (Maive McCarthy), Оскар Роджо (Oscar Rojo) и Мишель Дилена (Michele Dilena). Автор признателен им за найденные ошибки и выявленные недостатки, часть из которых удалось исправить в окончательном варианте.

Трэси Тэйвес (Tracy Taves) осуществила компьютерный набор книги. Автор выражает ей благодарность за выдержку и внимание, уделенное деталям. Колин Кэмпбелл (Colin Campbell) помог нам разобраться со всеми тонкостями системы  $\LaTeX$ .

Наконец, автор благодарит свою жену Джойс, годами видевшую его погруженным в книги и работу, за понимание и терпение.

Георг Кэрриер (George Carriar) однажды заметил, что целью математики являются не числа, а проникновение в суть вещей. Автор надеется, что эта книга позволит проникнуть в суть многочисленных связей между различными, но взаимосвязанными разделами математики, физики и техники, которые возникают при исследовании обратных задач теории колебаний.

Грэхэм Глэдвел  
Ватерлоо, Онтарио  
март, 2004

---

# ГЛАВА I

## Матричный анализ

Считается дурным знаком, если при взгляде на человека вспоминаешь написанную им книгу.<sup>1</sup>

Блез Паскаль. *Мысли*, 35.

### 1.1. Введение

Основным математическим аппаратом данной книги является матричный анализ. В этой главе мы дадим основные определения, выведем свойства матриц и докажем некоторые важные теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем. Так как в настоящее время матричный анализ укоренился в науке и технике, предполагается, что читатель имеет некоторое представление о нем, в связи с чем на раннем этапе изложение будет сжатым. Читатель может найти недостающие сведения, обратившись к стандартной литературе.

### 1.2. Основные определения и обозначения

*Матрицей* называется прямоугольная таблица вещественных или комплексных чисел в совокупности с набором правил, определяющих операции над числами.

Говорят, что матрица  $A$  имеет порядок  $m \times n$ , если она состоит из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Множество всех вещественных матриц, т. е. матриц с вещественными элементами, порядка  $m \times n$  иногда обозначают  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Следуя монографии Хорна (Horn) и Джонсона (Johnson) [183], мы

---

<sup>1</sup>Блез Паскаль (1623–1662) жил в обществе французской интеллигенции, где подобное было дурным признаком: человек должен приобретать известность не только потому, что он написал книгу. Когда готовилось первое издание этой книги на китайском языке, переводчик возразил, что в 20 веке в Китае это было бы *хорошим* признаком. Если бы мы встретили знакомого человека, написавшего книгу, то непременно об этом упомянули бы.

будем использовать более простое обозначение  $M_{m,n}$ , таким образом,  $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

На пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит коэффициент  $a_{ij}$ , а матрицу  $\mathbf{A}$  часто записывают

$$\mathbf{A} = (a_{ij}).$$

Говорят, что две матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  *равны*, если они одного порядка  $m \times n$  и

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

В этом случае пишут

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

*Транспонированной* матрицей  $\mathbf{A}^T$  к матрице  $\mathbf{A}$  называется матрица порядка  $n \times m$ , строки которой совпадают со столбцами матрицы  $\mathbf{A}$ . Заметим, что транспонирование матрицы  $\mathbf{A}^T$  дает матрицу  $\mathbf{A}$ ; мы будем говорить, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^T$  получаются друг из друга *транспонированием*, и обозначать

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Например, матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

получаются друг из друга транспонированием.

Если  $m = n$ , то матрицу  $\mathbf{A}$  называют *квадратной* матрицей порядка  $n$ :  $\mathbf{A} \in M_{n,n}$ ; мы используем сокращение  $M_n$  для  $M_{n,n}$ , таким образом,  $\mathbf{A} \in M_n$ . Квадратную матрицу, не меняющуюся при транспонировании, называют *симметричной*. В этом случае

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

или

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Множество всех вещественных симметричных матриц порядка  $n$  обозначается  $S_n$ . Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

является симметричной. Квадратную матрицу  $\mathbf{A}$  называют *диагональной*, если все ненулевые ее элементы находятся на *главной диагонали*, начинающейся в левом верхнем и оканчивающейся в правом нижнем углу. В наших обозначениях

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

*Единичной* матрицей порядка  $n$  является

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1).$$

Элементы этой матрицы обозначаются  $\delta$ -символом *Кroneкера*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (1.2.1)$$

Матрица порядка  $m \times n$ , все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Матрица, состоящая из одного столбца и  $n$  строк, называется *вектор-столбцом*  $n$ -го порядка и обозначается

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Множество всех таких вещественных векторов образует линейное векторное пространство, которые мы обозначим  $V_n$ .

Транспонированный вектор-столбец называется *вектор-строкой* и обозначается

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Две матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  можно складывать и вычитать тогда и только тогда, когда они одного порядка  $m \times n$ . Суммой их и разностью называются матрицы того же порядка  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  соответственно, элементы которых имеют вид

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Мы будем писать

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Произведением матрицы  $\mathbf{A}$  на число (или скаляр)  $k$  является матрица  $k\mathbf{A}$  с элементами  $ka_{ij}$ .

Две матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно *перемножить* в смысле  $\mathbf{AB}$ , только если число столбцов  $\mathbf{A}$  равно числу строк  $\mathbf{B}$ . Таким образом, если  $\mathbf{A}$  имеет порядок  $m \times n$ , а  $\mathbf{B}$  — порядок  $n \times p$ , тогда

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{C}$  имеет порядок  $m \times p$ . Мы будем писать

$$\mathbf{A}(m \times n) \times \mathbf{B}(n \times p) = \mathbf{C}(m \times p). \quad (1.2.2)$$

Элемент  $c_{ij}$  матрицы  $\mathbf{C}$ , находящийся на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца, равен сумме элементов  $i$ -ой строки матрицы  $\mathbf{A}$ , умноженных на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $\mathbf{B}$ . Таким образом,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (1.2.3)$$

Например,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ -6 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Важнейшим следствием такого определения является *некоммутативность*, в общем случае, матричного произведения, т. е.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Действительно, если  $\mathbf{A}$  имеет порядок  $m \times n$ , а  $\mathbf{B}$  — порядок  $n \times p$ , то невозможно построить  $\mathbf{BA}$  при  $m \neq p$ . И даже в случае, когда  $m = p$ ,



С другой стороны, произведение  $\mathbf{x}^T$  ( $1 \times n$ ) и  $\mathbf{x}$  ( $n \times 1$ ) является ( $1 \times 1$ )-матрицей, т. е. числом

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (1.2.10)$$

Эта величина положительна тогда и только тогда, когда  $x_i$  (по предположению, действительные числа) одновременно не равны нулю, и называется квадратом  $\mathbf{x}$  по  $L_2$ -норме, т. е.

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2.11)$$

Скалярное произведение  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется как

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.2.12)$$

Говорят, что два вектора *ортогональны*, если

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \quad (1.2.13)$$

Как уже было отмечено, матричное произведение является *некоммутативным*. Некоммутативность имеет место даже в случае квадратных (см. (1.2.4)) или симметричных матриц, что иллюстрирует следующий пример:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Этот пример, показывающий, что произведение двух симметричных матриц в общем случае не является симметричной матрицей, дает также указание на существование связи между произведениями  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{BA}$ . Данный результат достаточно важен, поэтому выделим его отдельной теоремой.

**Теорема 1.2.1.**

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (1.2.15)$$

при этом если матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  симметричны, то

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{BA}. \quad (1.2.16)$$

**Доказательство.** Рассмотрим элемент  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца в обеих частях равенства (1.2.15). Положим, что  $\mathbf{A}$  имеет размер



$(m \times n)$ , а  $\mathbf{B}$  — размер  $(n \times p)$ , тогда размеры матриц  $\mathbf{AB}$  и  $(\mathbf{AB})^T$  равны соответственно  $(m \times p)$  и  $(p \times m)$ . Следовательно,

$$((\mathbf{AB})^T)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki},$$

и

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij} &= (i\text{-ая строка } \mathbf{B}^T) \times (j\text{-ый столбец } \mathbf{A}^T) \\ &= (i\text{-ый столбец } \mathbf{B}) \times (j\text{-ая строка } \mathbf{A}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \end{aligned}$$

### Упражнения 1.2

- 1) Найти квадратную матрицу  $\mathbf{B}$  такую, что  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Показать, что если изменить  $a_{33}$ , то единственным решением будет нулевая матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

- Показать, что, независимо от вида матрицы  $\mathbf{A}$ , матрицы  $\mathbf{AA}^T$  и  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  являются симметричными. Равны ли эти матрицы?
- Показать, что если  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, при этом  $\mathbf{A}$  симметрична, то  $\mathbf{BAB}^T$  и  $\mathbf{B}^T \mathbf{AB}$  также являются симметричными матрицами.
- Показать, что если для матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  определено произведение  $\mathbf{ABC}$ , то  $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .
- Если  $\mathbf{x}$  является комплексным, тогда его  $L_2$ -норма определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Показать, что

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^* \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}}^T$  — композиция комплексного сопряжения и транспонирования  $\mathbf{x}$ .

### 1.3. Обращение матриц и определители

В этом разделе мы будем иметь дело в основном с *квадратными* матрицами. Обозначим *определитель* квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  как  $\det(\mathbf{A})$  или  $|\mathbf{A}|$  и определим его следующим образом:

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad (1.3.1)$$

где индексы  $i_1, i_2, \dots, i_n$  пробегает значения  $1, 2, 3, \dots, n$ , а сумма берется по всем  $n!$  перестановкам индексов; «+» соответствует четной перестановке, а «-» соответствует нечетной. Заметим, что каждое произведение под знаком суммы содержит только по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца матрицы  $\mathbf{A}$ . Например, для матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  получаем соответственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.3.2)$$

Перестановка  $i_1, i_2, \dots, i_n$  является четной или нечетной в зависимости от того, получается ли она из  $1, 2, \dots, n$  четным или нечетным числом инверсий соответственно. Таким образом,  $1, 3, 2, 4$  является четной, а  $2, 3, 1, 4$  — нечетной перестановкой, полученной из  $1, 2, 3, 4$ , поскольку

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &\rightarrow (1, 3, 2, 4), \\ (1, 2, 3, 4) &\rightarrow (2, 1, 3, 4) \rightarrow (2, 3, 1, 4). \end{aligned}$$

Теперь приведем некоторые свойства определителей.

**Лемма 1.3.1.** *Если поменять местами две строки (или два столбца) матрицы  $\mathbf{A}$ , ее определитель не изменится по абсолютному значению, но изменит знак.*

Обозначим новую матрицу  $\mathbf{B}$ , тогда

$$b_{1i} = a_{2i}, \quad b_{2i} = a_{1i}, \quad b_{ji} = a_{ji} \quad (j = 3, 4, \dots, n)$$

и

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \sum \pm b_{1i_1} b_{2i_2} b_{3i_3} \cdots b_{ni_n}, \\ &= \sum \pm a_{2i_1} a_{1i_2} a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}, \\ &= \sum \pm a_{1i_2} a_{2i_1} a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}. \end{aligned}$$

Но если  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  образуют четную (нечетную) перестановку, то  $i_2, i_1, i_3, \dots, i_n$  — нечетную (четную), таким образом, каждый член из  $\det(\mathbf{B})$  появляется в  $\det(\mathbf{A})$  (и наоборот) с противоположным знаком, а значит,  $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$ .

**Лемма 1.3.2.** *Если матрица  $\mathbf{A}$  содержит два одинаковых столбца (две одинаковые строки), то  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .*

Если две строки (два столбца) поменять местами, тогда, с одной стороны,  $\det(\mathbf{A})$  не изменится, тогда как, с другой стороны, согласно лемме 1.3.1,  $\det(\mathbf{A})$  изменит знак. Таким образом,  $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$  и, следовательно,  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Лемма 1.3.3.** *Если одну строку (один столбец) матрицы  $\mathbf{A}$  умножить на  $k$ , тогда определитель умножится на  $k$ .*

Каждый член разложения умножается на  $k$ .

**Лемма 1.3.4.** *Если две строки (два столбца) матрицы  $\mathbf{A}$  пропорциональны друг другу, тогда  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .*

Это следует из лемм 1.3.1 и 1.3.3.

**Лемма 1.3.5.** *Если одну строку (один столбец) матрицы  $\mathbf{A}$  прибавить к другой строке (другому столбцу), то определитель не изменится.*

Если матрица  $\mathbf{B}$  получается путем прибавления, скажем, второй строки к первой, тогда

$$b_{1i} = a_{1i} + a_{2i}, \quad b_{ji} = a_{ji}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \sum \pm b_{1i_1} b_{2i_2} b_{3i_3} \cdots b_{ni_n} = \\ &= \sum \pm (a_{1i_1} + a_{2i_1}) a_{2i_2} a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}, \\ &= \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \cdots a_{ni_n} \pm \sum a_{2i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}, \end{aligned}$$

и первая сумма представляет собой  $\det(\mathbf{A})$ , тогда как вторая сумма равна нулю вследствие равенства первой и второй строк.

**Лемма 1.3.6.** *Если прибавить линейную комбинацию строк (столбцов) матрицы  $\mathbf{A}$  к другой ее строке (столбцу), то определитель не изменится.*

Это прямое следствие леммы 1.3.5.

**Теорема 1.3.1.** Если строки (столбцы) матрицы  $\mathbf{A}$  линейно зависимы, то  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Доказательство.** Обозначим строки  $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_n^T$ . По предположению, найдутся числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , не равные нулю одновременно, такие, что

$$c_1 \mathbf{a}_1^T + c_2 \mathbf{a}_2^T + \dots + c_n \mathbf{a}_n^T = \mathbf{0}.$$

Пусть  $c_m$  не равно нулю. Тогда

$$-\mathbf{a}_m^T = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n (c_i/c_m) \mathbf{a}_i^T.$$

Если прибавить сумму в правой части равенства к  $m$ -ой строке матрицы  $\mathbf{A}$ , то полученная матрица будет содержать нулевую строку, так что, согласно лемме 1.3.6,  $\det(\mathbf{A})$  равен нулю. ■

Прежде чем доказывать обратную теорему, дадим несколько определений. *Минором*  $p$ -го порядка матрицы  $\mathbf{A}$  называется определитель (квадратной) подматрицы, образованной пересечением  $p$  строк  $i_1, i_2, \dots, i_p$  и  $p$  столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_p$ . Мы будем обозначать минор

$$A(i_1, i_2, \dots, i_p; j_1, j_2, \dots, j_p).$$

Таким образом, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad (1.3.3)$$

то

$$\begin{aligned} A(1; 1) &= 2, \\ A(1, 2; 1, 2) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \\ A(1, 2; 2, 3) &= -2. \end{aligned}$$

Особое значение имеет минор порядка  $n - 1$ . Он получается удалением  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\mathbf{A}$  и обозначается  $\hat{a}_{ij}$ . Таким образом, для матрицы  $\mathbf{A}$  (1.3.3):

$$\hat{a}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14, \quad \hat{a}_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -11, \quad \hat{a}_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Миноры  $\hat{a}_{ij}$  входят в разложение определителя: (1.3.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\hat{a}_{11} - a_{12}\hat{a}_{12} + a_{13}\hat{a}_{13}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Это называется разложением определителя  $\det(\mathbf{A})$  по первой строке. Таким образом, для матрицы  $\mathbf{A}$  (1.3.3) имеем

$$33 = 2 \times 14 - 1 \times (-11) + 3 \times (-2).$$

Коэффициенты  $\hat{a}_{11}$ ,  $-\hat{a}_{12}$ ,  $\hat{a}_{13}$  в (1.3.4) называются *алгебраическими дополнениями*  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  соответственно и обозначаются  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ . Таким образом, (1.3.4) можно переписать как

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Если взять алгебраические дополнения *первой* строки и умножить их на элементы *другой* строки, например *второй*, тогда мы получим ноль:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0. \quad (1.3.6)$$

Определитель в правой части равен нулю, поскольку он содержит две одинаковые строки. Эти два результата, (1.3.5) и (1.3.6), являются частными случаями следующей теоремы.

**Теорема 1.3.2.**

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \det(\mathbf{A})\delta_{ij}, \quad (1.3.7)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ki}a_{kj} = \det(\mathbf{A})\delta_{ij}, \quad (1.3.8)$$

где  $\delta_{ij}$  определен в (1.2.1).

**Доказательство.** При  $i = j$  эти уравнения просто воспроизводят определение алгебраического дополнения. При  $i \neq j$  они равносильны высказыванию, что определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю. ■

Теперь сравним уравнение (1.3.7) с (1.2.3). Если мы определим матрицу  $\mathbf{B}$  так, что

$$b_{kj} = A_{jk}, \quad (1.3.9)$$

тогда можно переписать (1.3.7) как

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \det(\mathbf{A}) \delta_{ij}, \quad (1.3.10)$$

что в матричных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}. \quad (1.3.11)$$

Аналогично (1.3.8) можно переписать как

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}. \quad (1.3.12)$$

Матрица  $\mathbf{B}$  называется *присоединенной* к матрице  $\mathbf{A}$  и обозначается  $\text{adj}(\mathbf{A})$ . Таким образом, из уравнений (1.3.11), (1.3.12) следует, что

$$\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = \text{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}. \quad (1.3.13)$$

Теперь мы готовы перейти к доказательству теоремы, обратной теореме 1.3.1.

**Теорема 1.3.3.** *Если  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , то строки (столбцы) матрицы  $\mathbf{A}$  линейно зависимы.*

**Доказательство.** Докажем теорему в случае одинаковых столбцов. Для строк доказательство аналогично. Будем использовать метод математической индукции по размерности матрицы  $n$ . Случай  $n = 1$  тривиален:  $\det(\mathbf{A}) = a_{11}$ . Обозначим  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  и предположим, что  $\det(\mathbf{A}) = 0$ . В этом случае *или* каждый набор из  $n - 1$  векторов, выбранных из  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , является линейно зависимым, а тогда полный набор тоже линейно зависим, как и требовалось, *или же* найдется набор из  $n - 1$  векторов (без потери общности возьмем  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ ), который линейно независим. Теперь рассмотрим набор векторов  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ , полученных из  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  удалением  $i$ -ой строки у каждого вектора. Как минимум для одного значения  $i$  набор  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$  должен быть линейно независимым. По предположению индукции  $(n - 1) \times (n - 1)$  определитель, состоящий из этих векторов,

должен быть ненулевым. Если  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , то из уравнения (1.3.10) следует, что

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.14)$$

Поскольку  $\mathbf{a}_k = \{a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}\}$ , можно переписать  $n$  уравнений (1.3.14) в виде

$$\sum_{k=1}^n b_{kj} \mathbf{a}_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.15)$$

Как минимум для одного значения  $j$  не все  $b_{kj}$  равны нулю, следовательно, столбцы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно зависимы. ■

**Теорема 1.3.4.** *Матричные уравнения*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

имеют нетривиальные решения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно тогда и только тогда, когда  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

**Доказательство.** Это следствие теоремы 1.3.3. Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  являются столбцами матрицы  $\mathbf{A}$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ &= x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n. \end{aligned}$$

Можно подобрать  $x_1, \dots, x_n$ , не равные нулю одновременно, такие что

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

тогда и только тогда, когда  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно зависимы. Согласно теореме 1.3.3, это имеет место в случае  $\det(\mathbf{A}) = 0$ . В свою очередь, это равносильно тому, что строки матрицы  $\mathbf{A}$  линейно зависимы, т. е.  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$  имеет нетривиальное решение. ■

**Теорема 1.3.5.** *Если  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, то*

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).$$

Доказательство мы оставляем читателю (упражнения 1.3.3).

Квадратную матрицу  $\mathbf{A}$  называют *вырожденной*, если  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , и *невырожденной* или *обратимой*, если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Из теоремы 1.3.4



следует, что если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, то уравнение  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  имеет только тривиальное решение  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Упражнение 1.3.5 обобщает этот результат: если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, то матричные уравнения  $\mathbf{AS} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{TA} = \mathbf{0}$  имеют только тривиальные решения  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ; невырожденная матрица  $\mathbf{A}$  не может быть делителем нуля.

Матрицу  $\mathbf{R}$  называют *обратной* к  $\mathbf{A}$ , если  $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$ .

**Теорема 1.3.6.** *Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную, то обратная матрица единственна и  $\mathbf{RA} = \mathbf{I}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$ . Из теоремы 1.3.5 следует, что

$$\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{I}) = 1, \quad (1.3.16)$$

т. е.  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  и матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена. Предположим, что найдутся две обратные матрицы  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , тогда  $\mathbf{AR}_1 = \mathbf{I} = \mathbf{AR}_2$ , следовательно,  $\mathbf{A}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = \mathbf{0}$ . Но  $\mathbf{A}$  не вырождена, а значит,  $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$ :  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1$ . Далее, если  $\mathbf{AR} = \mathbf{I}$ , то  $\mathbf{ARA} = \mathbf{A}$ , т. е.  $\mathbf{A}(\mathbf{RA} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{RA} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ , т. е.  $\mathbf{RA} = \mathbf{I}$ . ■

Из теоремы 1.3.6 следует, что *если* матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную, то  $\mathbf{A}$  не вырождена. Логическое отрицание этого утверждения гласит, что если матрица  $\mathbf{A}$  *вырождена*, то она *не* имеет обратной. Теперь докажем обратную теорему.

**Теорема 1.3.7.** *Если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, то она имеет обратную.*

**Доказательство.** Если  $\mathbf{A}$  не вырождена, то  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  и уравнение (1.3.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{AR} = \mathbf{RA} = \mathbf{I}, \quad (1.3.17)$$

где  $\mathbf{R} = \text{adj}(\mathbf{A}) / \det(\mathbf{A})$ . ■

Если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, ее обратная матрица обозначается  $\mathbf{A}^{-1}$ . Имеем

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (1.3.18)$$

**Теорема 1.3.8.** *Уравнение*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.3.19)$$

*или имеет единственное решение, если  $\mathbf{A}$  не вырождена, или имеет решение только для некоторых  $\mathbf{b}$ , если  $\mathbf{A}$  вырождена.*

**Доказательство.** Если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, то

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

является единственным решением. Если  $\mathbf{A}$  вырождена, то найдется один (или более)  $\mathbf{y}$  такой, что

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Тогда

$$\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax}) = \mathbf{y}^T \mathbf{b} = 0$$

и (1.3.19) имеет решение только если  $\mathbf{b}$  ортогонален любому  $\mathbf{y}$ , удовлетворяющему уравнению  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Если  $\mathbf{A}$  вырождена, то  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  имеет одно или более решений  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ , так что если  $\mathbf{x}_0$  является решением, удовлетворяющим  $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$ , то

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{x}_i \quad (1.3.20)$$

также является решением при произвольных  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . ■

Заметим, что попытка решить  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  методом нахождения матрицы, обратной к  $\mathbf{A}$ , является далеко не самым оптимальным способом. Нахождение  $\mathbf{A}^{-1}$  эквивалентно решению  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  при всех возможных  $\mathbf{b}$ , а не только при данном  $\mathbf{b}$ . Методы решения уравнения  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  являются предметом изучения *вычислительной линейной алгебры*, основы которой изложены, например, в книгах Бишоп (Bishop), Глэдвела и Михаэльсона (Michaelson) [33] (1965), а также Голуба (Golub) и Ван Лоана (Van Loan) [135] (1983). Заметим еще, что, по существу, мы не показали, как найти решение  $\mathbf{x}_0$ , если  $\mathbf{b}$  ортогонален всем решениям  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ; этот вопрос также решается методами вычислительной линейной алгебры.

В вычислительной линейной алгебре отправной точкой практически всех методов решения линейных уравнений, таких как (1.3.19), независимо от того, является ли матрица  $\mathbf{A}$  квадратной или нет, а также вычисления определителей, является *процедура гауссова исключения*. Это систематическая редукция матрицы  $(a_{ij})$  к (обычно) верхней треугольной форме с помощью вычитания кратных некоторых уравнений из других уравнений. Из леммы 1.3.6 следует, что определитель матрицы при таких преобразованиях не изменяется.

Применение процедуры гауссова исключения к уравнениям

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6, \\2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 13, \\3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 14\end{aligned}$$

имеет следующий вид (в записи сохранены только коэффициенты):

$$\begin{array}{l}1 \ 3 \ 2 : 6 \rightarrow 1 \ 3 \ 2 : 6 \rightarrow 1 \ 3 \ 2 : 6 \\2 \ 5 \ 6 : 13 \quad 0 \ -1 \ 2 : 1 \quad 0 \ -1 \ 2 : 1 \\3 \ 4 \ 7 : 14 \quad 0 \ -5 \ 1 : -4 \quad 0 \ 0 \ -9 : -9.\end{array}$$

Определитель матрицы  $\mathbf{A}$  равен  $1 \times (-1) \times (-9) = 9$ . Последнее из новых уравнений дает  $-9x_3 = -9$ ,  $x_3 = 1$ ; при подстановке этого результата во второе уравнение получаем  $-x_2 = 1 - 2x_3 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ; и наконец, из  $x_1 + 3 + 2 = 6$  следует  $x_1 = 1$ .

### Упражнения 1.3

1. Показать, что если матрица  $\mathbf{A}$  верхняя (нижняя) треугольная, т. е.  $a_{ij} = 0$  при  $j > i$  ( $j < i$ ), то

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

2. Найти  $\mathbf{A}^{-1}$  для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Проверить, что  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ .

3. Доказать, что если  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, то

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}).$$

Указание: рассмотрите  $2n \times 2n$ -матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Покажите, что  $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ . Далее, вычитая строки с  $(n+1)$ -ой по  $2n$ -ую, умноженные на константы, из строк с 1-й по  $n$ -ю исключите все коэффициенты в верхней левой четверти матрицы  $\mathbf{C}$ . Коэффициенты в верхней правой четверти примут вид  $-\mathbf{AB}$ .

4. Используя процедуру гауссова исключения, решить систему уравнений

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -9, \\x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= -3, \\-x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= -10.\end{aligned}$$

5. Показать, что если матрица  $\mathbf{A}$  не вырождена, то матричные уравнения  $\mathbf{AS} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{TA} = \mathbf{0}$  имеют только тривиальные решения  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$  соответственно.

## 1.4. Собственные значения и собственные векторы

Если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — квадратные матрицы  $n$ -го порядка, то уравнение

$$\mathbf{Cx} = \lambda \mathbf{Ax} \quad (1.4.1)$$

имеет *нетривиальное* решение  $\mathbf{x}$  (т. е. такое, что  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ ) тогда и только тогда, когда матрица  $\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}$  вырождена, т. е. скаляр  $\lambda$  удовлетворяет *характеристическому* уравнению

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \quad (1.4.2)$$

Корни этого уравнения называются *собственными значениями* пары матриц  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ ; они могут быть действительными или комплексными. Если  $\lambda$  является собственным значением, вектор  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющий (1.4.1), называется *собственным вектором*, соответствующим  $\lambda$ .

В многочисленной математической литературе основное внимание уделяется случаю  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ . При этом  $\lambda$  называется *собственным значением* матрицы  $\mathbf{C}$ . Задача (1.4.1) называется *обобщенной задачей на собственные значения*. В механике существует множество задач, в которых появляются обе матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$ , поэтому для удобства будем развивать теорию для общего случая.

Задача нахождения собственных значений в общем случае, т. е. для необязательно симметричных матриц  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{A}$ , чрезвычайно сложна (см. упражнение 1.4.8). Однако во всех или почти всех задачах, которые встречаются в данной книге, матрицы  $\mathbf{C}, \mathbf{A}$  обладают специальными свойствами: они действительные и симметричные, и, по меньшей мере, одна из них *положительно определенная*. Дадим точное определение этого свойства.

Пусть матрица  $\mathbf{A}$  действительная и симметричная, а  $\mathbf{x}$  — действительный  $n \times 1$  вектор-столбец. Величина  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  является скаляром. В компонентной записи имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \dots + \\ & + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Это выражение называется *квадратичной формой*. Во многих физических приложениях кинетическая и потенциальная энергии механической системы могут быть выражены как квадратичные формы от обобщенных скоростей и смещений соответственно. Кинетическая энергия системы всегда положительна, если не все обобщенные скорости равны нулю. Это приводит нас к следующему определению. Говорят, что матрица  $\mathbf{A}$  *положительно определена*, если из условия  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$  следует  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ . (Очевидно, если  $\|\mathbf{x}\| = 0$ , т. е.  $x_1 = 0 = x_2 = \dots = x_n$ , то  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \equiv 0$ .) Если  $\mathbf{A}$  удовлетворяет более слабому условию, что из  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$  следует  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ , т. е. найдется вектор  $\mathbf{x}$  такой, что  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$  и  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ , тогда говорят, что матрица  $\mathbf{A}$  *положительно полуопределена*. В дальнейшем мы увидим, что матрица, связанная с потенциальной энергией незакрепленной системы положительно полуопределена; найдется вектор  $\mathbf{x}$ , соответствующий смещению твердого тела, для которого потенциальная энергия *деформации* равна нулю.

**Теорема 1.4.1.** *Если матрицы  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$  действительные и симметричные и  $\mathbf{A}$  положительно определена, то собственные значения и собственные векторы (1.4.1) действительны.*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda, \mathbf{x}$ , возможно, комплексная собственная пара (1.4.1), причем  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ . Домножим обе стороны (1.4.1) слева на  $\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}}^T$ :

$$\mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (1.4.4)$$

Обе величины  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x}$  *действительны*. Это следует из того факта, что  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$  является числом и, следовательно, не изменяется при транспонировании. Таким образом,

$$a = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{x}} = \overline{(\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x})} = \overline{a},$$

но если  $a = \overline{a}$ , то  $a$  является действительным числом. Аналогично  $\mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x}$  действительны. Более того, если  $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ , т. е. по меньшей мере один коэффициент в  $\mathbf{x}$  не равен нулю, то  $a$  строго положительно, т. е.  $a > 0$ . Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  — действительные числа, тогда

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{u}^T - i\mathbf{v}^T) \mathbf{A} (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + i\{\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}\} + \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

Но поскольку выражение  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$  действительно, его мнимая часть равна нулю, и, следовательно,

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} > 0.$$

Неравенство строгое, поскольку *или* по меньшей мере один из коэффициентов  $\mathbf{u}$  не равен нулю, и в этом случае  $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} > 0$ , *или* если  $\mathbf{u} \equiv 0$ , то как минимум один из коэффициентов  $\mathbf{v}$  не равен нулю, а тогда  $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} > 0$ .

Теперь вернемся к уравнению (1.4.4):  $\mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$  действительны, и  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$  положительна. Следовательно,

$$\lambda = \mathbf{x}^* \mathbf{C} \mathbf{x} / \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$$

действительно, а значит, вектор  $\mathbf{x}$ , получаемый при решении совместной системы линейных уравнений с действительными коэффициентами, является действительным. Следовательно,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T$  и  $\lambda = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ . ■

Это отношение часто называют *отношением Рэлея*, соответствующим уравнению (1.4.1). (Именно лорд Рэлей в 1894 году в своей классической монографии «*Теория звука*» [290] использовал это отношение, сделав первый шаг в сторону вариационного толкования собственных значений. Мы вернемся к этому в главе 2.) Введем обозначение

$$\lambda_R = R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (1.4.5)$$

Из упражнения 1.4.7 следует необходимость того, чтобы одна из матриц,  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{C}$ , была положительно определена.

Условия, которым должна удовлетворять (симметричная) положительно определенная или положительно полуопределенная матрица  $\mathbf{A}$ , могут быть выражены в терминах *главных миноров*  $\mathbf{A}$ . Главным минором  $p$ -го порядка произвольной матрицы  $\mathbf{A}$  называется определитель подматрицы, образованной из первых  $p$  строк и первых  $p$  столбцов. Главные миноры имеют специальные обозначения вида

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad D_n = |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}). \quad (1.4.6)$$

Теперь можно сформулировать критерий положительной (полу-) определенности матрицы.

**Теорема 1.4.2.** *Симметричная матрица  $\mathbf{A}$  положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры  $(D_i)_1^n$  положительны.  $\mathbf{A}$  является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда  $(D_i)_1^{n-1} \geq 0$ ,  $D_n = 0$ .*

Эта теорема будет доказана в главе 5. Заметим, что вследствие того, что  $D_n = \det(\mathbf{A})$ , положительно определенная матрица является невырожденной, тогда как положительно полуопределенная матрица вырождена.

Теперь можно уточнить теорему 1.4.1.

**Теорема 1.4.3.** *Если матрицы  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$  являются действительными и симметричными, а  $\mathbf{A}$  положительно определена, тогда уравнение (1.4.1) имеет  $n$  действительных собственных значений, причем они могут быть кратными. Если  $\mathbf{C}$  положительно определена, то собственные значения положительны, если  $\mathbf{C}$  положительно полуопределена, то они неотрицательны.*

**Доказательство.** Уравнение (1.4.2) можно переписать в терминах коэффициентов  $c_{ij} - \lambda a_{ij}$ ; в результате получается полиномиальное уравнение  $n$ -го порядка по  $\lambda$ , а именно:

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \equiv \Delta_0 + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda^2 + \dots + \Delta_n \lambda^n = 0. \quad (1.4.7)$$

Большинство коэффициентов  $\Delta_i$  являются сложными функциями от  $a_{ij}$  и  $c_{ij}$ , но легко показать, что первый и последний коэффициенты имеют вид

$$\Delta_0 = \det(\mathbf{C}), \quad \Delta_n = (-1)^n \det(\mathbf{A}). \quad (1.4.8)$$

Поскольку  $\mathbf{A}$  положительно определена, то  $\det(\mathbf{A}) > 0$ , таким образом,  $\Delta_n \neq 0$ . Это означает, что уравнение (1.4.7) действительно имеет порядок  $n$  и, следовательно,  $n$  корней  $(\lambda_i)_1^n$ . Этим завершается доказательство первой части теоремы. Если  $\mathbf{C}$  положительно определена, тогда и числитель и знаменатель отношения Рэля (1.4.5) будут положительны, так что  $(\lambda_i)_1^n > 0$ . Если  $\mathbf{C}$  лишь положительно полуопределена, тогда числитель отношения Рэля неотрицателен, так что  $\lambda_i$  неотрицательны. Более того, поскольку  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \Delta_0 / \Delta_n = \det(\mathbf{C}) / \det(\mathbf{A})$ , уравнение (1.4.7) имеет по меньшей мере одно нулевое решение при условии  $\det(\mathbf{C}) = 0$ . ■

Условие теоремы 1.4.3 позволяет упорядочить собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  в порядке возрастания

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (1.4.9)$$

**Теорема 1.4.4.** *Собственные векторы  $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ , соответствующие двум различным собственным значениям  $\lambda_i, \lambda_j (\lambda_i \neq \lambda_j)$  пары симметричных матриц  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  ортогональны обеим матрицам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ , т. е.*

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = 0 = \mathbf{u}_i^T \mathbf{C} \mathbf{u}_j. \quad (1.4.10)$$

**Доказательство.** По определению

$$\mathbf{C} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{A} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{A} \mathbf{u}_j. \quad (1.4.11)$$

Транспонируем первое уравнение и умножим его справа на  $\mathbf{u}_j^T$ , умножим второе уравнение слева на  $\mathbf{u}_i^T$ . Получим

$$(\mathbf{u}_i^T \mathbf{C}) \mathbf{u}_j = \lambda_i (\mathbf{u}_i^T \mathbf{A}) \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_i^T (\mathbf{C} \mathbf{u}_j) = \lambda_j \mathbf{u}_i^T (\mathbf{A} \mathbf{u}_j).$$

Для разности полученных уравнений имеем

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = 0.$$

Но  $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ , так что  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = 0$ , следовательно,  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{C} \mathbf{u}_j = 0$ . ■

Умножая уравнение (1.4.11) слева на  $\mathbf{u}_i^T$ , получаем

$$c_i \equiv \mathbf{u}_i^T \mathbf{C} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_i = \lambda_i a_i. \quad (1.4.12)$$

Иногда мы будем *нормировать* собственный вектор  $\mathbf{u}_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  условием  $a_i = 1$ , тогда  $c_i = \lambda_i$ .

Важным следствием доказанной теоремы является

**Теорема 1.4.5.** *Если пара симметричных матриц  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  имеет различные собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  и  $\mathbf{A}$  положительно определена, тогда собственные векторы  $\mathbf{u}_i$  линейно независимы, а следовательно, образуют  $n$ -мерное векторное пространство  $V_n$ .*

**Доказательство.** Предположим, что

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Умножая слева на  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{A}$ , имеем

$$\alpha_1 (\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_1) + \alpha_2 (\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_n (\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_n) = 0.$$

Но  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j = 0$  при  $i \neq j$ , так что только  $i$ -ый член этого уравнения не равен нулю, следовательно,

$$\alpha_i (\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_i) = 0.$$



Поскольку матрица  $\mathbf{A}$  положительно определена,  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{A} \mathbf{u}_i > 0$  и  $\alpha_i = 0$ , т. е. все  $(\alpha_i)_1^n$  равны нулю, а значит,  $\mathbf{u}_i$  линейно независимы. Любой вектор  $\mathbf{u} \in V_n$  может быть однозначно записан как

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j, \quad (1.4.13)$$

где

$$\alpha_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{u} / \mathbf{u}_j^T \mathbf{A} \mathbf{u}_j. \quad (1.4.14)$$

В данной книге мы не рассматриваем методы нахождения собственных значений и собственных векторов. Простое изложение классических приемов подобных вычислений можно найти в книге Бишоп, Глэдвелла, Майкельсона [33]. Полное рассмотрение современных методов приводится в книге Голуба и Ван Лоана [135]. Задачи нахождения собственных значений симметричных матриц рассмотрены в классической монографии Парлета (Parlett) [264]. В этой книге рассматриваются только качественные свойства собственных значений.

### Упражнения 1.4

1. Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

показать, что матрица  $\mathbf{A}$  положительно полуопределена. Для какого  $\mathbf{x}$  выполнено уравнение  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ?

- Показать, что  $\mathbf{A}^{-1}$  положительно определена тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  положительно определена.
- Проверить условия положительной определенности матрицы  $\mathbf{A}$  из теоремы 1.4.2 при  $n = 2$ , переписав квадратичную форму следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11} \left\{ \left( x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 + \left( \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} \right) x_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Распространить анализ на случай  $n = 3$ .

4. Найти собственные значения и собственные векторы пары матриц

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Указание: заменить уравнение на собственные значения эквивалентным *рекуррентным соотношением*  $-x_{r-1} + (2 - \lambda)x_r - x_{r+1} = 0$  с подходящими условиями на концах  $r = 1, r = 3$  и искать решение в виде  $x_r = A \cos r\theta + B \sin r\theta$ . Обобщить полученный результат.

5. Показать, что если  $n = 3$ ,  $\mathbf{A}$  симметрична и все  $D_1, D_2, D_3$  из уравнения (1.4.6) **положительны**, то *все* главные миноры, у которых номера строк совпадают с номерами столбцов, положительны.

Указание: записать  $a_{11} \det(\mathbf{A})$  как  $2 \times 2$ -определитель с элементами, являющимися минорами 2-го порядка матрицы  $\mathbf{A}$ . Эта задача является частным случаем общего результата, с которым можно ознакомиться, например, в книге Гантмахера [97].

6. Показать, что действительная симметричная матрица  $\mathbf{A}$  имеет положительные собственные значения тогда и только тогда, когда она положительно определена.

7. Возьмем пару матриц

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения пары не являются действительными. В каком месте происходит нарушение доказательства теоремы 1.4.1?

8. Возьмем пару матриц

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Показать, что уравнение (1.4.1) имеет только одно собственное значение и один собственный вектор, так что собственные векторы не образуют пространство  $V_2$ . Этот пример иллюстрирует одну из трудностей, присущую задаче нахождения собственных значений в случае несимметричных матриц.

---

---

## ГЛАВА 2

# Колебания дискретных систем

Природа находится в постоянном движении. Полный покой смертелен.

Блез Паскаль, «Мысли», 129

### 2.1. Введение

Вывод и решение уравнений движения дискретных колебательных систем, т. е. имеющих конечное число степеней свободы, подробно рассматриваются в различных книгах (см. например, Бишоп и Джонсон [34], Бишоп, Глэдвел и Майкельсон [33], Мейрович (Meirovich) [234]). В этой главе представлен краткий обзор тех разделов теории, которые необходимы в дальнейшем для решения обратных задач.

В этой книге мы будем рассматривать только *малые* колебания *консервативных* систем около некоторого базового положения, которое чаще всего совпадает с положением равновесия.

Прежде чем погружаться в эту общую дискуссию, выведем уравнения движения для некоторых простых колебательных систем.

### 2.2. Колебания некоторых простых систем

На рисунке 2.2.1 изображена колебательная система, состоящая из  $n$  масс, соединенных линейными пружинами жесткости  $(k_r)_1^n$ . Система имеет конфигурацию прямой линии, расположена на гладком горизонтальном столе и находится под действием сил  $(F_r(t))_1^n$ .

Уравнения движения для системы имеют вид

$$m_r \ddot{u}_r = F_r + \theta_{r+1} - \theta_r, \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.2.1)$$

$$m_n \ddot{u}_n = F_n - \theta_n, \quad (2.2.2)$$

где  $\dot{\phantom{x}}$  обозначает дифференцирование по времени. Из закона Гука следует, что силы натяжения пружин даются следующим выражением:

$$\theta_r = k_r(u_r - u_{r-1}), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.3)$$

Если левый конец системы зафиксирован, то

$$u_0 = 0. \quad (2.2.4)$$

Анализ *вынужденных* колебаний включает в себя рассмотрение решений этих уравнений для заданных вынуждающих сил  $F_r(t)$ . Анализ *свободных* колебаний заключается в нахождении решения уравнений в отсутствие внешних сил, т. е.  $F_r(t) \equiv 0$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , и при фиксированных граничных условиях.

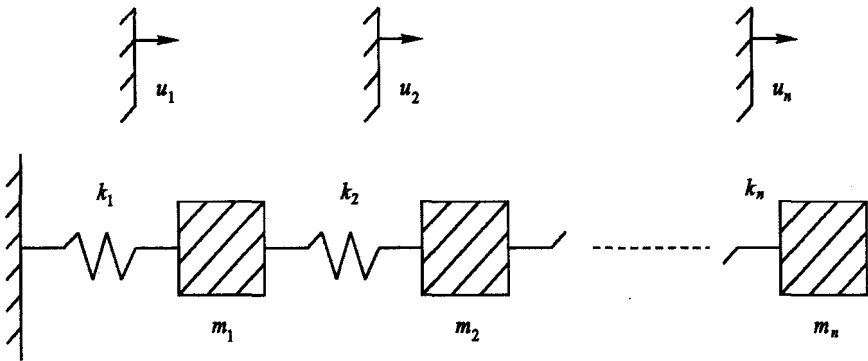


Рис. 2.2.1. Система  $n$  масс, соединенных пружинами

Система, изображенная на рисунке 2.2.1, исключительно важна с инженерной точки зрения. Она представляет собой простейшую возможную дискретную модель стержня, колеблющегося в продольном направлении. Здесь массы и жесткости пружин соответствуют *дискретизации* непрерывно распределенной массы и жесткости стержня. Уравнения (2.2.1)–(2.2.4) также описывают крутильные колебания системы, изображенной на рисунке 2.2.2, при условии, что  $u_r$ ,  $k_r$ ,  $m_r$  обозначают величину закручивания, жесткость кручения и момент инерции соответственно. Такая дискретная система представляет собой простую модель крутильных колебаний стержня с непрерывно распределенными моментом инерции и жесткостью.

Существует третья система, которая математически описывается уравнениями (2.2.1)–(2.2.4). Это поперечные колебания изображенной

на рисунке 2.2.3 струны, имеющей натяжение  $T$  и нагруженной массами  $(m_r)_1^n$ . (Заметим, что правый конец этой струны *зафиксирован* в отличие от систем на рисунках 2.2.1 и 2.2.2. При моделировании струны со свободным концом последний ее участок должен быть прикреплен к невесомому кольцу, скользящему по гладкому вертикальному стержню.) Если, в соответствии с предположением малости колебаний, струна отклоняется от прямой линии положения равновесия незначительно, то уравнения движения масс  $m_r$  можно вывести, используя рис. 2.2.4.

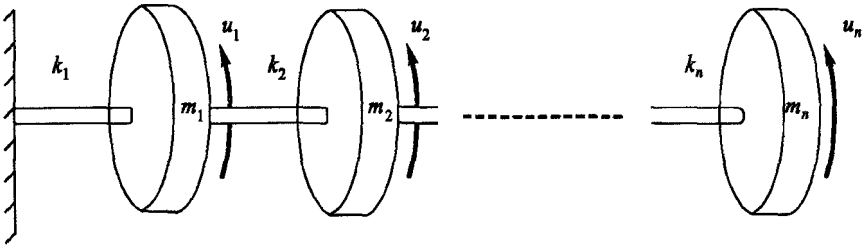


Рис. 2.2.2. Модель, описывающая крутильные колебания

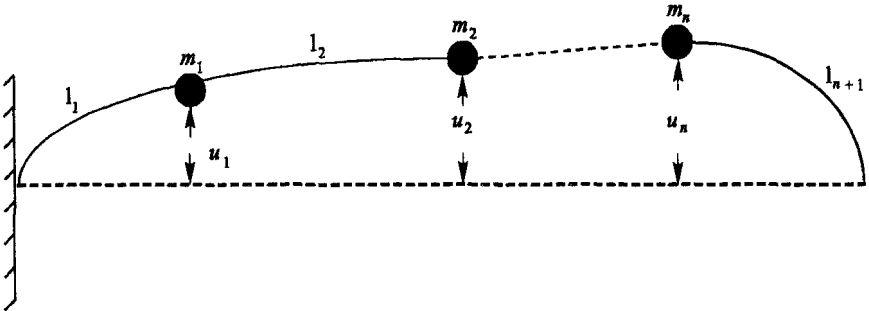


Рис. 2.2.3.  $n$  масс, зафиксированные на натянутой струне

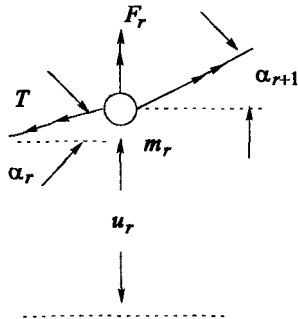
Из уравнений движения Ньютона следует

$$m_r \ddot{u}_r = F_r + T \sin \alpha_{r+1} - T \sin \alpha_r, \quad (2.2.5)$$

$$= F_r + \theta_{r+1} - \theta_r, \quad (2.2.6)$$

где для малых отклонений можно считать  $\sin \alpha_r = \alpha_r$ ,

$$\theta_r = T \alpha_r = k_r (u_r - u_{r-1}), \quad k_r = T/\ell_r.$$

Рис. 2.2.4. Силы, действующие на массу  $m_r$ 

Для того чтобы переписать уравнения (2.2.1)–(2.2.3) в матричной форме, используем (2.2.3)

$$m_r \ddot{u}_r = F_r + k_{r+1} u_{r+1} - (k_{r+1} + k_r) u_r + k_r u_{r-1}, \quad m_n \ddot{u}_n = F_n - k_n u_n + k_n u_{n-1},$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Это уравнение может быть переписано в форме

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \tag{2.2.8}$$

где матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  называются матрицей *инерции* и матрицей *жесткости* соответственно. Заметим, что как  $\mathbf{M}$ , так и  $\mathbf{K}$  *симметричны*; этим свойством обладают все матрицы, соответствующие любой консервативной системе. Более того, обе они положительно определены. В этом

частном случае матрица  $\mathbf{M}$  диагональна, тогда как  $\mathbf{K}$  трехдиагональна, т. е. все ее элементы, отличные от нуля, расположены на главной и двух примыкающих диагоналях, называемых *кодиагоналями*.

Уравнение (2.2.3) также можно переписать, введя  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  и заметив, что

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}.$$

В компактной записи эти матричные уравнения принимают вид

$$\theta = \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{u}, \quad (2.2.9)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & -1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

и  $\widehat{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ .

Используя матрицу  $\mathbf{E}$ , можно переписать уравнения (2.2.1)–(2.2.2) в форме

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{E}\theta + \mathbf{F}.$$

Принимая во внимание (2.2.9), имеем

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.2.11)$$

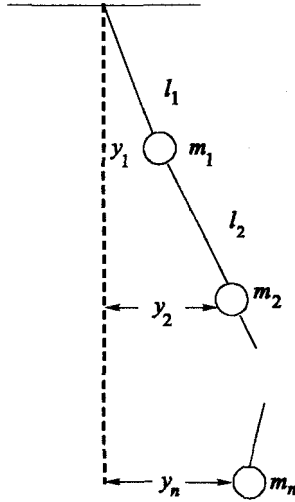
и

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T. \quad (2.2.12)$$

В анализе свободных колебаний существуют два важных граничных условия. Правый конец системы может быть *свободным*, и в этом случае *нет* никаких ограничений на  $(u_i)_1^n$ , или же он *зафиксирован*, и тогда  $u_n = 0$ .

## Упражнения 2.2

1. Проверить, что матрица жесткости из уравнения (2.2.7) удовлетворяет условиям теоремы 1.4.2. Доказать, что то же справедливо и для главных миноров любого порядка  $i$ , где  $1 \leq i \leq n$ .

Рис. 2.2.5. Составной маятник из  $n$  нерастяжимых струн

2. Рассмотрим составной маятник (рис. 2.2.5).

Показать, что кинетическая и потенциальная энергии системы для малых колебаний имеют следующий вид:

$$2T = m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2 + \dots + m_n \dot{y}_n^2,$$

$$2V = \sigma_1 \frac{y_1^2}{\ell_1} + \sigma_2 \frac{(y_2 - y_1)^2}{\ell_2} + \dots + \sigma_n \frac{(y_n - y_{n-1})^2}{\ell_n},$$

где  $\sigma_r = g \sum_{s=r}^n m_s$ .

### 2.3. Поперечные колебания балки

На рис. 2.3.1 представлена простая дискретная модель поперечных колебаний балки. Она состоит из  $n+2$  масс  $(m_r)_{r=1}^n$ , связанных жесткими невесомыми стержнями длины  $(\ell_r)_r^n$ , которые в свою очередь связаны  $n$  вращающимися пружинами жесткости  $(k_r)_r^n$ . Масса и жесткость балки, в действительности распределенные вдоль нее, сосредоточены в  $n+2$  точках.



Движение дискретной системы описывается набором из четырех дифференциальных уравнений первого порядка, которые можно вывести, используя рис. 2.3.2.

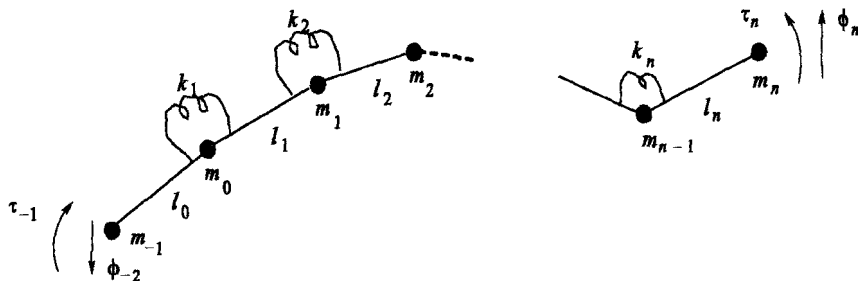


Рис. 2.3.1. Дискретная модель колебаний балки

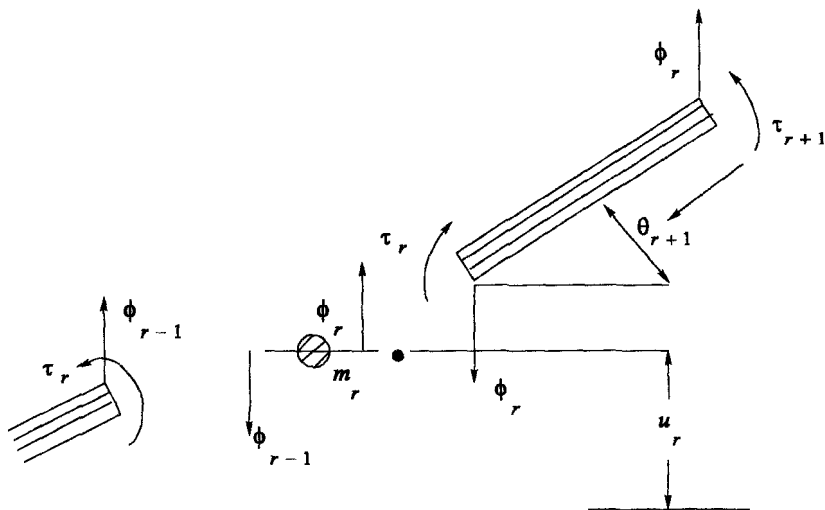


Рис. 2.3.2. Окрестность массы  $m_r$

Малым смещениям соответствуют вращения

$$\theta_r = (u_r - u_{r-1})/l_r, \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

Если  $r$ -ая пружина имеет жесткость вращения  $k_r$ , тогда момент  $\tau_r$ , создающий относительное вращение  $\theta_{r+1} - \theta_r$  двух жестких стержней

с обеих сторон от  $m_r$ , равен

$$\tau_r = k_{r+1}(\theta_{r+1} - \theta_r), \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из условия равновесия стержня, соединяющего  $m_r$  и  $m_{r+1}$ , следуют выражения для поперечных (сдвиговых) сил

$$\phi_r = (\tau_r - \tau_{r+1})/\ell_{r+1}, \quad r = -1, 0, \dots, n-1,$$

при этом уравнение движения для массы  $m_r$  имеет вид

$$m_r \ddot{u}_r = \phi_r - \phi_{r-1}, \quad r = -1, 0, \dots, n.$$

Здесь  $\phi_{-2}$ ,  $\phi_n$  и  $\tau_{-1}$ ,  $\tau_n$  обозначают соответственно внешние поперечные силы и изгибающие моменты, приложенные к концам.

Предположим, что левый конец зафиксирован так, что

$$u_{-1} = 0 = u_0,$$

тогда движутся только массы  $(m_r)_1^n$ , а уравнение движения можно переписать как

$$\theta = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{u}, \quad (2.3.2)$$

$$\tau = \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{E}^T \theta, \quad (2.3.3)$$

$$\phi = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \tau - \ell_n^{-1} \tau_n \mathbf{e}_n, \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{E} \phi + \phi_n \mathbf{e}_n, \quad (2.3.5)$$

где  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ ,  $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ ,  $\phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_r)$ ,  $\mathbf{L} = \text{diag}(\ell_r)$ ,  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_r)$ ,  $\mathbf{e}_n = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$  и матрица  $\mathbf{E}$  определена в (2.2.10).

Комбинируя уравнения (2.3.2)–(2.3.5), имеем

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \phi_n \mathbf{e}_n + \ell_n^{-1} \tau_n \mathbf{E} \mathbf{e}_n, \quad (2.3.6)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T. \quad (2.3.7)$$

Это уравнение имеет ту же общую форму, что и уравнение (2.2.8). Заметим, что  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  вновь симметричны и положительно определены, при этом  $\mathbf{M}$  диагональна, а  $\mathbf{K}$  пятидиагональна.

## 2.4. Обобщенные координаты и уравнения Лагранжа для стержня

Представление дискретной системы посредством конечного набора масс, соединенных пружинами, слишком ограничено. В общем случае движение описывается в терминах  $n$  обобщенных координат  $(q_r)_1^n$ , являющихся функциями только одной переменной: времени  $t$ . Системы, рассматриваемые в разделах 2.2, 2.3, действительно дискретны в этом смысле. Обобщенными координатами, соответствующими системе на рис. 2.2.1, являются  $(u_r)_1^n$ . Тем не менее более общие схемы описывают, например, модель продольных колебаний неоднородного стержня, используя *метод конечных элементов* (см. например, Зинкевич (Zienkiewicz) [343]), Стрэнг (Strang) и Фикс (Fix) [311].

В этой модели, изображенной на рис. 2.4.1, стержень состоит из  $n + 1$  частей. Для  $r$ -ой части, показанной на рис. 2.4.2, продольное смещение  $y(x, t)$  записано в простой линейной форме

$$y(x, t) = y_r(t)(1 - \xi) + y_{r+1}(t)\xi, \quad x_r \leq x \leq x_{r+1}, \quad (2.4.1)$$

где

$$\xi = (x - x_r)/l_r$$

пробегает значения от 0 на левом конце элемента до 1 на правом. Уравнения (2.4.1) при  $r = 0, 1, \dots, n$  выражают смещение в каждой точке стержня через  $n + 2$ -обобщенные координаты  $(y_r)_0^{n+1}$ . При наложении граничных условий, как и прежде, остаются только  $n$  координат  $(y_r)_1^n$ .

Метод конечных элементов не дает возможности вывести уравнения движения на основе законов Ньютона, поскольку нет фактических «масс», к которым приложены силы. Вместо этого используются уравнения Лагранжа. Для консервативных систем с *кинетической энергией*  $T$  и *потенциальной энергией* (или *энергией деформации*)  $V$ , которая является функцией  $n$  координат  $(q_r)_1^n$ , уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4.2)$$

Здесь  $Q_r$  обозначает обобщенную силу, соответствующую координате  $q_r$  в том смысле, что работа, совершаемая внешними силами, действующими на систему при смещении из положения  $(q_r)_1^n$  в положение  $(q_r + \delta q_r)_1^n$ , равна

$$\delta W_e = \sum_{r=1}^n Q_r \delta q_r.$$

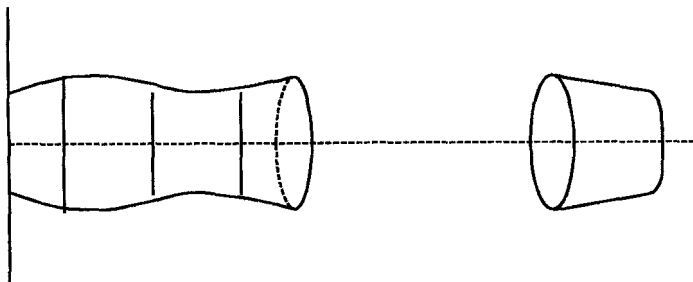


Рис. 2.4.1. Стержень, разделенный на части

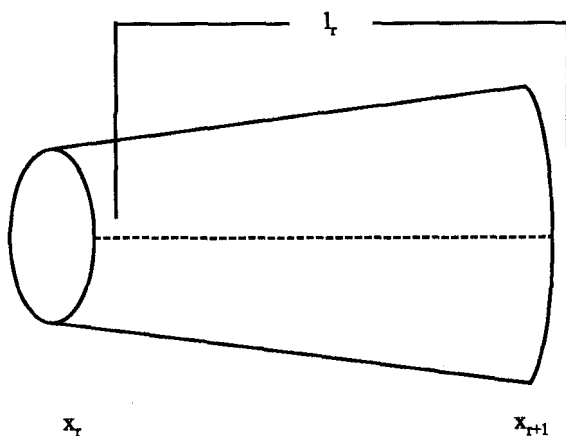


Рис. 2.4.2. Одна из частей стержня

Для системы, изображенной на рис. 2.2.1, кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n m_r \dot{y}_r^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n k_r (y_{r+1} - y_r)^2 \quad (2.4.3)$$

и  $Q_r = F_r(t)$ . Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_r} = m_r \dot{y}_r, \quad \frac{\partial V}{\partial y_r} = -k_r (y_{r+1} - y_r) + k_{r-1} (y_r - y_{r-1}),$$

и из уравнения (2.4.3) следует (2.2.1).

Для конечно-элементной модели, представленной на рис. 2.4.1, кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} S \rho [\dot{y}(x, t)]^2 dx,$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} S E \left[ \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx,$$

где  $S(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $E(x)$  обозначают (возможно, переменные) площадь поперечного сечения, плотность и модуль Юнга стержня соответственно. Подставляя сюда предполагаемую форму продольного смещения  $y(x, t)$  (2.4.1), получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^n \int_0^1 S(x_r + \ell_r \xi) \rho(x_r + \ell_r \xi) [\dot{y}_r(1 - \xi) + \dot{y}_{r+1} \xi]^2 \ell_r d\xi, \quad (2.4.4)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \int_0^1 S(x_r + \ell_r \xi) E(x_r + \ell_r \xi) [y_{r+1} - y_r]^2 \ell_r^{-1} d\xi. \quad (2.4.5)$$

Производя интегрирование (возможно, численное, если  $S(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $E(x)$  являются переменными величинами), находим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} m_{rs} \dot{y}_r \dot{y}_s, \quad (2.4.6)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} k_{rs} y_r y_s. \quad (2.4.7)$$

Если стержень зафиксирован с обоих концов, то

$$y_0 = 0 = y_{n+1}, \quad (2.4.8)$$

так что все переменные суммирования в (2.4.6), (2.4.7) пробегают значения от 1 до  $n$ . В этом случае

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_r} = \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{y}_s, \quad \frac{\partial V}{\partial y_r} = \sum_{s=1}^n k_{rs} y_s,$$

и из (2.4.2) вытекает следующее уравнение для свободных колебаний:

$$\sum_{s=1}^n m_{rs} \ddot{y}_s + \sum_{s=1}^n k_{rs} y_s = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Это уравнение, как и прежде, можно переписать в компактных матричных обозначениях

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.4.9)$$

Заметим, что для стержня с кинетической энергией (2.4.6) и потенциальной энергией (2.4.7) матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  симметричны, *трехдиагональны*, и знаки входящих в них элементов обладают определенными свойствами. Они трехдиагональны в силу того, что  $m_{rs}$ ,  $k_{rs}$  равны нулю, исключая случаи  $r = s$  и  $r = s \pm 1$ . Эти свойства могут быть получены из (2.4.4), (2.4.5): кодиагональные элементы  $m_{r,r+1}$ ,  $m_{r,r-1}$  матрицы  $\mathbf{M}$  положительны, тогда как элементы  $k_{r,r+1}$ ,  $k_{r,r-1}$  отрицательны. Таким образом,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-1} & \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_1 & -d_1 & & & \\ -d_1 & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -d_{n-1} \\ & & & -d_{n-1} & c_n \end{bmatrix}.$$

Как будет показано далее, эти свойства матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  играют важную роль в качественном анализе колебаний стержня.

Основываясь на этих примерах, перейдем к общему случаю. Для консервативной системы с обобщенными координатами  $(q_r)_1^n$ , которые определяют малые смещения из положения устойчивого равновесия, кинетическая и потенциальная энергии равны:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad (2.4.11)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} q_r q_s, \quad (2.4.12)$$

где матрицы  $\mathbf{M} = (m_{rs})$  и  $\mathbf{K} = (k_{rs})$  симметричны, поскольку

$$m_{sr} = m_{rs}, \quad k_{sr} = k_{rs}.$$

Уравнения, описывающие свободные колебания, имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.4.13)$$

Заметим, что уравнения (2.4.11), (2.4.12) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}, \\ V &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Произвольная симметричная матрица  $\mathbf{M}$  может являться матрицей инерции, поскольку кинетическая энергия  $T$  является существенно положительной величиной, т. е. она всегда положительна за исключением случая, когда каждая из обобщенных скоростей  $\dot{q}_r$  равна нулю, а следовательно, и сама энергия равна нулю. Таким образом,  $\mathbf{M}$  должна быть *положительно определенной* (см. раздел 1.4).

Ограничения на матрицу  $\mathbf{K}$  чуть менее жесткие, поскольку, несмотря на то что энергия деформации всегда неотрицательна, она равна нулю в случае, если система движется как целое. Например, энергия  $V$  (2.4.5) равна нулю, если  $\mathbf{u}$  отвечает смещению тела как целого:

$$u_0 = u_1 = \dots = u_n = u_{n+1}.$$

Для системы на рис. 2.2.1 такое смещение возможно, только если оба конца *свободны*. Отсюда заключаем, что если система не ограничена условием фиксации одной точки, то матрица  $\mathbf{K}$  *положительно полуопределена*.

## Упражнения 2.4

1. Используя уравнения (2.4.4), (2.4.5), найти матрицы инерции и жесткости для *однородного* продольно колеблющегося стержня, подчиненного граничным условиям (2.4.8).
2. Используя выражение (2.4.5) для энергии деформации стержня, показать, что матрица жесткости  $\mathbf{K}$  для стержня с зафиксированным





Для построения конечно-элементной модели мембраны рассмотрим энергии

$$T = \frac{1}{2} \int_D \int \rho \dot{u}^2 dx dy, \quad (2.5.3)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_D \int (\nabla u)^2 dx dy. \quad (2.5.4)$$

Простейшая конечно-элементная модель основана на триангуляции. Для произвольного треугольного элемента  $P_1, P_2, P_3$  возьмем

$$u(x, y) = a + bx + cy, \quad (2.5.5)$$

как показано на рис. 2.5.1.

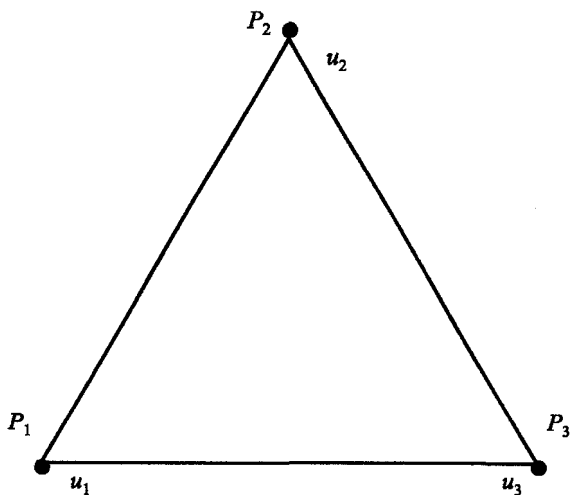


Рис. 2.5.1. Треугольный конечный элемент

Если  $u$  принимает значения  $u_1, u_2, u_3$  в вершинах  $P_1, P_2, P_3$  соответственно, тогда

$$u_i = a + bx_i + cy_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5.6)$$

Можно разрешить эти уравнения относительно  $a, b, c$  и, следовательно, выразить  $T, V$  для одного элемента, т.е.  $T_e, V_e$ , в виде квадратичных

форм

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{u}}_e, \quad (2.5.7)$$

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \quad (2.5.8)$$

с коэффициентами, являющимися функциями координат  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Нас не особо интересуют *величины* этих коэффициентов, большую роль играют их *знаки*.

В первую очередь рассмотрим элементы  $\mathbf{K}_e$ . Из уравнения (2.5.8) следует

$$\begin{aligned} b\Delta &= u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2); \\ c\Delta &= u_1(x_2 - x_3) + u_2(x_3 - x_1) + u_3(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \text{ площадь}(P_1 P_2 P_3).$$

Поскольку  $(\nabla u)^2 = b^2 + c^2$ , коэффициент, скажем, при  $u_1 u_2$  в  $V_e$  равен  $-\{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)\} / |\Delta| = -|P_1 P_3| \cdot |P_2 P_3| \cos \gamma / |\Delta|$ .

В рамках метода конечных элементов было показано, что компактные, т. е. остроугольные, треугольники дают более точный численный результат, чем вытянутые треугольники, имеющие тупой угол.

Если все углы треугольника *острые*, то  $k_{12,e}$  и  $k_{23,e}$ ,  $k_{31,e}$  *отрицательны*: элементы матрицы  $\mathbf{K}_e$  имеют следующие знаки:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{bmatrix}. \quad (2.5.9)$$

Для того чтобы найти знаки коэффициентов в  $T_e$ , удобно перейти в (2.5.7) к *поверхностным координатам*  $\phi_i(x, y)$  треугольника. Если  $P$  является произвольной точкой треугольника, тогда

$$u(x, y) = u_1 \phi_1(x, y) + u_2 \phi_2(x, y) + u_3 \phi_3(x, y),$$

где

$$\phi_1 = \frac{\text{площадь}(PP_2P_3)}{\text{площадь}(P_1P_2P_3)}, \quad \phi_2 = \frac{\text{площадь}(PP_3P_1)}{\text{площадь}(P_1P_2P_3)}, \quad \phi_3 = \frac{\text{площадь}(PP_1P_2)}{\text{площадь}(P_1P_2P_3)},$$

как показано на рис. 2.5.2.

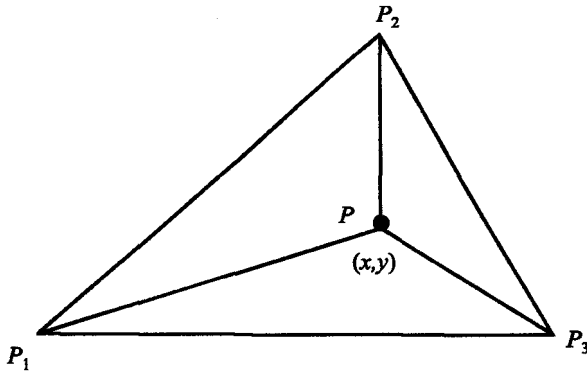


Рис. 2.5.2. Треугольник  $P_1P_2P_3$ , разделенный на три треугольника

Поскольку  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  положительны, когда  $P$  лежит внутри треугольника  $P_1P_2P_3$ , все коэффициенты в  $T_e$  положительны, следовательно,  $\mathbf{M}_e$  имеет следующую знаковую схему:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}. \quad (2.5.10)$$

Теперь сконструируем из матриц элементов глобальные матрицы инерции и жесткости. Мембрана заменяется объединением треугольников  $\Delta_i$  с вершинами  $P_i$  и сторонами  $P_iP_j$ , как показано на рис. 2.5.3. Граничное условие  $u = 0$  накладывается на внешние вершины, помеченные «0».

Для такой частной конфигурации матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  имеют следующие знаковые схемы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ & + & + & + \\ + & & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} + & - & - & - \\ - & + & - & - \\ & - & + & - \\ - & & + & - \\ - & - & - & + \\ - & - & - & + \end{bmatrix}. \quad (2.5.11)$$

Заметим, что если  $i \neq j$ , то  $m_{ij} > 0$ ,  $k_{ij} < 0$  тогда и только тогда, когда  $P_i, P_j$  являются концами граней  $P_iP_j$  сетки.

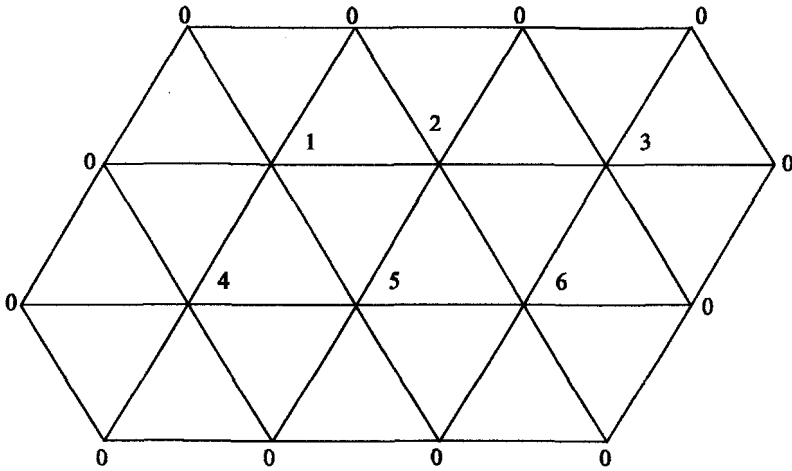


Рис. 2.5.3. Объединение треугольных элементов

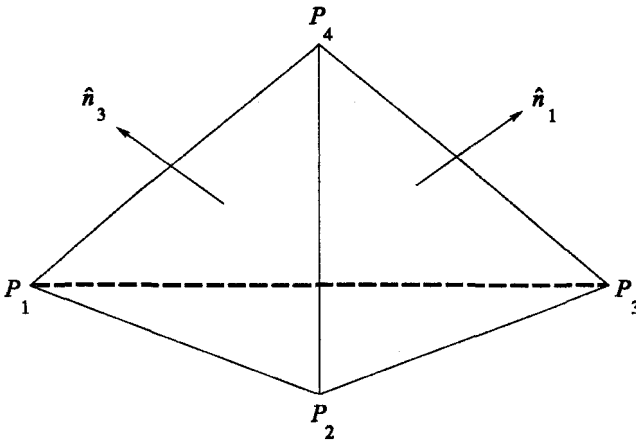


Рис. 2.5.4. Углы между внешними нормальными к сторонам являются тупыми

Конечно-элементный анализ трехмерных акустических резонаторов проводится аналогично. Ячейками сетки являются тетраэдры, а давление  $p(x, y, z)$  дается приближенно формулой

$$p(x, y, z) = a + bx + cy + dz \quad (2.5.12)$$

в каждом тетраэдре. Как было показано в работах Жу (Zhu) [342] и Глэдвела и Жу [131], если все углы между нормальными к граням *тупые* (см. рис. 2.5.4), то матрицы инерции и жесткости элементов имеют следующие знаковые схемы:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} + & - & - & - \\ - & + & - & - \\ - & - & + & - \\ - & - & - & + \end{bmatrix}. \quad (2.5.13)$$

Это означает, что когда матрицы собираются вместе, они сохраняют ту же структуру знаков, что и прежде: если  $i \neq j$ , то  $m_{ij} > 0$ ,  $k_{ij} < 0$  тогда и только тогда, когда  $P_i P_j$  является гранью сетки.

Из уравнений Лагранжа для энергий

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}, \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$$

следуют уравнения, описывающие колебания:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.5.14)$$

## 2.6. Собственные частоты и собственные колебания

Матричное уравнение (2.4.13) представляет собой набор дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Следуя общим методам, будем искать решение в виде

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.6.1)$$

где нужно определить константы  $x_r$ , частоту  $\omega$  и фазу  $\phi$ . Если  $\mathbf{q}$  имеет вид (2.6.1), то

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q} = -\omega^2 \mathbf{x} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.6.2)$$

так что из уравнения (2.4.13) следует

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \lambda = \omega^2. \quad (2.6.3)$$

Это уравнение на собственные значения (1.4.1), а поскольку  $\mathbf{M}$  положительно определена и  $\mathbf{K}$  положительно (полу-)определена, то к нему

в полной мере применим анализ, развитый в разделе 1.4. Как следствие, уравнение имеет  $n$  собственных значений  $(\lambda_i)_1^n$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots \leq \lambda_n, \quad (2.6.4)$$

и  $n$  соответствующих им собственных векторов  $(\mathbf{x}_i)_1^n$ , удовлетворяющих уравнению

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \quad (2.6.5)$$

Частоты  $\omega_i = (\lambda_i)^{\frac{1}{2}}$  называются *собственными* частотами системы, а собственные векторы называются *нормальными* или *собственными* колебаниями. Заметим, что  $x_i$  является скаляром, тогда как  $\mathbf{x}_i$  — вектором.

Для изучения свойств собственных частот и нормальных колебаний рассмотрим систему, описываемую уравнением (2.2.7), и для упрощения вычислений положим, что

$$(m_r)_1^n = m, \quad (k_r)_1^n = k. \quad (2.6.6)$$

В этом случае уравнение на собственные значения имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & \dots & & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.6.7)$$

где

$$\lambda = m\omega^2/k. \quad (2.6.8)$$

Чтобы отсюда найти  $x_r$ , воспользуемся упражнением 1.4.4, а именно перепишем (2.6.7) в виде *рекуррентного соотношения*

$$-x_{r-1} + (2 - \lambda)x_r - x_{r+1} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (2.6.9)$$

Первое из уравнений (2.6.7) можно представить в такой форме, если  $x_0$  равно нулю; это может быть проинтерпретировано, как фиксация массы на левом конце ( $m_0$ ). С другой стороны, последнее из уравнений (2.6.7) можно переписать в форме (2.6.9), если предполагается, что  $x_{n+1} = x_n$ . Таким образом, граничные условия для рекуррентного соотношения (2.6.9) имеют вид

$$x_0 = 0 = x_{n+1} - x_n. \quad (2.6.10)$$

Общее решение (2.6.9) дается следующей формулой:

$$x_r = A \cos r\theta + B \sin r\theta, \quad (2.6.11)$$

при подстановке которой в (2.6.9) получаем, что  $\theta$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \cos(r-1)\theta + \cos(r+1)\theta &= 2 \cos \theta \cos r\theta = (2-\lambda) \cos r\theta, \\ \sin(r-1)\theta + \sin(r+1)\theta &= 2 \cos \theta \sin r\theta = (2-\lambda) \sin r\theta, \end{aligned}$$

т. е.

$$2 \cos \theta = 2 - \lambda.$$

Граничные условия будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$A = 0 = \sin(n+1)\theta - \sin n\theta = 2 \cos[(n+1/2)\theta] \sin \theta/2,$$

следовательно, возможные значения  $\theta$  пробегают множество

$$\theta = \theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

при этом соответствующие им значения  $\lambda$  равны

$$\lambda_i = 2 - 2 \cos \theta_i = 4 \sin^2 \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} \right]. \quad (2.6.12)$$

Таким образом, амплитуда смещения  $r$ -ой массы для  $i$ -ого колебания имеет вид

$$x_r = \sin r\theta_i = \sin \left[ \frac{(2i-1)r\pi}{(2n+1)} \right]. \quad (2.6.13)$$

Колебания в случае  $n = 4$ , показанные на рис. 2.6.1, демонстрируют свойства, которыми обладают все собственные векторы *трехдиагональной* матрицы (как в уравнении (2.6.7)).

Доказательство того, что данный класс дискретных моделей применим в случае непрерывной балки, и оценку ошибки дискретизации для частоты и формы колебаний можно найти, например, в работе Давини (Davini) [74].

- (а)  $i$ -ая волна пересекает ось  $(i-1)$  раз — нули на концах во внимание не принимаются;

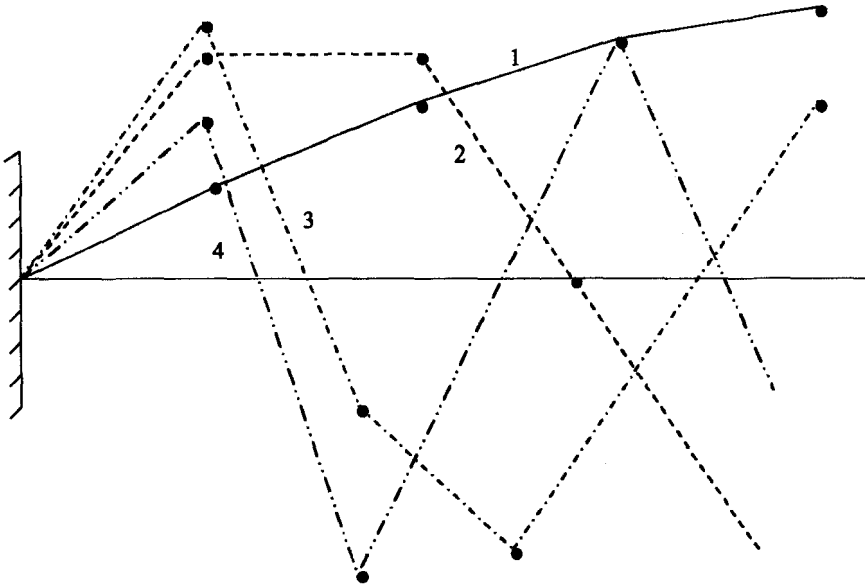


Рис. 2.6.1. Колебания системы масс, соединенных пружинами, при  $n = 4$

(б) узлы (точки, где волна пересекает ось)  $i$ -ой волны чередуются с узлами соседних ( $(i - 1)$ -ой и  $(i + 1)$ -ой) волн.

Если правый конец системы закреплен, то анализ остается прежним за исключением того, что граничное условие принимает вид

$$x_0 = 0 = x_n. \quad (2.6.14)$$

В этом случае  $\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\sin n\theta = 0,$$

следовательно,

$$\theta = \phi_i = \frac{i\pi}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

и соответствующие собственные значения, обозначаемые  $(\lambda_i^0)_1^{n-1}$ , равны

$$\lambda_i^0 = 4 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right). \quad (2.6.15)$$



Для  $i$ -ой волны  $r$ -ая амплитуда смещения имеет вид

$$y_r = \sin(r\phi_i) = \sin\left[\frac{r i \pi}{n}\right]. \quad (2.6.16)$$

Как будет показано, два набора собственных значений  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\lambda_i^0)_1^{n-1}$  связаны, что является общим свойством задач данного типа (см. уравнение (2.9.10)), а именно:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_1^0 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_{n-1}^0 < \lambda_n. \quad (2.6.17)$$

### Упражнения 2.6

- 1) Рассмотрим систему на рис. 2.3.1 в случае, когда  $(m_i)_{-1}^n = m$ ,  $(k_i)_1^n = k$ ,  $(\ell_i)_0^n = \ell$ . Показать, что рекуррентное соотношение, связывающее  $(u_r)_0^{n+2}$ , может быть записано как

$$u_{r-2} - 4u_{r-1} + (6 - \lambda)u_r - 4u_{r+1} + u_{r+2} = 0$$

где  $\lambda = m\omega^2\ell^2/k$ . Найти собственные частоты и собственные колебания системы. Решение ищется в виде

$$u_r = A \cos r\theta + B \sin r\theta + C \cosh r\phi + D \sinh r\phi,$$

$\theta, \phi$  определяются из граничных условий  $u_{-1} = 0 = u_0 = u_{n-1} = u_n$ . Более пригодное с физической точки зрения дискретное приближение балки детально рассмотрено в работах Глэдвела [103] и Линдберга (Lindberg) [215].

## 2.7. Главные координаты и динамические характеристики

Из теоремы 1.4.5 следует, что векторы  $(\mathbf{x}_i)_1^n$  образуют  $n$ -мерное векторное пространство, так что любой вектор  $\mathbf{q}(t)$  может быть разложен по базису

$$\mathbf{q}(t) = p_1 \mathbf{x}_1 + p_2 \mathbf{x}_2 + \dots + p_n \mathbf{x}_n. \quad (2.7.1)$$

Это разложение в матричных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{Xp}, \quad (2.7.2)$$

где  $\mathbf{X}$  — матрица размера  $n \times n$  со столбцами  $\mathbf{x}_i$ , т. е.,  $\mathbf{x}_i = \{x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}\}$ . Координаты  $p_1, p_2, \dots, p_n$  называются *главными координатами* и в общем случае являются функциями от  $t$ . Они указывают степень вклада различных собственных векторов  $\mathbf{x}_i$  в вектор  $\mathbf{q}$ . Энергии  $T, V$  принимают весьма простые формы, когда  $\mathbf{q}$  выражается через главные координаты. Дифференцируя по времени уравнение (2.7.2), получаем

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}\dot{\mathbf{p}}, \quad (2.7.3)$$

откуда следует

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{X}\dot{\mathbf{p}})^T \mathbf{M}(\mathbf{X}\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.7.4)$$

Но элемент  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца матрицы  $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}$  просто имеет вид  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j$ , и в соответствии с (1.4.12) это выражение равно нулю, если  $i \neq j$ , или же  $a_i$ , если  $i = j$ . Таким образом,

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.7.5)$$

откуда следует

$$T = \frac{1}{2}\{a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + \dots + a_n p_n^2\}. \quad (2.7.6)$$

Аналогично

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}) \mathbf{p} \quad (2.7.7)$$

и

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \text{diag}(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \dots, \lambda_n a_n), \quad (2.7.8)$$

откуда следует

$$V = \frac{1}{2}\{\lambda_1 a_1 p_1^2 + \lambda_2 a_2 p_2^2 + \dots + \lambda_n a_n p_n^2\}. \quad (2.7.9)$$

Из уравнений (2.7.6), (2.7.9) вытекает, что нахождение собственных значений и собственных векторов пары симметричных матриц ( $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ ) эквивалентно нахождению координатного преобразования  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ , которое приводит квадратичные формы  $\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$  к диагональному виду одновременно.

Теперь используем главные координаты для получения отклика системы на синусоидальные возмущения. Из уравнений (2.4.2), (2.4.14)

следует, что уравнение, описывающее отклик на воздействие обобщенных сил  $(Q_r)_1^n$ , имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (2.7.10)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Если силы имеют частоту  $\omega$  и находятся в фазе, то  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{q}$  можно записать как

$$\mathbf{Q} = \Phi \sin(\omega t + \phi), \quad \mathbf{q} = \mathbf{x} \sin(\omega t + \phi). \quad (2.7.11)$$

В этом случае для уравнений (2.6.1)–(2.6.2) имеем

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{x} = \Phi. \quad (2.7.12)$$

Чтобы решить это уравнение, разложим  $\mathbf{x}$  по собственным векторам  $\mathbf{x}_i$  так, что

$$\mathbf{x} = \pi_1 \mathbf{x}_1 + \pi_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \pi_n \mathbf{x}_n = \mathbf{X}\pi, \quad (2.7.13)$$

где коэффициенты  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  являются амплитудами главных координат  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Подставляя (2.7.13) в (2.7.12) и умножая результат на  $\mathbf{X}^T$ , получаем

$$\mathbf{X}^T(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{X}\pi = \mathbf{X}^T\Phi = \Xi. \quad (2.7.14)$$

Но теперь матрица коэффициентов набора из  $N$  уравнений для неизвестных амплитуд  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  *диагональна*, а  $i$ -ое уравнение имеет вид

$$(\lambda_i - \lambda)a_i \pi_i = \Xi_i,$$

откуда следует

$$\pi_i = \frac{\Xi_i}{a_i(\lambda_i - \lambda)}. \quad (2.7.15)$$

Чтобы понять этот результат, рассмотрим отклик на воздействие одной обобщенной силы  $Q_r$ . В этом случае

$$\mathbf{Q} \equiv \Phi = \{0, 0, \dots, \Phi_r, 0, \dots, 0\}, \quad \Xi = \Phi_r \{x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn}\},$$

$$\pi_i = \frac{\Phi_r x_{ri}}{a_i(\lambda_i - \lambda)},$$

и  $s$ -ая амплитуда смещения имеет вид

$$x_s = \sum_{i=1}^n \pi_i x_{si} = \alpha_{rs} \Phi_r, \quad (2.7.16)$$

где

$$\alpha_{rs} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{ri}x_{si}}{a_i(\lambda_i - \lambda)}. \quad (2.7.17)$$

Величина  $\alpha_{rs}$  называется матрицей *откликов* Бишоп–Джонсона (см. Бишоп и Джонсон [34]) и дает амплитуду отклика  $q_s$  при воздействии обобщенной силы  $Q_r$  единичной амплитуды. Свойство симметричности матрицы откликов

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr} \quad (2.7.18)$$

является следствием обратной теоремы, справедливой для вынужденных гармонических колебаний.

### Упражнения 2.7

- 1) Используя свойство ортогональности  $(\mathbf{x}_i)_1^n$  по отношению к матрице инерции, показать, что

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q} = p_i a_i.$$

## 2.8. Принцип Рэлея

Рассмотрим консервативную систему с обобщенными координатами  $(q_r)_1^n$ , изменяющимися по гармоническому закону (2.6.1). Ее кинетическая и потенциальная энергии равны

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \omega^2 \cos^2 \omega t T_0,$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \sin^2 \omega t V_0,$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad V_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (2.8.1)$$

В силу консервативности системы

$$T + V = \text{const},$$

откуда получаем

$$\omega^2 \cos^2 \omega t T_0 + (1 - \cos^2 \omega t) V_0 = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\omega^2 T_0 = V_0.$$

Перепишем это следующим образом:

$$\lambda = \frac{V_0}{T_0} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}.$$

Если система совершает свободные колебания с частотой  $\omega$ , тогда  $\omega$  должна быть одной из собственных частот, которой соответствует собственный вектор  $\mathbf{x}$ . Если  $\omega = \omega_i$ , то  $\lambda = \lambda_i$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$  и

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i}, \quad (2.8.2)$$

что согласуется с уравнением (1.4.5).

Принцип Рэля гласит, что *стационарным точкам отношения Рэля*

$$\lambda_R = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}, \quad (2.8.3)$$

*рассматриваемого в качестве функции от компонент  $(x_r)_1^n$ , соответствуют собственные векторы  $\mathbf{x}_i$ . Соответствующие стационарные значения  $\lambda_R$  равны  $\lambda_i$ .*

**Доказательство.** Принцип Рэля имеет долгую историю — см., например, Тэмпл (Temple) и Бикли (Bickley) [322] или Вашизу (Washizu) [330]. Мы представим несколько доказательств ввиду поучительности каждого из них. Сначала рассмотрим  $\lambda_R$  как отношение  $V_0$  к  $T_0$  и возьмем от него частную производную по  $x_r$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial x_r} &= m_{r1}x_1 + m_{r2}x_2 + \cdots + m_{rn}x_n, \\ \frac{\partial V_0}{\partial x_r} &= k_{r1}x_1 + k_{r2}x_2 + \cdots + k_{rn}x_n \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_r} \left( \frac{V_0}{T_0} \right) = \frac{1}{T_0} \frac{\partial V_0}{\partial x_r} - \frac{V_0}{T_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial x_r} = \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x_r} - \lambda_R \frac{\partial T_0}{\partial x_r} \right\},$$

таким образом, подставляя сюда выражения для  $\partial V_0 / \partial x_r$  и  $\partial T_0 / \partial x_r$ , получаем  $r$ -ую строку матричного уравнения (2.6.3) с  $\lambda_R$  вместо  $\lambda$ . Полный набор  $n$  уравнений, из которого следует стационарность  $V_0 / T_0$  по

отношению к  $(x_r)_1^n$ , представляет собой матричное уравнение (2.6.3), решениями которого являются собственные векторы  $\mathbf{x}_i$  и соответствующие им собственные значения  $\lambda_i$ .

Выразим теперь энергии в терминах главных координат. Если

$$p_i = \pi_i \sin(\omega t + \phi),$$

то из уравнений (2.7.6), (2.7.9) следует, что

$$T_0 = \frac{1}{2} \{a_1 \pi_1^2 + a_2 \pi_2^2 + \dots + a_n \pi_n^2\},$$

$$V_0 = \frac{1}{2} \{\lambda_1 a_1 \pi_1^2 + \lambda_2 a_2 \pi_2^2 + \dots + \lambda_n a_n \pi_n^2\}.$$

Поскольку предполагается, что  $\mathbf{M}$  положительно определена, без потери общности можно положить  $a_i = 1$ , тогда

$$\lambda_R = \frac{\lambda_1 \pi_1^2 + \lambda_2 \pi_2^2 + \dots + \lambda_n \pi_n^2}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2}, \quad (2.8.4)$$

откуда, в частности, следует

$$\lambda_R - \lambda_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\pi_2^2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1)\pi_n^2}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2}. \quad (2.8.5)$$

Поскольку последовательность  $\lambda_i$  возрастает (не убывает), величины  $\lambda_i - \lambda_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , неотрицательны, таким образом,

$$\lambda_R \geq \lambda_1.$$

Если  $\lambda_1$  строго меньше, чем  $\lambda_2$ , тогда равенство достигается лишь при  $\pi_2 = 0 = \dots = \pi_n$ , т.е. когда система совершает чистое колебание, содержащее только первую главную волну. Уравнение (2.8.5) описывает важное свойство: какие бы ни были  $(x_r)_1^n$ , значение отношения Рэлея будет больше, чем  $\lambda_1$ , и (когда  $\lambda_1 < \lambda_2$ ) будет равно  $\lambda_1$ , если только отношения  $x_1 : x_2 : \dots : x_n$  соответствуют отношениям компонент первого собственного вектора  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ . Из уравнения (2.8.5) следует, что  $\lambda_1$  реализует *глобальный минимум*  $\lambda_R$ , кроме того, тем же самым способом можно показать, что

$$\lambda_R \leq \lambda_n, \quad (2.8.6)$$

таким образом,  $\lambda_n$  реализует *глобальный максимум*  $\lambda_R$ .

Если  $\lambda_i$  является промежуточным собственным значением, т. е.  $\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$ , тогда

$$\lambda_R - \lambda_i = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_i - \lambda_j) \pi_j^2 + \sum_{j=i+1}^n (\lambda_j - \lambda_i) \pi_j^2}{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_n^2}. \quad (2.8.7)$$

В этом случае  $\lambda_R$  не будет ни строго меньше, ни строго больше, чем  $\lambda_i$  для вариаций  $\pi_j$ ;  $\lambda_R$  имеет седловую точку в  $i$ -ой волне ( $\pi_j = 0$ ,  $j \neq i$ ). Однако для вычислительных целей важно, чтобы разность между  $\lambda_R$  и  $\lambda_i$  зависела от **квадратов** величин  $\pi_j$ . Это означает, что если  $\mathbf{x}$  практически совпадает с  $i$ -ой волной так, что  $\pi_j$  при  $j \neq i$  много меньше, чем  $\pi_i$ , т. е.  $\pi_i \approx 1$ ,  $\pi_j = O(\varepsilon)$ , тогда  $\lambda_R - \lambda_i = O(\varepsilon^2)$ .

Поскольку  $\mathbf{M}$  положительно определена,  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$  и задача нахождения стационарных значений отношения Рэля  $\lambda_R$ , заданного уравнением (2.8.3), эквивалентна нахождению стационарных значений квадратичной формы  $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  при условии  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 1$ . Это в свою очередь эквивалентно нахождению стационарных значений выражения

$$F \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (2.8.8)$$

при условии  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 1$ . Здесь  $\lambda$  выступает лагранжевым множителем. Заметим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_r} = 2 \sum_{s=1}^n k_{rs} x_s - 2\lambda \sum_{s=1}^n m_{rs} x_s,$$

таким образом, из набора уравнений  $\partial F / \partial x_r = 0$  следует уравнение (2.6.3), а именно:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{x} = 0.$$

■

## 2.9. Колебания при наличии связей

Представление о колебании системы с наложенными на нее связями играет важную роль для решения обратных задач. Пусть система задается обобщенными координатами  $(q_r)_1^n$ , на которые наложена связь

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0.$$

Для малых колебаний около положения  $q_1 = 0 = \dots = q_n$  это соотношение можно заменить на

$$\mathbf{q}^T \mathbf{d} = d_1 q_1 + d_2 q_2 + \dots + d_n q_n = 0,$$

где

$$d_r = \left. \frac{\partial f}{\partial q_r} (q_1, q_2, \dots, q_n) \right|_{q_1=0=q_2=\dots=q_n}.$$

Два наиболее важных ограничения соответствуют случаям, когда  $q_r$  равно нулю или  $q_r = q_s$  для некоторых  $r$  и  $s$ . Теперь предположим, что система совершает колебания с частотой  $\omega$ , причем  $\omega^2 = \lambda$  и

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} \sin \omega t.$$

Принцип Рэля гласит, что квадраты собственных частот являются стационарными значениями функционала  $F$ , заданного уравнением (2.8.8), при дополнительном условии

$$\mathbf{x}^T \mathbf{d} = 0. \quad (2.9.1)$$

Таким образом, необходимо найти стационарные значения функционала

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} - 2\nu \mathbf{x}^T \mathbf{d}, \quad (2.9.2)$$

где  $\nu$  является еще одним лагранжевым множителем (двойка перед ним введена исключительно для удобства). Из уравнения  $\partial F / \partial x_r = 0$  вытекает

$$\mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} - \nu \mathbf{d} = 0. \quad (2.9.3)$$

Сравнивая его с (2.7.12), видим, что  $\nu \mathbf{d}$  является обобщенной силой — именно такая сила обуславливается связью (2.9.1).

Для анализа уравнения (2.9.3) выразим  $\mathbf{x}$  в терминах главных координат, используя (2.7.13). Тогда

$$\mathbf{K} \mathbf{X} \boldsymbol{\pi} - \lambda \mathbf{M} \mathbf{X} \boldsymbol{\pi} - \nu \mathbf{d} = 0. \quad (2.9.4)$$

Умножим уравнение на  $\mathbf{X}^T$  и воспользуемся уравнениями (2.7.5) и (2.7.8), отражающими факт диагональности матриц  $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$ . В результате для  $r$ -ой строки полученного уравнения имеем

$$\lambda_r a_r \pi_r - \lambda a_r \pi_r - \nu b_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9.5)$$



где

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{d}. \quad (2.9.6)$$

Из уравнений (2.9.5) следует

$$\pi_r = \frac{\nu b_r}{a_r(\lambda_r - \lambda)}. \quad (2.9.7)$$

Подставляя это в уравнение связи (2.9.1), т. е.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{d} \equiv \pi^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} \equiv \pi^T \mathbf{b} = 0, \quad (2.9.8)$$

получаем частотное уравнение

$$B(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i(\lambda_i - \lambda)} = 0. \quad (2.9.9)$$

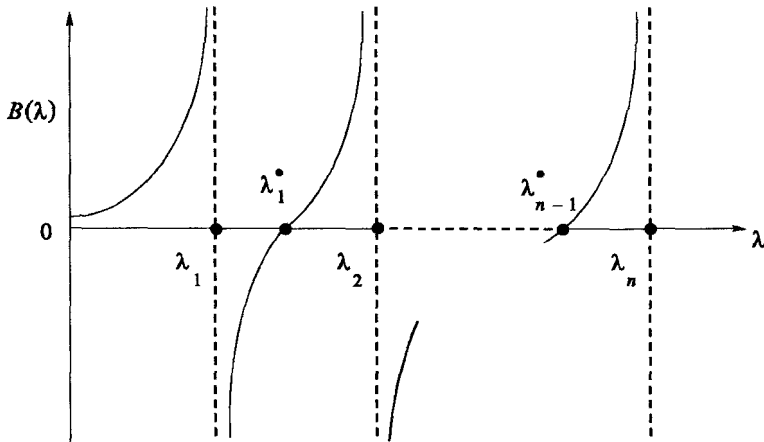


Рис. 2.9.1. Собственные значения системы со связью чередуются с собственными значениями свободной системы

Отсюда вытекают важные следствия. Рассмотрим сначала случай, когда ни одно из  $b_i$  не равно нулю. Коэффициенты  $(b_i^2/a_i)_1^n$  положительны, и график  $B(\lambda)$  от  $\lambda$  имеет вид, приведенный на рис. 2.9.1. Поскольку  $B(\lambda_i + 0)$  много меньше нуля,  $B(\lambda_{i+1} - 0)$  много больше нуля, и  $B(\lambda)$

монотонно возрастает на участке от  $\lambda_i$  до  $\lambda_{i+1}$ ,  $B(\lambda)$  имеет ровно  $n - 1$  нулей  $(\lambda'_i)_i^{n-1}$ , которые чередуются с  $\lambda_i$ , т. е.

$$\lambda_i < \lambda'_i < \lambda_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (2.9.10)$$

Это неравенство имеет следующий смысл: *при наложении на систему линейной связи каждая собственная частота увеличивается (или, более точно, не уменьшается), но при этом не превосходит по значению следующую по порядку собственную частоту свободной системы.*

Если все  $b_i$  не равны нулю, тогда неравенства (2.9.10) выполняются строго. Теперь, однако, предположим, что одно из  $b_i$  равно нулю: например, рассмотрим ограничение

$$\pi_1 = 0, \quad (2.9.11)$$

при котором  $(b_i)_2^n = 0$ . В этом случае  $(\pi_i)_2^n$  являются главными координатами системы, а соответствующие им собственные значения равны

$$\lambda'_i = \lambda_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (2.9.12)$$

Если связь задается условием

$$\pi_j = 0, \quad 1 < j \leq n,$$

то главными координатами являются  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n$ , при этом

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, j - 1; \quad \lambda'_i = \lambda_{i+1}, \quad i = j, j + 1, \dots, n - 1.$$

Если связь задается уравнением (2.9.8) и одно из  $b_j$  равно нулю, то из уравнения (2.9.5) вытекает, что

$$\pi_i = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

является решением, соответствующим  $\lambda = \lambda_j$ . Это означает, что связь (2.9.8) при  $b_j = 0$  не влияет на  $j$ -ю главную волну. На рис. 2.9.2 приведена зависимость  $B(\lambda)$  при  $b_2 = 0$ . График может (а) переходить в область слева от  $\lambda_2$ , и в этом случае  $\lambda'_{1a} < \lambda_2$ ,  $\lambda'_{2a} = \lambda_2$ , или (б) переходить в область справа, и тогда  $\lambda'_{1b} = \lambda_2$ ,  $\lambda'_{2b} > \lambda_2$ .

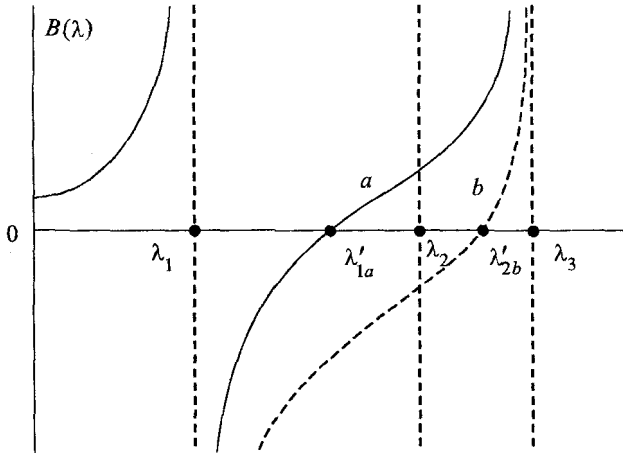


Рис. 2.9.2. График зависимости  $B(\lambda)$  при  $b_2 = 0$ : или (а)  $\lambda'_1 < \lambda_2, \lambda'_2 = \lambda_2$ , или (б)  $\lambda'_1 = \lambda_2, \lambda'_2 > \lambda_2$

Если наложены две связи, то ограниченная система имеет  $n - 2$  собственных значения  $(\lambda''_i)_1^{n-2}$ , удовлетворяющих неравенству

$$\lambda'_i \leq \lambda''_i \leq \lambda'_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2),$$

где  $\lambda'_i$  представляют собой собственные значения системы при наложении одной из связей. Таким образом,

$$\lambda_i \leq \lambda'_i \leq \lambda''_i \leq \lambda'_{i+1} \leq \lambda_{i+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2)$$

или

$$\lambda_i \leq \lambda''_i \leq \lambda_{i+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 2). \quad (2.9.13)$$

## 2.10. Итерационные и независимые определения собственных значений

В этом разделе мы рассмотрим подробнее собственные значения (2.6.3), используя отношение Рэлея

$$\lambda_R = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}. \quad (2.10.1)$$

Пусть  $\mathbf{K}$  симметрична (положительная полуопределенность не столь важна), а  $\mathbf{M}$  положительно определена. Важность таких предположений заключается в том, что знаменатель (2.10.1) больше нуля при любых  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Заметим, что  $\lambda_R$  является однородной функцией от  $\mathbf{x}$

$$\lambda_R(c\mathbf{x}) = \lambda_R(\mathbf{x}), \quad c \neq 0.$$

Это означает, что всегда можно растянуть  $\mathbf{x}$  так, что знаменатель (2.10.1) будет равен **единице**, т. е.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = 1. \quad (2.10.2)$$

Векторы  $\mathbf{x}$ , обладающие этим свойством, образуют замкнутое ограниченное подпространство  $D_1 \subset V_n$ . Теперь рассмотрим отношение Рэля в  $D_1$

$$\lambda_R = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (2.10.3)$$

Это непрерывная функция переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в замкнутой ограниченной области  $D_1$ , а значит, по *теореме Вейерштрасса* для непрерывных функций, она достигает своего минимального значения в  $D_1$ , т. е. для некоторого вектора  $\mathbf{x} \in D_1$ . (Напомним определение замкнутого множества  $S$ : если  $\{y_i\}$  является сходящейся последовательностью в  $S$ , тогда ее предел  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$  также принадлежит  $S$ .) Всегда найдется по меньшей мере один такой минимизирующий вектор, который обозначим  $\mathbf{x}_1$ . Соответствующее минимальное значение  $\lambda_R$  обозначим  $\lambda_1$ . В результате имеем

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in D_1} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1^T \mathbf{K} \mathbf{x}_1. \quad (2.10.4)$$

После того как найдены  $\mathbf{x}_1$  и  $\lambda_1$ , возникает новая задача минимизации: нахождение минимума  $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  в подпространстве  $D_2$  пространства  $D_1$ , натянутом на векторы  $\mathbf{x}$ , ортогональные  $\mathbf{x}_1$ , т. е.  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющие уравнению  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 = 0$ . Это подпространство снова замкнуто и ограничено, следовательно, по теореме Вейерштрасса найдется вектор  $\mathbf{x}_2 \in D_2$ , минимизирующий  $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  в  $D_2$ ; минимальное значение обозначим  $\lambda_2$ . Таким образом,

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{x} \in D_2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}_2^T \mathbf{K} \mathbf{x}_2, \quad (2.10.5)$$

и  $\mathbf{x}_2^T \mathbf{M} \mathbf{x}_2 = 1$ ,  $\mathbf{x}_2^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 = 0$ . Поскольку  $\lambda_2$  является минимумом  $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  в  $D_2$ , являющимся подпространством в  $D_1$ ,  $\lambda_2$  не может быть меньше, чем  $\lambda_1$ , т. е.  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ .

Продолжая процедуру, получаем набор векторов  $\mathbf{x}_i$  и чисел  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) такой, что

$$\lambda_i = \min_{\mathbf{x} \in D_i} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_i, \quad (2.10.6)$$

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.10.7)$$

и  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Суть этого **итерационного** метода заключается в том, что невозможно сформулировать задачу минимизации, дающую  $\lambda_2$ , прежде чем найден  $\mathbf{x}_1$ , или, обобщая, невозможно сформулировать задачу минимизации, дающую  $\lambda_i$ , прежде чем найдены  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ . Существует альтернативный метод нахождения любых  $\lambda_i, \mathbf{x}_i$ , не зная предварительно  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ . Он называется *независимым* методом или методом *минимакса*.

Используя независимый метод, начинаем как и прежде:

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in D_1} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1^T \mathbf{K} \mathbf{x}_1.$$

Теперь вернемся к материалу раздела 2.9, связанному с колебаниями при наличии связей. Из неравенства (2.9.10) следует, что если ни одно из  $(b_i)_1^n$  не равно нулю, то первое собственное значение при наличии связи,  $\lambda_1^*$ , строго меньше, чем  $\lambda_2$ . Из уравнений (2.9.11), (2.9.12) вытекает, что если ограничение имеет вид  $\pi_1 = 0$ , то  $\lambda_1^* = \lambda_2$ . Величина  $\pi_1$  соответствует вкладу компоненты  $\mathbf{x}_1$  в  $\mathbf{x}$ . Умножая уравнение (2.7.13) слева на  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{K}$ , получаем

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \pi_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 = \pi_1. \quad (2.10.8)$$

Таким образом, условие  $\pi_1 = 0$  означает, что  $\mathbf{x}$  ортогонален  $\mathbf{x}_1$  относительно матрицы  $\mathbf{M}$ : именно это ограничение дает **максимальное** значение  $\lambda_1^*$ , т. е.  $\lambda_2$ .

Таким образом,

$$\max_{\mathbf{d}} \min_{\substack{\mathbf{x} \in D_1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{d}}} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda_2, \quad (2.10.9)$$

где  $\mathbf{x} \perp \mathbf{d}$  означает  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{d} = 0$ ;  $\mathbf{d}$ , максимизирующий минимум, равен  $\mathbf{x}_1$ .

Теперь, используя (2.9.13), можно распространить этот анализ на высшие собственные значения. Имеем

$$\max_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2} \min_{\substack{\mathbf{x} \in D_1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2}} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda_3$$

или, в общем случае,

$$\max_{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_i} \min_{\substack{\mathbf{x} \in D_1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_i}} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda_{i+1}. \quad (2.10.10)$$

Здесь  $\mathbf{d}_i$ , максимизирующие минимум, в общем случае равны  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{d}_2 = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{x}_{n-1}$ .

Вероятно, первое определение собственных значений методом минимакса появилось в работе Фишера (Fischer) [88]. Итерационные и независимые определения собственных значений подробно обсуждаются в книге Куранта (Courant) и Гильберта (Hilbert) (1953) [64], более специальные вопросы освещены в книге Гаулда (Gould) (1966) [151]. Мотивацией для написания последней книги стал поиск *нижней* границы для собственных значений, тогда как с помощью методов дискретизации, таких как метод конечных элементов, почти всегда находят *верхние* границы.

### Упражнения 2.10

- 1) Проверить рассуждения, приведенные в разделах 2.9, 2.10, в случае двух совпадающих собственных значений, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ .
- 2) Используя метод минимакса, показать, что если жесткость системы возрастает, т. е. матрица жесткости  $\mathbf{K}$  заменяется на  $\mathbf{K}'$  и  $\mathbf{x}^T \mathbf{K}' \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$  при любых  $\mathbf{x} \in V_n$ , то ни одно из собственных значений системы не уменьшается. Почему, используя итерационное определение, можно доказать это утверждение только для  $\lambda_1$ ?

---

---

## ГЛАВА 3

# Матрицы Якоби

Пусть я не сказал ничего нового, зато мой взгляд на мир отличается новизной.

Блез Паскаль. «Мысли», 22

### 3.1. Последовательности Штурма

В этой главе будут изучены свойства собственных значений и собственных векторов системы со специальными *трехдиагональными* матрицами инерции и жесткости, введенными в главе 2. Начнем с рассмотрения системы, аналогичной приведенной на рис. 2.2.1, у которой матрица инерции диагональна, а матрица жесткости трехдиагональна, с отрицательными элементами на кодиагоналях. В конце раздела будет показано, что многие из полученных результатов могут быть обобщены на системы вида (2.4.10), у которых матрица инерции трехдиагональна с положительными элементами на кодиагоналях. Самым важным свойством собственных значений таких систем является их простота, т. е. все собственные значения различны (теорема 3.1.3). Таким образом,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n.$$

Пусть  $\mathbf{x}_r$  —  $r$ -ый собственный вектор, тогда при увеличении  $r$  собственные векторы осциллируют все сильнее (теорема 3.3.1) так, что нули  $\mathbf{x}_r$  чередуются с нулями соседних собственных векторов  $\mathbf{x}_{r-1}$  и  $\mathbf{x}_{r+1}$  (3.3.4). Теперь установим эти и некоторые другие результаты. В ближайших главах будет воспроизведен анализ, впервые проделанный в книге Гантмахера и Крейна [98].

Начнем с определений.

**Определение 3.1.1.** *Матрицей Якоби называется положительно полуопределенная симметричная трехдиагональная матрица с (строго) отрицательными кодиагоналями.*

Заметим, что различные авторы определяют якобиеву матрицу по-разному: иногда кодиагонали выбираются строго положительными.

Теперь рассмотрим уравнение

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.1.1)$$

где  $\mathbf{K}$  — якобиева матрица. Сначала положим, что  $\mathbf{M}$  является (строго) положительной диагональной матрицей, как в (2.2.7), и приведем (3.1.1) к стандартному виду.

Пусть

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

и  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$ , где

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_i = m_i^{\frac{1}{2}}.$$

Введем вектор  $\mathbf{u}$ , связанный с  $\mathbf{x}$  условием

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{u},$$

и, умножая (3.1.1) слева на  $\mathbf{D}^{-1}$ , получаем

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{D}^2)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

т. е.

$$(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.1.2)$$

где

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}. \quad (3.1.3)$$

Матрица  $\mathbf{J}$ , как и  $\mathbf{K}$ , якобиева, обладает теми же собственными значениями, что и система (3.1.1), и имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & \ddots & -b_{n-1} \\ & & & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Теперь перейдем к изучению *главных миноров* (см. (1.4.6)) матрицы  $\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$ . Пусть

$$P_0 = 1, \quad P_1(\lambda) = a_1 - \lambda, \quad P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -b_1 \\ -b_1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} \text{ и т. д.} \quad (3.1.5)$$



Тогда в общем случае имеем

$$P_n(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}). \quad (3.1.6)$$

Миноры удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$P_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda)P_r(\lambda) - b_r^2 P_{r-1}(\lambda), \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.1.7)$$

которое позволяет вычислить последовательно  $P_2, P_3, \dots, P_n$ , зная  $P_0, P_1$ . Нули любого  $P_r(\lambda)$  действительны, поскольку они являются собственными значениями усеченной симметричной матрицы, состоящей из первых  $r$  строк и столбцов  $\mathbf{J}$ .

Теперь докажем теорему.

**Теорема 3.1.1.** Если  $b_r^2 > 0$  ( $r = 1, 2, \dots, n-1$ ), то  $(P_r(\lambda))_0^n$  образуют последовательность **Штурма**, определяемую следующими свойствами:

- 1) Значение  $P_0(\lambda)$  знакопостоянно ( $P_0(\lambda) \equiv 1$ ).
- 2) Когда  $P_r(\lambda)$  равен нулю,  $P_{r+1}(\lambda)$  и  $P_{r-1}(\lambda)$  не равны нулю и имеют противоположные знаки.

**Доказательство.** Чтобы установить свойство 2, заметим сначала, что два последовательных минора  $P_r$  не могут быть равны нулю одновременно, т. е. при одном и том же  $\lambda = \lambda^0$ . Так, например, при  $P_{s+1}(\lambda^0) = 0 = P_s(\lambda^0)$  из уравнения (3.1.7) следует, что  $P_{s-1}(\lambda^0) = 0$ , таким образом, и  $P_1$  и  $P_0$  равны нулю, но  $P_0(\lambda^0) = 1$ . Итак, приходим к противоречию.

Вторая часть свойства 2 теперь прямо вытекает из (3.1.7). ■

Прежде чем двигаться дальше, введем *функцию смены знака*  $s_r(\lambda)$ . Это целочисленная функция, дающая общее число смен знаков в последовательности значений миноров  $P_0, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_r(\lambda)$ . Так, если

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

то

$$P_0 = 1, \quad P_1(\lambda) = -\lambda + 2, \\ P_2(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5, \quad P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 21\lambda + 12.$$

При  $\lambda = 0$  имеем последовательность значений 1, 2, 5, 12. Поскольку смены знака в этой последовательности нет,  $s_r(0) = 0$  при всех  $r$ . При  $\lambda = 3$  имеем последовательность 1, -1, -1, 3, для которой  $s_1(3) = s_2(3) = 1$ ,  $s_3(3) = 2$ .

**Теорема 3.1.2.**  $s_r(\lambda)$  меняет значение только тогда, когда  $\lambda$  проходит через нули последнего многочлена последовательности  $P_r(\lambda)$ .

**Доказательство.** Очевидно,  $s_r(\lambda)$  может сменить знак только тогда, когда  $\lambda$  проходит через ноль одного из  $P_s(\lambda)$ , ( $s \leq r$ ), поэтому достаточно доказать, что  $s_r(\lambda)$  не изменяется при прохождении  $\lambda$  через нули любого промежуточного многочлена  $P_s(\lambda)$ , ( $s < r$ ). Пусть  $P_s(\lambda^0) = 0$ , где  $1 \leq s < r$ , тогда  $P_{s-1}(\lambda^0)$  и  $P_{s+1}(\lambda^0)$  оба не равны нулю и имеют противоположные знаки. Поэтому структура знаков трех многочленов  $P_{s-1}(\lambda^0)$ ,  $P_s(\lambda^0)$ ,  $P_{s+1}(\lambda^0)$  имеет вид  $+0-$  или  $-0+$ . Рассмотрим для определенности первый случай, тогда  $P_s(\lambda)$  увеличивается при прохождении  $\lambda$  через  $\lambda^0$  (второй случай рассматривается аналогично). Следовательно, для значений  $\lambda$ , достаточно близких к  $\lambda^0$ , но меньших  $\lambda^0$ , имеем  $+-$ , тогда как для значений  $\lambda$ , немного больших  $\lambda^0$ , получаем  $+ -$ . Таким образом, независимо от того, больше ли  $\lambda$  или меньше, чем  $\lambda^0$ , наблюдается только одна смена знака в тройке значений  $P_{s-1}(\lambda)$ ,  $P_s(\lambda)$ ,  $P_{s+1}(\lambda)$ . Другими словами, многочлены  $P_{s-1}(\lambda)$ ,  $P_s(\lambda)$ ,  $P_{s+1}(\lambda)$  не вносят никакого вклада в изменение  $s_r(\lambda)$ , когда  $\lambda$  проходит через  $\lambda^0$ . Но никакие другие члены последовательности также не вносят вклад в изменение  $s_r(\lambda)$  (если  $\lambda^0$  является нулем другого  $P_t(\lambda)$ ,  $|t - s| \geq 2$ , то и в этом случае  $s_r(\lambda)$  не изменяется). Таким образом,  $s_r(\lambda)$  вообще не изменяется. ■

Легко видеть, что  $s_r(\lambda)$  определена некорректно при  $P_r(\lambda) = 0$ .

**Теорема 3.1.3.** Нули  $P_r(\lambda)$  простые, т. е. различные. Кроме того, если  $P_r(\lambda^0) \neq 0$  и  $s_r(\lambda^0) = k$ , то  $P_r(\lambda)$  имеет  $k$  нулей, меньших по величине, чем  $\lambda^0$ .

**Доказательство.** В силу того что  $P_s(\lambda) = (-1)^s \lambda^s + \dots$ , все  $P_s(\lambda)$  положительны при достаточно больших отрицательных  $\lambda$ , т. е. при  $\lambda \leq \alpha$ ; имеем  $s_r(\alpha) = 0$  (величину  $\alpha$  можно положить равной нулю в случае положительно определенной матрицы  $\mathbf{J}$ ). С другой стороны, для достаточно больших положительных  $\lambda$ , т. е.  $\lambda \geq \beta$ ,  $P_s(\lambda)$  изменяет знак, так что  $s_r(\beta) = r$ . А поскольку  $s_r(\lambda)$  может возрастать только тогда, когда  $\lambda$  проходит через ноль  $P_r(\lambda)$ , все нули  $P_r(\lambda)$  должны быть различными. Так, если бы корень  $\lambda^0$  имел четную кратность, то величина  $s_r(\lambda)$  не изменилась бы при прохождении  $\lambda$  через  $\lambda^0$ . Однако  $s_r(\lambda)$  увеличилась бы ровно на единицу в случае, если  $\lambda^0$  имела бы нечетную кратность. Доказательство второй части теоремы следует теперь незамедлительно. ■

**Следствие 3.1.1.** *Собственные значения якобиевой матрицы различны.*

**Следствие 3.1.2.** *Количество нулей  $P_r(\lambda)$ , удовлетворяющих условию  $\alpha < \lambda < \beta$ , равно  $s_r(\beta) - s_r(\alpha)$ .*

**Следствие 3.1.3.** *Если  $\lambda^0$  является нулем  $P_r(\lambda)$ , тогда при переходе от  $\lambda^0 -$  к  $\lambda^0 +$  знак  $P_{r-1}(\lambda)P_r(\lambda)$  изменяется с  $+$  на  $-$  и  $s_r(\lambda)$  увеличивается на единицу.*

**Теорема 3.1.4.** *Между любыми двумя нулями  $P_r(\lambda)$  лежит один и только один ноль как  $P_{r-1}(\lambda)$ , так и  $P_{r+1}(\lambda)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mu_1, \mu_2$  являются двумя соседними нулями. Для определенности положим  $P_r(\mu_1-) > 0$ , тогда  $P_r(\mu_1+) < 0$  и  $P_r(\mu_2-) < 0$ . Согласно следствию 3.1.3,  $P_{r-1}(\mu_1+) > 0$  и  $P_{r-1}(\mu_2-) < 0$ , откуда вытекает, что  $P_{r-1}(\lambda)$  меняет знак между  $\mu_1+$  и  $\mu_2-$  и поэтому имеет по меньшей мере один ноль в интервале  $(\mu_1, \mu_2)$ .

Из свойства 2 последовательностей Штурма следует, что  $P_{r+1}(\mu_i)$  и  $P_{r-1}(\mu_i)$  ( $i = 1, 2$ ) имеют противоположные знаки. Таким образом,  $P_{r+1}(\mu_1+) < 0$ ,  $P_{r+1}(\mu_2-) > 0$ , откуда получаем, что  $P_{r+1}(\lambda)$  имеет по меньшей мере один ноль в интервале  $(\mu_1, \mu_2)$ . Теперь предположим, что  $P_{r-1}(\lambda)$  (или  $P_{r+1}(\lambda)$ ) имеет два (или более) нулей в интервале  $(\mu_1, \mu_2)$ , тогда  $P_r(\lambda)$  также имеет ноль в  $(\mu_1, \mu_2)$ , что вступает в противоречие с предположением о том, что  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются соседними нулями. ■

Обычно эта теорема формулируется следующим образом: *собственные значения последовательных главных миноров чередуются друг с другом.*

## 3.2. Ортогональные многочлены

Существует тесная связь между якобиевыми матрицами и ортогональными многочленами. В этом разделе будут изложены основные свойства ортогональных многочленов.

Говорят, что два многочлена  $p(x)$ ,  $q(x)$  ортогональны с весом  $w(x) > 0$  на интервале  $(a, b)$ , если

$$(p, q) \equiv \int_a^b w(x)p(x)q(x)dx = 0. \quad (3.2.1)$$

Известным примером таких многочленов являются многочлены Лагерра  $(L_n(x))_0^\infty$ , т. е.

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x - 1, \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2, \dots,$$

которые ортогональны с весом  $e^{-x}$  на полуоси  $(0, \infty)$ , а именно:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Одним из важных свойств таких многочленов является то, что они удовлетворяют *трехчленному рекуррентному соотношению*. Например, для  $L_r(x)$  оно имеет вид

$$L_{r+1}(x) = (x - 2r - 1)L_r(x) - r^2 L_{r-1}(x).$$

В этом разделе не будут рассматриваться *непрерывные* соотношения ортогональности вида (3.2.1), но их *дискретные* аналоги

$$(p, q) \equiv \sum_{i=1}^n w_i p(\xi_i) q(\xi_i) = 0; \quad (w_i)_1^n > 0. \quad (3.2.2)$$

где  $(\xi_i)_1^n$  — упорядоченный набор точек  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ .

Для того чтобы формально определить рассмотренное выше, обозначим линейное пространство многочленов порядка  $n$ , т. е. множество всех многочленов  $p(x)$  степени  $k \leq n$  с действительными коэффициентами, через  $\mathbf{P}_n$ . В этом пространстве вводится *скалярное произведение*  $(\cdot, \cdot)$ , *положительно определенное, билинейное и симметричное*, т. е.

- 1)  $(p, p) \equiv \|p\|^2 > 0$ , если  $p(x) \neq 0$ ;
- 2)  $(\alpha p, q) = \alpha(p, q)$ ,  $(p + q, r) = (p, r) + (q, r)$ ;
- 3)  $(p, q) = (q, p)$ .

Кроме того,

4.  $(xp, q) = (p, xq)$ .

Теперь докажем теорему.

**Теорема 3.2.1.** *Существует единственная последовательность многочленов  $(q_i(x))_0^n$  таких, что  $q_i(x)$  имеет степень  $i$  и равный единице коэффициент при  $x^i$ , ортогональных по отношению к скалярному произведению  $(\cdot, \cdot)$ , т. е.*

$$(q_i, q_j) = 0, \quad i \neq j.$$

**Доказательство.**  $q_i(x)$  можно построить, используя известный метод ортогонализации Грама–Шмидта для линейно независимых многочленов  $(x^i)_0^{n-1}$ . Таким образом,

$$q_0 = 1, \quad q_i(x) = x^i - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} q_j(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$(q_i, q_j) = (x^i, q_j) - \alpha_{ij} (q_j, q_j) = 0$$

и, следовательно,  $\alpha_{ij} = (x^i, q_j) / \|q_j\|^2$ ,  $j = 0, 1, \dots, i-1$ . ■

Заметим, что многочлен

$$q_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)$$

является многочленом степени  $n$  со старшим коэффициентом 1. Он ортогонален  $(q_i)_0^{n-1}$ ; по существу, он ортогонален всем функциям, поскольку  $q_n(\xi_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Метод Грама–Шмидта не удобен для численного определения  $q_i$ , вместо него будем использовать результаты работы Форсайта (Forsythe) [90].

**Теорема 3.2.2.** *Ортогональные многочлены  $(q_i)_0^n$ ,  $q_i(x)$  степени  $i$ , со старшим коэффициентом 1, удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению вида*

$$q_i(x) = (x - \alpha_i)q_{i-1}(x) - \beta_{i-1}^2 q_{i-2}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2.3)$$

с исходными данными

$$q_{-1}(x) = 0, \quad q_0(x) = 1. \quad (3.2.4)$$

**Доказательство.**  $q_i(x) - xq_{i-1}(x)$  является многочленом степени  $(i-1)$ . Поэтому его можно выразить через (линейно независимые — см. упражнение 3.2.1) многочлены  $q_0, q_1, \dots, q_{i-1}$ . Таким образом,

$$q_i(x) - xq_{i-1}(x) = c_0q_0 + c_1q_1 + \dots + c_{i-1}q_{i-1}. \quad (3.2.5)$$

Взяв скалярное произведение этого уравнения с  $q_j(x)$  ( $j = 0, 1, \dots, i-1$ ), получаем

$$(q_i, q_j) - (q_{i-1}, xq_j) = \sum_{k=0}^{i-1} c_k(q_k, q_j) = c_j \|q_j\|^2, \quad (3.2.6)$$

где второй член в левой части записан с учетом свойства 4 скалярного произведения. Но если  $j = 0, 1, \dots, i-1$ , то первый член в левой части равен нулю, и если  $j = 0, 1, \dots, i-3$ , то  $xq_j$  имеет степень не выше  $i-2$  и, следовательно, ортогонален  $q_{i-1}$ . Таким образом,  $c_j = 0$ , если  $j = 0, 1, 2, \dots, i-3$ , и только *два* члена  $c_{i-1}$  и  $c_{i-2}$  остаются в левой части (3.2.5), т. е.

$$q_i(x) - xq_{i-1}(x) = c_{i-2}q_{i-2}(x) + c_{i-1}q_{i-1}(x). \quad (3.2.7)$$

Более того, из уравнения (3.2.6) вытекает

$$\alpha_i = -c_{i-1} = (q_{i-1}, xq_{i-1}) / \|q_{i-1}\|^2, \quad (3.2.8)$$

$$c_{i-2} = -(q_{i-1}, xq_{i-2}) / \|q_{i-2}\|^2.$$

Но  $xq_{i-2}$  является многочленом степени  $i-1$  со старшим коэффициентом 1, поэтому его можно представить в виде

$$xq_{i-2}(x) = q_{i-1}(x) + \sum_{j=0}^{i-2} d_j q_j(x),$$

так что

$$(q_{i-1}, xq_{i-2}) = \|q_{i-1}\|^2$$

и, следовательно, коэффициент  $c_{i-2}$  отрицателен и равен  $-\beta_{i-1}^2$ , где

$$\beta_i = \|q_i\| / \|q_{i-1}\|. \quad (3.2.9)$$

■

Уравнения (3.2.3), (3.2.4) и (3.2.8), (3.2.9) позволяют получить многочлены  $\{q_i\}_1^{n-1}$  последовательно. Так, используя  $q_{-1} = 0$ ,  $q_0 = 1$ , сначала находим  $\alpha_1$  из (3.2.8) и, подставляя его в (3.2.3), получаем  $q_1$ . Далее находятся  $\alpha_2, \beta_1$  и  $q_2$  и т. д.

В *обратных* задачах необходимо выразить веса  $w_i$  в терминах многочленов  $q_{n-1}$  и  $q_n$ . Для этого следует заметить, что любой многочлен  $f(x)$  из  $\mathbf{P}_{n-1}$ , т. е. степени  $n - 2$  или меньшей, удовлетворяет уравнению

$$(q_{n-1}, f) \equiv \sum_{i=1}^n w_i q_{n-1}(\xi_i) f(\xi_i) = 0.$$

Но если такая комбинация

$$\sum_{i=1}^n m_i f(\xi_i), \quad m_i = w_i q_{n-1}(\xi_i)$$

равна нулю для любого  $f(x)$  из  $\mathbf{P}_{n-1}$ , то

$$\sum_{i=1}^n m_i \xi_i^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

поскольку каждый  $x^k$  принадлежит  $\mathbf{P}_{n-1}$ , т. е.

$$\mathbf{Bm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \xi_1^{n-2} & \xi_2^{n-2} & \xi_3^{n-2} & \dots & \xi_n^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.2.10)$$

Как показано в упражнении 3.2.2, это уравнение имеет решение

$$m_i = \gamma / \prod_{j=1}^n '(\xi_i - \xi_j). \quad (3.2.11)$$

С точностью до произвольного множителя  $\gamma$  это единственное решение. Штрих означает, что член с  $j = i$  опущен. Теперь, поскольку

$$q_n(\xi) = \prod_{j=1}^n (\xi - \xi_j), \quad (3.2.12)$$

имеем

$$q'_n(\xi_i) = \prod_{j=1}^n (\xi_i - \xi_j),$$

где штрих в левой части равенства означает дифференцирование!

Возвращаясь к уравнению (3.2.11), заключаем, что для некоторого  $\gamma$

$$m_i \equiv w_i q_{n-1}(\xi_i) = \gamma / q'_n(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как  $\{q_i\}_0^n$  удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению (3.2.3), используя аргументы раздела 3.1, находим, что нули  $q_n(x)$  и  $q_{n-1}(x)$  должны чередоваться и, следовательно (см. упражнение 3.2.3),  $q_{n-1}(\xi_i)q'_n(\xi_i) > 0$ . Это означает, что веса

$$w_i = \gamma / \{q_{n-1}(\xi_i)q'_n(\xi_i)\} \quad (3.2.13)$$

положительны.

**Это уравнение имеет важный смысл:** если даны многочлены  $q_n(\xi)$ ,  $q_{n-1}(\xi)$  степеней  $n$  и  $n-1$  соответственно, причем известно, что их нули чередуются, то их можно рассматривать в качестве  $n$ -го и  $(n-1)$ -го членов соответственно последовательности многочленов, ортогональных с весами  $w_i$  (3.2.13) в точках  $\{\xi_i\}_1^n$ .

### Упражнения 3.2

- 1) Показать, что если многочлены  $\{q_i\}_0^k$ ,  $k < n$ , ортогональны по отношению к скалярному произведению (3.2.2), то они линейно независимы. Отсюда вывести, что любой многочлен  $p(x)$  степени  $k-1$  может быть однозначно представлен в виде

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_j(x)$$

и что  $q_k(x)$  ортогонален каждому из многочленов степени  $k-1$ .

- 2) Показать, что определитель Вандермонда  $\Delta$ , заданный равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{n-1} \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-2} & \xi_2^{n-2} & \dots & \xi_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix},$$



равняется

$$\Delta = \prod_{j=2}^{n-1} \prod_{k=1}^{j-1} (\xi_j - \xi_k) = \Gamma / \prod_{j=1}^{n-1} (\xi_n - \xi_j),$$

где

$$\Gamma = \prod_{j=2}^n \prod_{k=1}^{j-1} (\xi_j - \xi_k).$$

Используя это, получить (3.2.11).

- 3) Нули  $\{\xi_i\}_1^n$  и  $\{\xi_i^*\}_1^{n-1}$  многочленов  $q_n(x)$  и  $q_{n-1}(x)$  соответственно должны удовлетворять неравенству  $\xi_1 < \xi_1^* < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1}^* < \xi_n$ . Показать, что  $(-1)^{n-i} q'_n(\xi_i) > 0$ ,  $(-1)^{n-i} q'_{n-1}(\xi_i) > 0$  и, следовательно,  $q'_n(\xi_i) q'_{n-1}(\xi_i) > 0$ .

### 3.3. Собственные векторы якобиевых матриц

В этом разделе будут установлены некоторые свойства собственных векторов якобиевых матриц, необходимые в дальнейшем для решения «обратных задач». Вернемся к анализу раздела 3.1 и докажем следующую теорему.

**Теорема 3.3.1.** *Последовательность  $(u_{r,j})_{r=1}^n$  для  $j$ -го собственного вектора имеет ровно  $j - 1$  смену знака.*

**Доказательство.**  $u_{r,j}$  определяются уравнением (3.1.2) при  $\lambda = \lambda_j$ . Это можно переписать как

$$-b_{r-1}u_{r-1,j} + (a_r - \lambda_j)u_{r,j} - b_r u_{r+1,j} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (3.3.1)$$

где  $u_{0,j}, u_{n+1,j}$  полагаются равными нулю, т. е.

$$u_{0,j} = 0 = u_{n+1,j}. \quad (3.3.2)$$

Выберем произвольное  $b_n > 0$  и положим

$$v_1 = u_{1,j}, \quad v_2 = b_1 u_{2,j}, \quad \dots, \quad v_{n+1} = b_1 b_2 \dots b_n u_{n+1,j},$$

а также умножим (3.3.1) на  $b_1 b_2 \dots b_{r-1}$ , чтобы получить

$$-b_{r-1}^2 v_{r-1} + (a_r - \lambda_j) v_r - v_{r+1} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.3)$$

Сравнивая это уравнение с (3.1.7), видим, что его решение имеет вид

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_r = P_{r-1}(\lambda_j) \quad (r = 1, 2, \dots, n+1)$$

и удовлетворяет граничному условию  $v_{n+1} = 0$  вследствие равенства  $P_n(\lambda_j) = 0$ .

Таким образом,

$$u_{r,j} = (b_1 b_2 \dots b_{r-1})^{-1} P_{r-1}(\lambda_j), \quad (3.3.4)$$

и поскольку  $\lambda_j$  лежит между  $(j-1)$ -м и  $j$ -м нулями  $P_{n-1}(\lambda)$ ,  $s_{n-1}(\lambda_j) = j-1$ . ■

Прежде чем устанавливать дальнейшие свойства собственных векторов, введем понятие  $u$ -линии.

**Определение 3.3.1.** Пусть  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$  является вектором. Определим  $u$ -линию как ломаную на плоскости, соединяющую точки с координатами

$$x_r = r, \quad y_r = u_r \quad (r = 1, 2, \dots, n+1).$$

Таким образом, между  $(x_r, y_r)$  и  $(x_{r+1}, y_{r+1})$   $y(x)$  определяется уравнением

$$y(x) = (r+1-x)u_r + (x-r)u_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

как показано на рис. 3.3.1.

Теперь вернемся к теореме 3.3.1. Для произвольного (действительного)  $\lambda$  последовательность

$$u_0 = 0, \quad u_r(\lambda) = u_1(b_1 b_2 \dots b_{r-1})^{-1} P_{r-1}(\lambda) \quad (r = 1, 2, \dots, n+1)$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (3.3.1) при  $r = 1, 2, \dots, n$ . (Она удовлетворяет последнему уравнению с  $u_{n+1} = 0$  тогда и только тогда, когда  $P_n(\lambda) = 0$ .) Для произвольного  $\lambda$  вектор  $\mathbf{u}(\lambda) = \{u_1(\lambda), \dots, u_{n+1}(\lambda)\}$  определяет  $u(\lambda)$ -линию. Рассмотрим узлы этой линии, т.е. точки  $x$ , в которых  $y(x) = 0$ . Во-первых, заметим, что если  $u_r(\lambda) = 0$ , т.е.  $P_{r-1}(\lambda) = 0$ , то  $P_r(\lambda)$  и  $P_{r-2}(\lambda)$ , т.е.  $u_{r+1}$  и  $u_{r-1}$ , имеют противоположные знаки, так что  $u(\lambda)$ -линия пересекает ось  $x$  в точке  $x = r$ . Во-вторых, если  $u_r$  и  $u_{r+1}$  имеют противоположные знаки, то  $y(x)$  имеет узел между  $r$  и  $r+1$ . Это означает, что  $u(\lambda_j)$ -линия имеет ровно

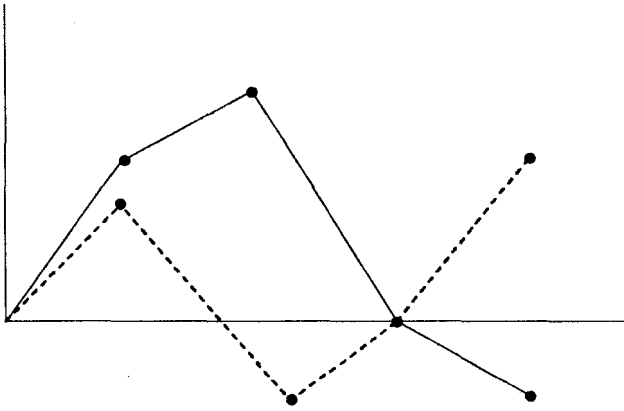


Рис. 3.3.1.  $u(\lambda)$ -линии для  $\lambda^*$  —, и  $\lambda^{**}$  — — —

$j$  узлов, *исключая* левый конец, где  $u_0 = 0$ , и *включая* правый конец. Более того, если  $\lambda_j \leq \lambda < \lambda_{j+1}$ , то  $u(\lambda)$ -линия имеет ровно  $j$  узлов, вновь *исключая* левый конец, где  $u_0 = 0$ . В таблице 3.3.1 указаны знаки  $u_r$  для всего диапазона значений  $\lambda$  в случае  $n = 3$ . В последней строке таблицы указано число узлов  $u(\lambda)$ . На рис. 3.3.1 показан вид  $u(\lambda)$  для  $\lambda^*$ . Теперь установим тождество, которое поможет при получении дальнейших результатов, касающихся собственных векторов.

Рассмотрим решения  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  уравнений (3.3.1), соответствующие  $\lambda, \mu$ . Пусть  $u_0 = 0 = v_0$ , а величине  $b_n$  приписано некоторое положительное значение. Тогда

$$\begin{aligned} -b_{r-1}u_{r-1} + a_r u_r - b_r u_{r+1} &= \lambda u_r & (r = 1, 2, \dots, n), \\ -b_{r-1}v_{r-1} + a_r v_r - b_r v_{r+1} &= \mu v_r & (r = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Таблица 3.3.1. Знаки  $u_r$  при различных значениях  $\lambda$

$\lambda$	0	$\lambda_1$	$\lambda^*$	$\lambda$	$\lambda_2$	$\lambda^{**}$	$\lambda_3$
$u_1$	+	+	+	+	+	+	+
$u_2$	+	+	+	0	-	-	-
$u_3$	+	+	0	-	-	0	+
$u_4$	+	0	-	-	0	+	0
	0	1	1	1	2	2	3

Исключая из этих уравнений  $a_r$ , находим

$$b_r t_r - b_{r-1} t_{r-1} = (\mu - \lambda)(s_r - s_{r-1}), \quad (3.3.5)$$

где

$$t_r = u_{r+1} v_r - u_r v_{r+1}, \quad s_r = \sum_{i=1}^r u_i v_i, \quad (3.3.6)$$

и, суммируя по  $r = p, p+1, \dots, q$  ( $1 \leq p \leq q \leq n$ ), получаем

$$b_q t_q - b_{p-1} t_{p-1} = (\mu - \lambda)(s_q - s_{p-1}). \quad (3.3.7)$$

В частности, при  $p = 1$   $u_0 = 0 = v_0 = t_0 = s_0$  имеем

$$b_q t_q = (\mu - \lambda) s_q. \quad (3.3.8)$$

Докажем теперь следующую теорему.

**Теорема 3.3.2.** *Если  $\lambda < \mu$ , то между любыми двумя узлами  $u(\lambda)$ -линии найдется по меньшей мере один узел  $u(\mu)$ -линии.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) — два соседних узла  $u$ -линии и пусть

$$p-1 \leq \alpha < p, \quad q < \beta \leq q+1 \quad (p \leq q),$$

так что

$$y(\alpha, \lambda) \equiv (p - \alpha)u_{p-1} + (\alpha - p + 1)u_p = 0, \quad (3.3.9)$$

$$y(\beta, \lambda) \equiv (q + 1 - \beta)u_q + (\beta - q)u_{q+1} = 0 \quad (3.3.10)$$

и  $y(x, \lambda) \neq 0$  при  $\alpha < x < \beta$ . Для определенности будем считать, что  $y(x, \lambda) > 0$  при  $\alpha < x < \beta$ , тогда все  $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$  положительны. Теперь нужно показать, что  $y(x, \mu)$  имеет нуль между  $\alpha$  и  $\beta$ . Предположим, что  $y(x, \mu)$  не имеет таких нулей, т.е. она знакопостоянна при  $\alpha < x < \beta$ . Без потери общности можно считать, что

$$y(x, \mu) > 0 \text{ для } \alpha < x < \beta,$$

т.е.  $y(\alpha, \mu) \geq 0, y(\beta, \mu) \geq 0$  и все  $v_p, v_{p+1}, \dots, v_q$  положительны. Таким образом,

$$(p - \alpha)v_{p-1} + (\alpha - p + 1)v_p \geq 0, \quad (3.3.11)$$

$$(q + 1 - \beta)v_q + (\beta - q)v_{q+1} \geq 0, \quad (3.3.12)$$

и, исключая  $\alpha$  из (3.3.9), (3.3.11), а также  $\beta$  из (3.3.10), (3.3.12), заключаем, что  $t_{p-1} \geq 0$ ,  $t_q \leq 0$ . С другой стороны,  $s_q - s_{p-1} = \sum_{i=p}^q u_i v_i > 0$ , так что левая часть (3.3.7) неположительна, тогда как правая часть положительна, что приводит к противоречию. В случае если  $y(x, \mu) < 0$  при  $\alpha < x < \beta$ , левая часть (3.3.5) неотрицательна, а правая часть отрицательна. ■

**Теорема 3.3.3.** *При непрерывном увеличении  $\lambda$  узлы  $u(\lambda)$ -линии непрерывно смещаются влево.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots$  являются узлами  $u(\lambda)$ -линии, а  $0 < \alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu), \dots$  — узлами  $u(\mu)$ -линии. Нужно показать, что

$$\alpha_r(\mu) < \alpha_r(\lambda)$$

для всех значений  $r$ , соответствующих  $u(\lambda)$ -линии. По теореме 3.3.2 найдется по меньшей мере одно  $\alpha_r(\mu)$  между любыми двумя  $\alpha_r(\lambda)$ , поэтому достаточно доказать, что

$$\alpha_1(\mu) < \alpha_1(\lambda) = x.$$

Предположим, если возможно, что  $\alpha_1(\mu) \geq x$  и что

$$q < x \leq q + 1 \quad (1 \leq q \leq n),$$

тогда все  $u_1, u_2, \dots, u_q$  и  $v_1, v_2, \dots, v_q$  положительны, при этом

$$\begin{aligned} (q + 1 - x)u_q + (x - q)u_{q+1} &= 0, \\ (q + 1 - x)v_q + (x - q)v_{q+1} &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует  $t_q \leq 0$ . С другой стороны,  $s_q > 0$ , что вместе с (3.3.8) приводит к противоречию. ■

Из таблицы 3.3.1 видно, как первый узел  $u(\lambda)$  появляется на правом конце  $(n + 1)$  при  $\lambda = \lambda_1$  и постепенно смещается влево, как появляется второй нуль при  $\lambda = \lambda_2$  и т. д.

**Теорема 3.3.4.** *Узлы двух последовательных собственных векторов чередуются.*

**Доказательство.** Пусть собственные векторы соответствуют  $\lambda_j$  и  $\lambda_{j+1}$ . Узлами  $u(\lambda_j)$  и  $u(\lambda_{j+1})$ -линий являются  $(\alpha_r(\lambda_j))_{r=1}^j$  и

$(\alpha_r(\lambda_{j+1}))_{r=1}^{j+1}$ , соответственно, и  $\alpha_j(\lambda_j) = \alpha_{j+1}(\lambda_{j+1}) = n + 1$ . Из теоремы 3.3.3 следует, что  $\alpha_1(\lambda_{j+1}) < \alpha_1(\lambda_j)$ , тогда как, применяя теорему 3.3.2 к двум нулям  $\alpha_{j-1}(\lambda_j)$  и  $\alpha_j(\lambda_j) \equiv n + 1$ , получаем, что  $\alpha_j(\lambda_{j+1}) > \alpha_{j-1}(\lambda_j)$ . Из этих двух неравенств вытекает единственно возможное упорядочение узлов

$$0 < \alpha_1(\lambda_{j+1}) < \alpha_1(\lambda_j) < \alpha_2(\lambda_{j+1}) < \dots < \alpha_{j-1}(\lambda_j) < \alpha_j(\lambda_{j+1}), < \alpha_j(\lambda_j) = \alpha_{j+1}(\lambda_{j+1}) = n + 1. \quad (3.3.13)$$

■

Вывод некоторых других важных свойств собственных колебаний мы отложим до раздела 5.7, где будут использованы свойства осцилляционных матриц. Связанные с этим вопросы освещены в работе Глэдвела [119].

### Упражнения 3.3

- 1) Показать, что первая и последняя компоненты собственного вектора якобиевой матрицы должны быть ненулевыми.
- 2) Показать, что если матрица  $\mathbf{J}$  из (3.1.4) с отрицательными недиагональными элементами имеет собственную пару  $\lambda_i, \mathbf{u}_i$ , то соответствующая ей матрица  $\mathbf{J}^*$  с положительными недиагональными элементами имеет собственную пару  $\lambda_i, \mathbf{Zu}_i$ , где  $\mathbf{Z} = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1})$ . Это означает, что собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению  $\lambda_1$ , имеет  $n - 1$  перемену знака, тогда как вектор, соответствующий  $\lambda_n$ , — ни одной. Показать, что если собственные значения  $\mathbf{J}^*$  пронумерованы в обратном порядке, т. е.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ , то теорема 3.3.1 остается справедливой.

## 3.4. Задачи нахождения обобщенных собственных значений

В разделе 2.4 было показано, что задача на собственные значения для конечно-элементной модели колеблющегося стержня может быть сведена к обобщенной задаче на собственные значения

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{u} = 0, \quad (3.4.1)$$

где  $\mathbf{K}, \mathbf{M}$  — симметричные трехдиагональные матрицы, причем кодиагональ у  $\mathbf{K}$  отрицательна, а у  $\mathbf{M}$  положительна. Если  $\mathbf{M}$  положительно определена, а  $\mathbf{K}$  положительно полуопределена (т. е. матрица  $\mathbf{K}$  является якобиевой), то из анализа главы 1 следует, что собственные значения неотрицательны. При этом условии можно показать, что решения (3.4.1) обладают свойствами решений задачи на собственные значения в обычном смысле (3.1.7). В частности, можно показать, что собственные значения (3.4.1) различны и что последовательность  $(u_{r,j})_{r=1}^n$  для  $j$ -го собственного вектора имеет ровно  $j-1$  перемену знака. Чтобы получить эти результаты, необходимо сейчас вернуться к анализу раздела 3.1 и понять, какие изменения нужно произвести.

Начнем с главных миноров матрицы  $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ , используя обозначения (2.4.10):

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= 1, & P_1(\lambda) &= c_1 - \lambda a_1, \\ P_2(\lambda) &= \begin{vmatrix} c_1 - \lambda a_1 & -d_1 - \lambda b_1 \\ -d_1 - \lambda b_1 & c_2 - \lambda a_2 \end{vmatrix}, \dots \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

и, наконец,

$$P_n(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}).$$

Миноры удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$P_{r+1}(\lambda) = (c_{r+1} - \lambda a_{r+1})P_r(\lambda) - (d_r + \lambda b_r)^2 P_{r-1}(\lambda). \quad (3.4.3)$$

Аргументы, использовавшиеся в разделах 3.1, 3.3, основываются на том, что последовательность главных миноров, определенная в (3.1.5), (3.1.7), является последовательностью Штурма. Однако последовательность, определенная в (3.4.2), (3.4.3), не является таковой. Так, если  $P_r(\lambda) = 0$ , то  $P_{r+1}(\lambda) = -(d_r + \lambda b_r)^2 P_{r-1}(\lambda)$ , и, следовательно, если  $d_r + \lambda b_r = 0$ , то  $P_{r+1}(\lambda)$  равен нулю, а не противоположного знака к  $P_{r-1}(\lambda)$ , как требует условие 2 теоремы 3.1.1. Теперь сделаем ключевое наблюдение: в случае  $\lambda \geq 0$  многочлены  $P_r(\lambda)$  образуют последовательность Штурма, поскольку  $b_r, d_r$  положительны, что исключает возможность  $d_r + \lambda b_r = 0$ . Если предположить, что  $\mathbf{M}$  положительно определена, а  $\mathbf{K}$  положительно полуопределена, то все собственные значения  $\lambda_r$  неотрицательны и можно вернуться к прежним рассуждениям. Таким образом, теорема 3.1.1 справедлива при условии, что  $\lambda \geq 0$ , теорема 3.1.2 также справедлива. Доказательство теоремы 3.1.3 необходимо немного изменить. При разложении  $P_s(\lambda)$  по степеням  $\lambda$  имеем

$$P_s(\lambda) = \alpha_{s,0} + \alpha_{s,1}\lambda + \dots + \alpha_{s,s}\lambda^s. \quad (3.4.4)$$

Первый член  $\alpha_{s,0}$  является  $s$ -ым главным минором  $\mathbf{K}$  и, поскольку  $\mathbf{K}$  положительно полуопределена,  $\alpha_{s,0} > 0$  при  $s = 1, 2, \dots, n-1$  и  $\alpha_{n,0} \geq 0$ . В силу того что  $P_s(0) = \alpha_{s,0}$ , получаем  $s_r(0) = 0$ . Последний член в (3.4.4) есть  $\alpha_{s,s} = (-1)^s * (s\text{-ый главный минор } \mathbf{M})$ , так что для достаточно больших  $\lambda$ , т. е.  $\lambda \geq \beta$ ,  $s_r(\beta) = r$ . Остальная часть доказательства теоремы 3.1.1, а также следствия 1–3 и теорема 3.1.4 остаются без изменения.

Необходимо внести небольшие изменения в доказательство теоремы 3.3.1.  $u_{r,j}$  определяются из уравнений

$$-(d_{r-1} + \lambda_j b_{r-1})u_{r-1,j} + (c_r - \lambda_j a_r)u_{r,j} - (d_r + \lambda_j b_r)u_{r+1,j} = 0 \quad (3.4.5)$$

при  $r = 1, 2, \dots, n$ , где  $u_{0,j} = 0 = u_{n+1,j}$ .

Пусть  $d_r + \lambda_j b_r = e_r$ , выберем произвольно  $e_n > 0$  и положим

$$v_1 = u_{1,j} \quad v_2 = e_1 u_{2,j}, \dots \quad v_{n+1} = e_1 e_2 \dots e_n u_{n+1,j}.$$

Умножая уравнение (3.4.5) на  $e_1 e_2 \dots e_{r-1}$ , получим

$$-e_{r-1}^2 v_{r-1} + (c_r - \lambda_j a_r)v_r - v_{r+1} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Сравнивая результат с (3.4.3), видим, что решение имеет вид

$$v_0 = 0, v_1 = 1, v_r = P_{r-1}(\lambda_j) \quad (r = 1, 2, \dots, n+1).$$

Вновь приходим к выводу, что  $s_{n-1}(\lambda_j) = j - 1$ .

Можно внести аналогичные изменения в доказательства теорем 3.3.2–3.3.4.

### Упражнения 3.4

- 1) Внести соответствующие изменения в доказательства теорем 3.3.2–3.3.4.



---

---

## ГЛАВА 4

# Обратные задачи для якобиевых систем

В большинстве случаев человека проще убедить доводами, которые он сам прекрасно осознает, чем теми, что пришли в голову окружающим.  
Блез Паскаль. «Мысли», 10

### 4.1. Введение

Исследование обратных задач для якобиевых матриц началось в Советском Союзе с работ М. Г. Крейна. По-видимому, он интересовался главным образом качественными свойствами решений и обратными задачами для уравнения Штурма–Лиувилля (см. главу 10), а дискретные задачи изучались потому, что встречались в приближенном анализе задач Штурма–Лиувилля. Ранние работы Крейна [198], [199] касались теории последовательностей Штурма, тогда как в работах Гантмахера и Крейна [98] и Крейна [202] активно применялась теория цепных дробей, развитая Стильтесом (Stieltjes) [310]. Крейн рассматривает свои результаты в качестве механической интерпретации анализа Стильтеса.

Рассмотрим простую систему, приведенную на рис. 4.1.1(а).

Пусть даны  $m_1, m_2, k_1, k_2$ , тогда, используя материал главы 2, находим собственные частоты  $\omega_1, \omega_2$  системы:  $\lambda_1 = \omega_1^2, \lambda_2 = \omega_2^2$  являются

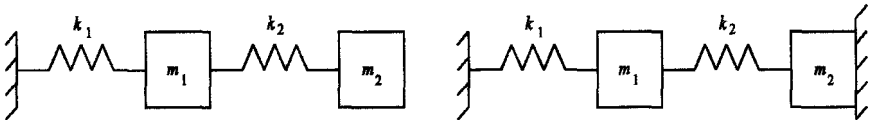


Рис. 4.1.1. Система (а) свободна и (б) зафиксирована на правом конце

собственными значениями уравнения

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \lambda m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \lambda m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.1.1)$$

Собственные значения являются корнями определителя

$$\Delta(\lambda) \equiv m_1 m_2 \lambda^2 - \{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\} \lambda + k_1 k_2 = 0. \quad (4.1.2)$$

Теперь рассмотрим обратную задачу. Во-первых, очевидно, что если найден один набор значений  $m_1, m_2, k_1, k_2$ , дающий необходимые собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$ , и если  $a > 0$ , то  $am_1, am_2, ak_1, ak_2$  является другим таким набором. Получается, что не нужно находить все 4 величины, достаточно трех отношений  $m_1 : m_2 : k_1 : k_2$ . Для того чтобы найти значения всех четырех величин  $m_1, m_2, k_1, k_2$ , имея эти отношения, необходимо знать еще одну величину: например, общую массу  $m = m_1 + m_2$  или общую жесткость системы  $k$ , задаваемую соотношением  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ .

Но даже зная два собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2$ , невозможно найти три отношения, — нужны дополнительные данные. Такой информацией может быть одно собственное значение  $\lambda^* = (\omega^*)^2$  системы, полученной фиксацией массы  $m_2$ , как показано на рис. 4.1.1(б):

$$\lambda^* = \omega^{*2} = \frac{k_1 + k_2}{m_1}. \quad (4.1.3)$$

Сумма и произведение корней  $\lambda_1, \lambda_2$  уравнения (4.1.2) имеют вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2}{m_1 m_2} = \frac{k_2}{m_2} + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}, \quad (4.1.4)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}. \quad (4.1.5)$$

Вычитая (4.1.3) из (4.1.4), получаем

$$\frac{k_2}{m_2} = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^*, \quad (4.1.6)$$

далее, из (4.1.5) находим

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^*}, \quad (4.1.7)$$

и, наконец, из (4.1.3) следует

$$\frac{k_2}{m_1} = \lambda^* - \frac{k_1}{m_1} = \lambda^* - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^*} = \frac{(\lambda^* - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda^*)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^*}. \quad (4.1.8)$$

Из общей теории колебаний при наличии связей (раздел 2.9) вытекает, что  $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$ , так что все величины в правой части (4.1.6)–(4.1.8) положительны: решение реалистично. Материал данной главы представляет собой различные обобщения такого анализа для составных систем из  $n$  масс. Глава состоит из трех частей: обсуждения обратных задач для якобиевой матрицы, реализации этих задач в виде систем масс, соединенных пружинами, и различных обобщений этих задач.

### Упражнения 4.1

- 1) Показать, что если  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  являются собственными векторами (4.1.1), нормированными так, что  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ , тогда уравнение на собственные значения  $\lambda^*$  имеет вид

$$\frac{u_{2,1}^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{u_{2,2}^2}{\lambda_2 - \lambda} = 0.$$

Таким образом, знание  $\lambda^*$  эквивалентно знанию отношения  $u_{2,2} : u_{2,1}$ .

- 2) Показать, что для системы на рис. 4.1.1 с жесткостью  $k$  ( $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ ) и наименьшей массой  $m = m_1 + m_2$   $\lambda^* = \lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ .
- 3) Показать, что для струны единичной длины с натяжением  $T$ , на расстоянии  $\ell_1$  от левого конца ( $\ell_2$  от правого конца) которой находится масса  $m$ , частота  $\omega$  находится из уравнения

$$k_1 + k_2 - \lambda m = 0,$$

где

$$k_i = \frac{T}{\ell_i}, \quad \ell_1 + \ell_2 = 1.$$

Далее, найти систему *наименьшей массы*, имеющую данную частоту  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Эта задача является частным случаем более общей задачи нахождения струны *наименьшей массы*, с расположенными

на ней массами  $(m_i)_1^n$ , разделенными расстояниями  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ , где  $\sum_{i=1}^{n+1} l_i = 1$ . Такая задача рассматривалась в более общем контексте в работе Барсилона (Bargilón) и Туркетти (Turchetti) [23], однако замкнутая форма решения для дискретной задачи не была найдена.

## 4.2. Обратная задача для якобиевой матрицы

Как было показано в разделе 3.1, квадраты собственных частот систем связанных масс могут быть получены как собственные значения якобиевой матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Если система является связанной, т. е. жесткости пружин между массами строго положительны, тогда диагональные элементы  $-b_i$  строго отрицательны.

Докажем основную теорему.

**Теорема 4.2.1.** *Существует единственная якобиева матрица  $\mathbf{J}$ , обладающая заданными собственными значениями  $(\lambda_i)_1^n$ , где*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \quad (4.2.2)$$

*и нормированными собственными векторами  $(\mathbf{u}_i)_1^n$ , имеющими заданные ненулевые значения первых  $(u_{1i})_1^n$  или последних  $(u_{ni})_1^n$  компонент  $(\mathbf{u}_i = \{u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ni}\})$ .*

(Напомним, что из упражнения 3.3.1 следует, что первая и последняя компоненты собственного вектора якобиевой матрицы не равны нулю.)

**Доказательство.** Теорема является одновременно теоремой существования и теоремой единственности. Докажем существование, предъявив матрицу. Сделаем это, используя так называемый алгоритм Ланцоша. Алгоритм доказывает также и единственность построенной матрицы  $\mathbf{J}$ . Преимуществом этого алгоритма является также то, что он

хорошо применим в реальных вычислениях. Независимое доказательство единственности оставлено для упражнения 4.2.2. Ниже приводится доказательство в случае, когда заданы  $(u_{1j})_1^n$ .

Собственные векторы  $\mathbf{u}_i$  удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{J}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i. \quad (4.2.3)$$

Из векторов-столбцов  $(\mathbf{u}_i)_1^n$  составим матрицу  $\mathbf{U} : \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ . Из условий ортонормированности  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$  следует

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}.$$

Это означает, что  $\mathbf{U}^T$  является обратной к  $\mathbf{U}$ , т.е.  $\mathbf{U}$  ортогональна. Но если  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , то из теоремы 1.3.6 следует также, что  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ . Далее, пусть  $\mathbf{U}^T = \mathbf{X}$ , тогда  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}$ . Но это означает, что столбцы матрицы  $\mathbf{X}$ , как и столбцы  $\mathbf{U}$ , ортонормированы. Обозначим эти столбцы  $(\mathbf{x}_i)_1^n$ , так что  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ , тогда

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij}.$$

Причина, по которой были введены векторы  $\mathbf{x}_i$  заключается в том, что

$$\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}\} = \{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}\} \quad (4.2.4)$$

являются заданными величинами.

Теперь перепишем уравнения на собственные значения (4.2.3) в терминах  $\mathbf{x}_i$ . Набор уравнений (4.2.3) для  $i = 1, 2, \dots, n$  можно переписать как

$$\mathbf{J}\mathbf{U} = \mathbf{U}\Lambda. \quad (4.2.5)$$

Транспонируя, получаем

$$\mathbf{X}\mathbf{J} = \Lambda\mathbf{X}. \quad (4.2.6)$$

В развернутой записи уравнение принимает вид

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} = \Lambda [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]. \quad (4.2.7)$$

Рассмотрим столбцы, входящие в это уравнение, по отдельности. Первый столбец имеет вид

$$a_1 \mathbf{x}_1 - b_1 \mathbf{x}_2 = \Lambda \mathbf{x}_1. \quad (4.2.8)$$

Умножая его слева на  $\mathbf{x}_1^T$  и используя свойства  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 = 1$ ,  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = 0$ , находим

$$a_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 = a_1 = \mathbf{x}_1^T \Lambda \mathbf{x}_1.$$

Теперь перепишем уравнение (4.2.8) как

$$b_1 \mathbf{x}_2 = a_1 \mathbf{x}_1 - \Lambda \mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_2.$$

Вектор  $\mathbf{z}_2$  известен, поскольку известны  $a_1, \mathbf{x}_1, \Lambda$ . Вектор  $\mathbf{x}_2$  должен быть единичным, так что

$$b_1 \|\mathbf{x}_2\| = b_1 = \|\mathbf{z}_2\|.$$

и  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2/b_1$ . Получив  $a_1, b_1, \mathbf{x}_2$ , перейдем к следующему столбцу (4.2.7):

$$-b_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 - b_2 \mathbf{x}_3 = \Lambda \mathbf{x}_2.$$

Снова умножая его на  $\mathbf{x}_2^T$ , находим  $a_2 = \mathbf{x}_2^T \Lambda \mathbf{x}_2$ , а потом

$$b_2 \mathbf{x}_3 = a_2 \mathbf{x}_2 - b_1 \mathbf{x}_1 - \Lambda \mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_3,$$

так что

$$b_2 \|\mathbf{x}_3\| = b_2 = \|\mathbf{z}_3\|, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{z}_3/b_3$$

и т.д. Этот метод называется алгоритмом Ланцоша: см. Ланцош (Lanczos) [203], Голуб [132], Голуб и Ван Лоан [135], Каутски (Kautsky) и Голуб [192]. С его помощью строится матрица  $\mathbf{J}$  и в то же время получаются столбцы  $(\mathbf{x}_i)_1^n$ , обладающие свойством  $\mathbf{X} = \mathbf{U}^T$ .

По существу, выше был описан обратный вариант исходного алгоритма Ланцоша. Исходный алгоритм решал следующую задачу. Пусть дана симметричная матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{x}_1$  такой, что  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 = 1$ . Найти симметричную трехдиагональную матрицу  $\mathbf{J}$  и ортогональную матрицу  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  такие, что  $\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{J} \mathbf{X}^T$ . В нашем случае мы стартовали с матрицы  $\mathbf{A} = \Lambda$ .

Якобиева матрица была определена как *положительно полуопределенная* симметричная трехдиагональная матрица со строго отрицательными кодиагональными элементами. Если спектр  $(\lambda_i)_1^n$  удовлетворяет неравенству (4.2.2) и при этом  $\lambda_1 \geq 0$ , то матрица  $\mathbf{J}$ , построенная согласно алгоритму Ланцоша из матрицы  $\mathbf{A} \equiv \Lambda$ , якобиева. ■

### Упражнения 4.2

- 1) Показать, что векторы  $\mathbf{x}_i$ , построенные согласно алгоритму Ланцоша, удовлетворяют условию

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

хотя ортогональность явно установлена только при  $|i - j| \leq 1$ .

- 2) Показать, что не существует двух различных матриц  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}'$  с одинаковыми спектрами собственных значений и с одинаковыми значениями первых компонент  $(u_{1i})_1^n$  отнормированных собственных векторов.
- 3) Переписать процедуру, начиная с уравнения (4.2.5), для решения исходной задачи Ланцоша.

### 4.3. Варианты обратной задачи для якобиевой матрицы

Сначала введем некоторые обозначения. Пусть  $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$ . Множество собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ , *спектр*  $\mathbf{A}$ , обозначается  $\sigma(\mathbf{A})$ . Если матрица  $\mathbf{A}$  симметрична, т.е.  $\mathbf{A} \in S_n$ , то  $\sigma(\mathbf{A})$  является последовательностью действительных чисел  $(\lambda_i)_1^n$ , где  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Если  $\mathbf{M}, \mathbf{K} \in S_n$ , то множество собственных значений уравнения (3.1.1) обозначается  $\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{K})$ . Это снова последовательность действительных чисел  $(\lambda_i)_1^n$ , упорядоченных условием  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

См. Каутски и Голуб [192], де Бор (deBoor) и Сафф (Saff) [76], где задача для якобиевых матриц рассмотрена в более общем контексте. В работе Фридлэнда (Friedland) и Мелкмана (Melkman) [94] рассматривается обратная задача на собственные значения для неотрицательных матриц.

Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$ , тогда матрицу, полученную при удалении из  $\mathbf{A}$   $i$ -й строки и  $i$ -го столбца, называют *усеченной*. Иногда будем обозначать ее  $\mathbf{A}_i$ , а ее собственные значения —  $\sigma(\mathbf{A}_i)$ .

Теперь положим, что  $\mathbf{A} \in S_n$  является якобиевой матрицей  $\mathbf{J}$ , тогда ее собственные значения различны, а собственные значения  $\sigma(\mathbf{J}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$  строго чередуются с  $(\lambda_i)_1^n$ , т.е.

$$0 \leq \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{n-1} < \lambda_n. \quad (4.3.1)$$

Задача восстановления  $\mathbf{J}$  по  $\sigma(\mathbf{J})$  и  $\sigma(\mathbf{J}_1)$ , по всей видимости, впервые встречается в работе Хохштадта (Hochstadt) [173]. В ней было показано, что существует не больше одной такой матрицы  $\mathbf{J}$  с требуемыми

свойствами. В другой работе Хохштадта [176] была предпринята попытка построить единственную якобиеву матрицу, но не было показано, что предложенный метод всегда приводит к действительным значениям кодиагональных элементов  $b_i$ . В работе Хольда [160] был представлен другой метод и было доказано, что теоретически он всегда применим при условии, что собственные значения удовлетворяют условию чередования (4.3.1). На практике, однако, было обнаружено, что метод неприменим из-за потери значащих цифр. Хольд также показал, что конструкция Хохштада всегда приводит к действительным  $b_i$  при условии (4.3.1). В работе Грэя (Gray) и Вилсона (Wilson) [154] можно найти альтернативное индуктивное построение  $\mathbf{J}$ . Независимое доказательство единственности дано в работе Хольда [160].

В этом разделе будут представлены два метода построения  $\mathbf{J}$ . Первый из них основан на теории ортогональных полиномов, описанных в разделе 3.2. В основе второго метода, который в дальнейшем будет обобщен на случай обратных задач для ленточных матриц, лежит алгоритм Ланцоша, описанный в разделе 4.2.

Отметим, что по нашему определению якобиевы матрицы *положительно полуопределены*. Для получения многих результатов требуется только чередование  $\lambda$  и  $\mu$  (4.3.1) без каких-либо ограничений на положительность определенности.

Остановимся подробнее на первом методе. Пусть  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{J}_n) = (\mu_i)_1^{n-1}$  известны и удовлетворяют (4.3.1). Напомним, что  $\mathbf{J}_n$  получается после удаления  $n$ -й строки и  $n$ -го столбца из  $\mathbf{J}$ . Теперь будем использовать нормированные многочлены  $p_i(\lambda)$  вместо многочленов  $P_i(\lambda)$  из уравнения (3.1.5). Выпишем два из них:

$$p_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad p_{n-1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \mu_i). \quad (4.3.2)$$

Это  $n$ -ый и  $(n-1)$ -ый нормированные многочлены последовательности с весами, даваемыми уравнением (3.2.13), т. е.

$$w_i = \gamma / \{p_{n-1}(\lambda_i) p_n'(\lambda_i)\}. \quad (4.3.3)$$

Кроме того, они являются  $n$ -ым и  $(n-1)$ -ым главными минорами матрицы  $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J})$ . Поэтому  $p_r(\lambda)$  удовлетворяют уравнению

$$p_r(\lambda) = (\lambda - a_r) p_{r-1}(\lambda) - b_{r-1}^2 p_{r-2}(\lambda). \quad (4.3.4)$$

Метод Хольда построения  $\mathbf{J}$  заключается в следующем. Стартуя с  $p_n(\lambda)$ ,  $p_{n-1}(\lambda)$ , находим  $p_{n-2}(\lambda)$ , в процессе вычисляя  $a_n$  и  $b_{n-1}$ .



Далее, используя  $p_{n-1}(\lambda), p_{n-2}(\lambda)$ , получаем  $p_{n-3}(\lambda)$ , вычисляем  $a_{n-1}$  и  $b_{n-2}$ , и т. д. Данный процесс внутренне нестабилен, потому что многочлены  $p_{n-2}, p_{n-3}, \dots, p_1$  получаются последовательным исключением лидирующих членов предшествующих пар многочленов: процесс становится нестабильным вследствие исключения лидирующих порядков.

В работе де Бора и Голуба [75] представлен совсем иной подход. После нахождения весов  $w_i$ , используя (4.3.3), строятся многочлены в естественном порядке согласно анализу раздела 3.2, т. е.

$$p_{-1}(\lambda) = 0, \quad p_0(\lambda) = 1, \quad (4.3.5)$$

$$p_r(\lambda) = (\lambda - a_r)p_{r-1}(\lambda) - b_{r-1}^2 p_{r-2}(\lambda), \quad (4.3.6)$$

где величины  $a_r, b_r$  имеют вид

$$a_r = \frac{(p_{r-1}, \lambda p_{r-1})}{\|p_{r-1}\|^2}, \quad b_r = \frac{\|p_r\|}{\|p_{r-1}\|}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.3.7)$$

Этот процесс устойчив при численном счете.

Основная проблема такого подхода заключалась в вычислении весов  $w_i$ . Для преодоления этой трудности было использовано отражение  $\mathbf{J}$  относительно второй диагонали. Матрица

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \cdot \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

ортогональна и симметрична, так что  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$ . Она обращает порядок следования строк и столбцов  $\mathbf{J}$ , т. е. она преобразует  $\mathbf{J}$  следующим образом:

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_n & -b_{n-1} & & & \\ -b_{n-1} & a_{n-1} & -b_{n-2} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -b_1 & \\ & & & -b_1 & a_1 \end{bmatrix}. \quad (4.3.9)$$

Если при этом элементы  $\bar{\mathbf{J}}$  обозначить  $\bar{a}_r, \bar{b}_r$ , то

$$\bar{a}_r = a_{n+1-r}, \quad \bar{b}_r = b_{n-r}.$$

Главные миноры  $\lambda\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}$  будем обозначать  $\bar{p}_r(\lambda)$ .

**Теорема 4.3.1.** При  $i = 1, 2, \dots, n$

$$p_{n-1}(\lambda_i) \bar{p}_{n-1}(\lambda_i) = (b_1 b_2 \dots b_{n-1})^2 = b^2.$$

**Доказательство.** Ненадолго нарушим порядок изложения и воспользуемся обозначениями, которые будут введены в разделе 6.2. Пусть  $\alpha$  обозначает последовательность  $\{2, 3, \dots, n-1\}$ , тогда

$$p_{n-1}(\lambda_i) = B(\alpha \cup 1), \quad \bar{p}_{n-1}(\lambda_i) = B(\alpha \cup n).$$

Согласно теореме Сильвестра (следствие 2 теоремы 6.2.2), используя  $B(\alpha)$  в качестве центрального блока матрицы, получаем

$$0 = B(\alpha) \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} B(\alpha \cup 1) & B(\alpha \cup 1; \alpha \cup n) \\ B(\alpha \cup 1; \alpha \cup n) & B(\alpha \cup n) \end{vmatrix},$$

т. е.  $0 = p_{n-1}(\lambda_i) \bar{p}_{n-1}(\lambda_i) - (b_1 b_2 \dots b_{n-1})^2$ . ■

Этот результат означает, что многочлены  $\bar{p}_n(\lambda), \bar{p}_{n-1}(\lambda), \dots, \bar{p}_1(\lambda), \bar{p}_0(\lambda)$  являются нормированными и связаны с весами следующим образом:

$$w_i = \frac{b^2}{\bar{p}_{n-1}(\lambda_i) \bar{p}'_n(\lambda_i)} = \frac{p_{n-1}(\lambda_i)}{p'_n(\lambda_i)}. \quad (4.3.10)$$

Построить эти веса намного проще, чем веса (4.3.3). Используя данный метод, элементы матрицы  $\mathbf{J}$  можно вычислить в следующем порядке:  $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{b}_{n-1}, \bar{a}_n$ , иначе говоря, в порядке  $a_n, b_{n-1}, a_{n-1}, \dots, b_1, a_1$ .

Второй метод построения  $\mathbf{J}$  предложен в работе Голуба и Болея (Boley) [133]. См. также работу де Бора и Саффа [76]. Он опирается на тот факт, что если известны  $\sigma(\mathbf{J})$  и  $\sigma(\mathbf{J}_1)$ , то можно вычислить вектор  $\mathbf{x}_1$ , состоящий из первых компонент собственных векторов  $\mathbf{J}$ , являющихся данными для реализации алгоритма Ланцоша (см. раздел 4.2). Можно провести анализ для произвольной симметричной матрицы  $\mathbf{A} \in S_n$ , а не ограничиваться только якобиевой матрицей. В работе Барсилона [19] основное внимание уделено собственным векторам, соответствующим  $\lambda_i$  и  $\mu_i$ , и никак не использованы  $\mu_i$  для нахождения величин  $x_{i1}$ . Как следствие, дальнейший вычислительный анализ зашел в тупик.

Если  $\mathbf{A} \in S_n$ , то собственные значения  $\mathbf{A}_1$  являются стационарными точками  $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$  при условии  $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$  и  $u_1 = 0$ , т. е.  $\mathbf{u}^T \mathbf{e}_1 = 0$ . Таким образом, они являются стационарными точками

$$f = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} - 2\nu \mathbf{u}^T \mathbf{e}_1, \quad (4.3.11)$$

где  $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$  и  $\lambda, \nu$  — лагранжевы множители. Из условия стационарности  $f$  следует

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} - \nu\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}. \quad (4.3.12)$$

Поскольку на собственные векторы  $\mathbf{u}_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  натягивается пространство  $V_n$ , можно написать

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i, \quad (4.3.13)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \mathbf{u}_i,$$

так что (4.3.12) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \alpha_i \mathbf{u}_i = \nu \mathbf{e}_1.$$

Из условия ортогональности  $\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i = \delta_{ij}$  следует

$$(\lambda_j - \lambda) \alpha_j = \nu \mathbf{u}_j^T \mathbf{e}_1 = \nu u_{1j} = \nu x_{j1},$$

где было использовано (4.2.4). Подставляя  $\alpha_i$  в (4.3.13), находим

$$\mathbf{u} = \nu \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1} \mathbf{u}_i}{\lambda_i - \lambda}, \quad (4.3.14)$$

при этом из условий  $u_1 = 0$  и  $u_{1i} = x_{i1}$  следует уравнение на собственные значения

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_{i1})^2}{\lambda_i - \lambda} = 0. \quad (4.3.15)$$

Заметим, что если матрица  $\mathbf{A}$  якобиева, то ни один из коэффициентов  $x_{i1}$  не равен нулю (упражнение 3.3.1). Из анализа раздела 2.9 следует, что корни  $(\mu_i)_1^{n-1}$  этого уравнения строго чередуются с  $(\lambda_i)_1^n$ , как в (4.3.1).

Поскольку  $\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}\}$  и  $\mathbf{x}_1$  является первым столбцом ортогональной матрицы  $\mathbf{X} = \mathbf{U}^T$ , имеем  $\|\mathbf{x}_1\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^n (x_{i1})^2$ , откуда следует тождество

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_{i1})^2}{\lambda_i - \lambda} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \lambda)}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)} \quad (4.3.16)$$

(Заметим, что при больших  $\lambda$  выражения с обеих сторон стремятся к  $-1/\lambda$ ). Умножив (4.3.16) на  $(\lambda_j - \lambda)$  и положив  $\lambda = \lambda_j$ , получаем

$$(x_{i1})^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^{n'} (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.17)$$

где штрих указывает на то, что член с  $j = i$  опущен. Условие чередования гарантирует, что правая часть (4.3.17) строго положительна для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, из этого уравнения находим  $\mathbf{x}_1$ .

Еще раз подчеркнем содержательную важность уравнений (4.3.11)–(4.3.17). Показано, что если  $\mathbf{A}$  является произвольной симметричной матрицей, то матрицы  $\sigma(\mathbf{A})$  и  $\sigma(\mathbf{A}_1)$  определяют вектор  $\mathbf{x}_1$ , состоящий из первых компонент нормированных собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ . Обратно, по  $\sigma(\mathbf{A})$  и  $\mathbf{x}_1$  определяется  $\sigma(\mathbf{A}_1)$ .

Существует третья обратная задача, которая возникает в некоторых ситуациях. Имея две строго возрастающие последовательности  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\lambda_i^*)_1^n$  с условием чередования

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_1^* < \lambda_2 < \lambda_2^* < \dots < \lambda_n < \lambda_n^* \quad (4.3.18)$$

нужно найти  $\mathbf{J} \in S_n$  такую, что  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{J}^*) = (\lambda_i^*)_1^n$ , где  $\mathbf{J}^* = (a_{11}^* - a_{11})\mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{J}$ . Матрица  $\mathbf{J}^*$  отличается от  $\mathbf{J}$  только элементом (1,1).

Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  — произвольная симметричная матрица и  $\mathbf{A}^*$  отличается от  $\mathbf{A}$  только элементом (1,1), т. е.  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + (a_{11}^* - a_{11})\mathbf{E}_{1,1}$ . Покажем, что  $\sigma(\mathbf{A})$  и  $\sigma(\mathbf{A}^*)$  определяют  $\mathbf{x}_1$ . Уравнение на собственные значения для  $\mathbf{A}^*$  имеет вид

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (4.3.19)$$

или

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + (a_{11}^* - a_{11}) u_1 \mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{u}.$$

При подстановке

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \quad (4.3.20)$$

в уравнение (4.3.19) получаем

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \mathbf{u}_i + (a_{1,1}^* - a_{1,1}) u_1 \mathbf{e}_1 = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i,$$

и, следовательно,

$$(\lambda - \lambda_i) \alpha_i = (a_{1,1}^* - a_{1,1}) u_1 u_{1i},$$

откуда при подстановке в (4.3.20) находим

$$\mathbf{u} = (a_{1,1}^* - a_{1,1}) u_1 \sum_{i=1}^n \frac{u_{1,i} \mathbf{u}_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Приравнявая первые компоненты обеих частей уравнения, получаем

$$1 = (a_{1,1}^* - a_{1,1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1}^2}{\lambda - \lambda_i},$$

где  $x_{i1} = u_{1i}$ . Корни этого уравнения равны  $(\lambda_i^*)_1^n$ , так что

$$1 - (a_{1,1}^* - a_{1,1}) \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1}^2}{\lambda - \lambda_i} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda - \lambda_i^*}{\lambda - \lambda_i} \right) \quad (4.3.21)$$

и, следовательно,

$$(a_{1,1}^* - a_{1,1}) x_{i1}^2 = (\lambda_i^* - \lambda_i) \prod_{j=1}^n \left( \frac{\lambda_i - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \quad (4.3.22)$$

Сравнивая следы матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^*$ , видим, что

$$a_{1,1}^* - a_{1,1} = \sum_{j=1}^n (\lambda_j^* - \lambda_j) > 0. \quad (4.3.23)$$

Таким образом, уравнение (4.3.22) выражает  $(x_{i1})^2$  через  $\sigma(\mathbf{A})$  и  $\sigma(\mathbf{A}^*)$ , а условие чередования (4.3.18) гарантирует, что величина  $(x_{i1})^2$  положительна. В случае якобиевой матрицы  $\mathbf{A}$ , безусловно, можно использовать

алгоритм Ланцоша. Заметим, что нигде в доказательствах нам не понадобилось условие неотрицательности  $\lambda_1$  — необходимо только строгое чередование.

Матрицу  $\mathbf{A}$  называют *персимметричной*, если она симметрична, а также симметрична относительно второй диагонали, идущей из правого верхнего угла в левый нижний. Таким образом,  $\mathbf{A}$  является персимметричной, если  $\overline{\mathbf{A}}$  из (4.3.9) удовлетворяет условию

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}. \quad (4.3.24)$$

Если  $\mathbf{A}$  трехдиагональна и персимметрична, то

$$a_r = a_{n+1-r}, \quad b_r = b_{n-r}. \quad (4.3.25)$$

Последняя обратная задача, которую мы рассмотрим здесь, касается построения персимметричной якобиевой матрицы. Здесь нам понадобится только один спектр вместо двух.

**Теорема 4.3.2.** *Существует единственная персимметричная якобиева матрица  $\mathbf{J}$  со спектром  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$ , удовлетворяющим условию  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .*

**Доказательство.** Вероятно, самым простым доказательством является нахождение весов для построения ортогональных многочленов  $p_r(\lambda)$ , зная собственные векторы  $(\lambda_i)_1^n$ . Действительно, если  $\mathbf{J}$  персимметрична, то минор  $p_r(\lambda)$  равен  $\overline{p}_r(\lambda)$ . Но по теореме 4.3.1

$$[p_{n-1}(\lambda_i)]^2 = b^2, \quad \text{т. е., } p_{n-1}(\lambda_i) = \pm b,$$

так что из уравнения (4.3.10) следует

$$w_i = \pm b/p'_n(\lambda_i). \quad (4.3.26)$$

Поскольку знаки  $p'_n(\lambda_i)$  различны для разных  $i$ , то и знаки в (4.3.26) должны меняться при условии, что предполагается положительность  $w_i$ . Величина  $b$  не важна для построения  $p_r(\lambda)$ . Другой вариант этой обратной задачи см. в работе Хохштадта [182]. ■

### Упражнения 4.3

1) Показать, что если  $\mathbf{B} = \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{J}$ , то

$$B(1, 2, \dots, n-1; 2, 3, \dots, n) = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

- 2) Показать, что  $x_{i1}$ , полученный из (4.3.22), должен удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = 1.$$

- 3) Используя компьютер, попытайтесь построить якобиеву матрицу по методу Хальда или де Бора и Голуба. Стартуя с матрицы  $\mathbf{J}$  с элементами

$$a_i = 2, \quad b_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad a_n = 2,$$

установите рекуррентные соотношения, чтобы получить  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ . Затем используйте эти данные для построения  $\mathbf{J}$ .

#### 4.4. Восстановление систем масс, связанных пружинами, по крайевым условиям

Задачу построения расположенной линейно системы масс, соединенных пружинами, можно разделить на три этапа:

- i) переформулировать задачу как обратную задачу на собственные значения для якобиевой матрицы  $\mathbf{J}$ .
- ii) Решить эту задачу и найти  $\mathbf{J}$ .
- iii) Восстановить матрицы инерции  $\mathbf{M}$  и жесткости  $\mathbf{K}$  по  $\mathbf{J}$ .

Первый этап обсуждался в разделе 3.1, повторим его здесь. Частотное уравнение, описывающее свободные колебания линейно расположенной системы, имеет вид

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.4.1)$$

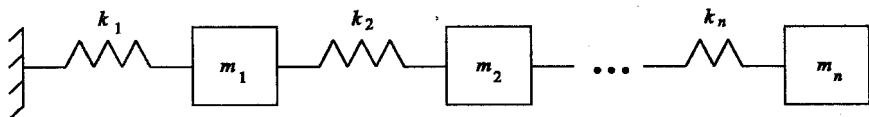
Для системы, приведенной на рис. 4.4.1, матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  приведены явно в (2.2.7). Пусть  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$ , где  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  и  $\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ , тогда (4.4.1) преобразуется к виду

$$(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.4.2)$$

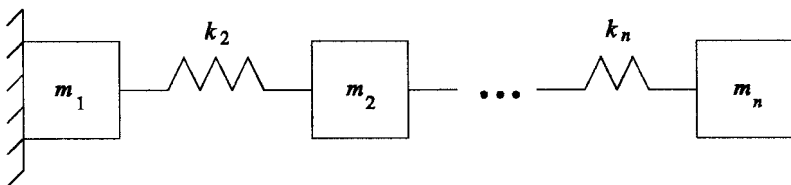
где

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}. \quad (4.4.3)$$

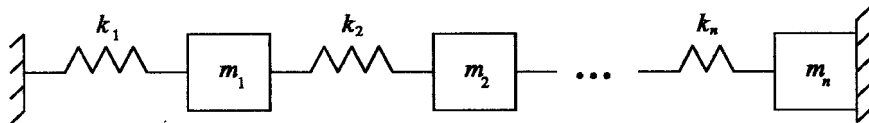
Второй этап являлся предметом изучения раздела 4.3. Для данных спектров систем на рис. 4.4.1(а) и (б), т. е.  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{J}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ , построим  $\mathbf{x}_1$ , состоящий из первых компонент собственных векторов  $\mathbf{u}_i$  (4.4.2), и потом восстановим матрицу  $\mathbf{J}$ , используя алгоритм Ланцоша, описанный в разделе 4.2.



а)



б)



в)

Рис. 4.4.1. Два возможных случая крепления конца системы с одним свободным концом

Осталось рассмотреть третий этап. Используя явный вид  $\mathbf{K}$  из уравнения (2.2.7), можно убедиться в том, что

$$\mathbf{e} = \{1, 1, \dots, 1\}, \quad (4.4.4)$$

тогда

$$\mathbf{K}\mathbf{e} = \{k_1, 0, 0, \dots, 0\}. \quad (4.4.5)$$

Физически это уравнение означает, что некоторая статическая сила  $k_1$ , приложенная к массе  $m_1$ , растягивает первую пружину на единичную длину и в то же самое время смещает все остальные массы



$m_2, m_3, \dots, m_n$  на единичную длину вправо, словно все, находящееся справа от  $m_1$ , является твердым телом. Ввиду того что  $\mathbf{K} = \mathbf{DJD}$ , имеем

$$\mathbf{DJD}\mathbf{e} = \mathbf{DJD}\{1, 1, \dots, 1\} = \{k_1, 0, 0, \dots, 0\},$$

т. е.

$$\mathbf{Jd} = \mathbf{J}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} = \{k_1/d_1, 0, 0, \dots, 0\}. \quad (4.4.6)$$

(Заметим, что  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , тогда как  $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .) Теперь нужно удостовериться, что полученный таким образом вектор  $\mathbf{d}$  является строго положительным.

**Теорема 4.4.1.** *Если  $\mathbf{J} \in S_n$  является невырожденной якобиевой матрицей, то  $\mathbf{J}^{-1}$  — строго положительная матрица, т. е. каждый элемент  $\mathbf{J}^{-1}$  строго положителен; запишем это как  $\mathbf{J}^{-1} > \mathbf{0}$ .*

**Доказательство.** Будем проводить доказательство по индукции. Пусть

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_1 & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{b} & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \{b_1, 0, \dots, 0\}.$$

Наша цель будет достигнута, если мы покажем, что из условия  $\mathbf{J}_1^{-1} > \mathbf{0}$  следует, что  $\mathbf{J}^{-1} > \mathbf{0}$ . Пусть

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} h_1 & \mathbf{k}^T \\ \mathbf{k} & \mathbf{H} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & -\mathbf{b}^T \\ -\mathbf{b} & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & \mathbf{k}^T \\ \mathbf{k} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что

$$-\mathbf{b}\mathbf{k}^T + \mathbf{J}_1\mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad -\mathbf{b}h_1 + \mathbf{J}_1\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Поскольку якобиева матрица  $\mathbf{J}$  не вырождена, она положительно определена, то же самое справедливо и для  $\mathbf{J}^{-1}$  (упражнение 1.4.2). Поэтому  $h_1 > 0$  и  $\mathbf{k} = \mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{b}h_1 > \mathbf{0}$ . (Заметим, что произведение строго положительной, по определению, матрицы  $\mathbf{J}_1^{-1}$  и неотрицательного ненулевого вектора  $\mathbf{b}$  строго положительно.) Следовательно,

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{b}\mathbf{k}^T + \mathbf{J}_1^{-1} > \mathbf{0}.$$

(Поскольку  $\mathbf{J}_1^{-1} > \mathbf{0}$ , условие  $\mathbf{H} > \mathbf{0}$  эквивалентно  $\mathbf{b}\mathbf{k}^T \geq \mathbf{0}$ , т. е.  $\mathbf{k} \geq \mathbf{0}$ ; а по существу,  $\mathbf{k} > \mathbf{0}$ .) Таким образом,  $\mathbf{H} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{k} > \mathbf{0}$  и  $h_1 > 0$ , так что  $\mathbf{J}^{-1} > \mathbf{0}$ . ■

Теперь вернемся к уравнению (4.4.6). Возьмем единственную построенную невырожденную матрицу  $\mathbf{J}$  и решим уравнение

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{J}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1, 0, \dots, 0\} = \mathbf{e}_1.$$

Решение  $\mathbf{x}$  строго положительно:  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Таким образом, решение уравнения (4.4.6) имеет вид

$$\mathbf{d} = c\mathbf{x},$$

для некоторого  $c > 0$ . Общая масса системы равна

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \|\mathbf{d}\|^2 = c^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Следовательно, зная  $m$  и  $\|\mathbf{x}\|^2$ , можно найти  $c > 0$  и  $\mathbf{d}$ , а значит, и  $\mathbf{D}$ . Далее,  $\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}$ , и, поскольку  $\mathbf{K}$  удовлетворяет (4.4.5), она с необходимостью (упражнение 4.4.1) имеет вид  $\mathbf{K} = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T$ , приведенный в уравнении (2.2.12), где  $\widehat{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . На этом построение завершается.

Восстановление по спектрам а) и с) производится аналогично, нужно лишь перенумеровать массы, начиная с правого конца (упражнение 4.4.2).

Данное построение может быть использовано в обратной ситуации: показано, что любая невырожденная якобиева матрица  $\mathbf{J}$  может быть однозначно представлена в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}, \quad (4.4.7)$$

где  $\mathbf{D}, \widehat{\mathbf{K}}$  — строго положительные диагональные матрицы и  $\|\mathbf{D}\| = 1$ , что соответствует случаю  $m = 1$  в уравнении (4.4.6).

Теперь рассмотрим зафиксированную с обоих концов систему, показанную на рис. 4.4.2 а. По существу, имеется только одно ограничение, которое может быть наложено на  $m_n$ , как показано на рис. 4.4.2 б.

Начнем анализ как и прежде. Матрица жесткости системы (а) имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & -k_n & \\ & & & & -k_n & k_n & k_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (4.4.8)$$

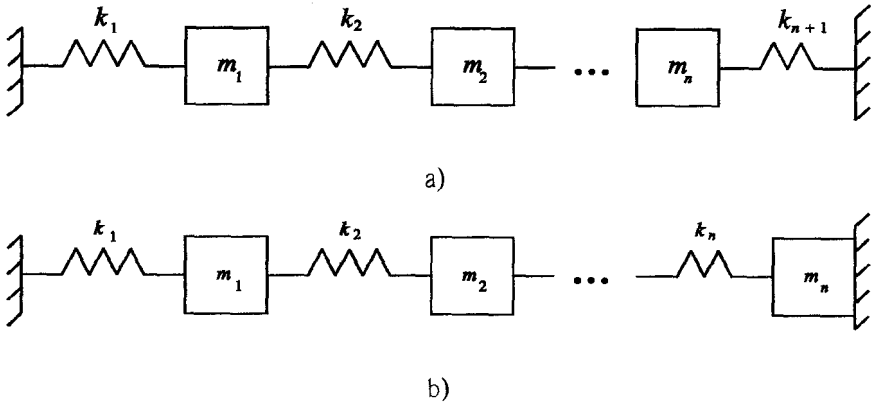


Рис. 4.4.2. Система с зафиксированными концами и система со связью

Зная спектры  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$  систем (а) и (б), можно построить  $\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$ , где снова  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$ . Однако теперь

$$\mathbf{K}\{1, 1, \dots, 1\} = \{k_1, 0, 0, \dots, 0, k_{n+1}\}, \quad (4.4.9)$$

т. е. чтобы произвести статическое смещение системы масс на единичную длину, необходимо приложить две силы:  $k_1$  к массе  $m_1$  и  $k_{n+1}$  к массе  $m_n$ . Таким образом,

$$\mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}\{1, 1, \dots, 1\} = k_1\mathbf{e}_1 + k_{n+1}\mathbf{e}_n,$$

так что

$$\mathbf{J}\mathbf{d} = \mathbf{J}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} = (k_1/d_1)\mathbf{e}_1 + (k_{n+1}/d_n)\mathbf{e}_n. \quad (4.4.10)$$

Сначала рассмотрим уравнение

$$\mathbf{J}\mathbf{y} = \mathbf{e}_n. \quad (4.4.11)$$

Произведя простые вычисления, получаем решение вида

$$y_i = b_i b_{i+1} \dots b_{n-1} P_{i-1} / P_i, \quad (4.4.12)$$

где  $P_i$  —  $i$ -ый главный минор  $\mathbf{J}$  (см. уравнение (1.4.6)). Поскольку  $\mathbf{J}$  положительно определена, из уравнения (4.4.12) вытекает, что решение у

положительно, как и следует из теоремы 4.4.1. Аналогично (упражнение 4.4.3) можно найти решение уравнения

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1. \quad (4.4.13)$$

Все, что нам необходимо, согласно теореме 4.4.1, — это показать, что  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ .

Используя  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , можно переписать решение (4.4.10) в виде

$$\mathbf{d} = (k_1/d_1)\mathbf{x} + (k_{n+1}/d_n)\mathbf{y}. \quad (4.4.14)$$

В частности,

$$\begin{aligned} d_n &= (k_1/d_1)x_n + (k_{n+1}/d_n)y_n \\ &= \frac{k_1}{d_1}x_n + \frac{k_{n+1}}{d_n} \frac{P_{n-1}}{P_n}. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Но  $P_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$  и  $P_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \mu_i$ , так что уравнение (4.4.15) принимает вид

$$m_n - k_{n+1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \mu_i}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{k_1 d_n x_n}{d_1}. \quad (4.4.16)$$

Система, показанная на рис. 4.4.2 а, имеет  $2n + 1$  параметров. Выберем один из параметров и разделим на него оставшиеся  $2n$  параметров, в результате получим  $2n$  отношений. Спектры  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$  дают  $2n - 1$  отношений, таким образом, необходимо еще одно отношение. Выбранный параметр является попросту масштабным множителем, его можно было бы определить, зная общую массу или одну отдельную массу, например,  $m_n$ . Если считать  $m_n$  известной, то из уравнения (4.4.16) следует, что необходимое  $2n$ -ое отношение  $k_{n+1}/m_n$  должно удовлетворять неравенству

$$0 < \frac{k_{n+1}}{m_n} < \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n-1} \mu_i}, \quad (4.4.17)$$

на которое впервые обратили внимание в своей работе Найлен (Nylen) и Ухлиг (Uhlig) [253]. Ввиду того что выбранное отношение  $k_{n+1}/m_n$  удовлетворяет этому неравенству, уравнение (4.4.16) определяет  $k_1/d_1$ , поскольку величина  $x_n$  известна и  $d_n = m_n^{\frac{1}{2}}$ . Зная  $k_{n+1}/d_n$  и  $k_1/d_1$ ,

из уравнения (4.4.14) можно получить  $\mathbf{d}$ , а следовательно,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{D}^{-1}$ . На этом построение завершается.

Третья система свободна на обоих концах, как показано на рис. 4.4.3(а). Налагая связь на  $m_1$ , получаем зафиксированную с одного конца систему, представленную на рис. 4.4.3(б).

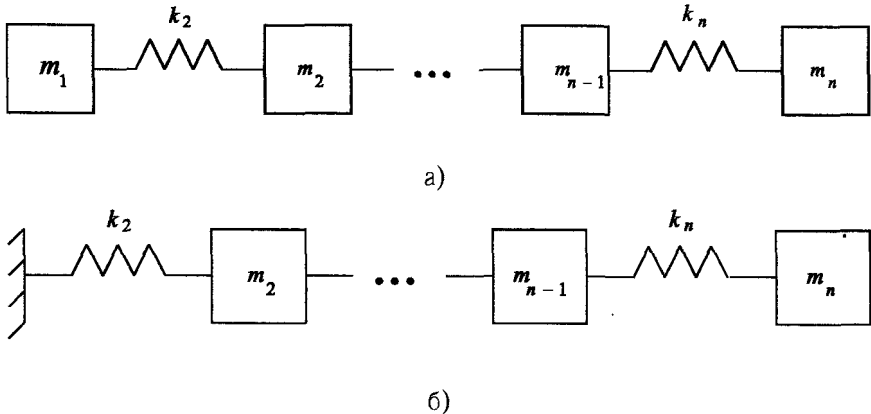


Рис. 4.4.3. Наложение связи на свободную с обоих концов систему

По существу, пара систем та же, что и на рис. 4.4.1, но с  $k_1 = 0$ . Рассуждения начинаются аналогично, единственное отличие заключается в том, что наименьшая частота системы (а) равна нулю  $\lambda_1 = 0$ . Тем не менее можно однозначно восстановить  $\mathbf{J}$  по  $\sigma(\mathbf{J})$  и  $\sigma(\mathbf{J}_1)$ , но теперь  $\mathbf{J}$  вырождена, т. е. положительно полуопределена.

Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  системы (а) удовлетворяет

$$\mathbf{K}\{1, 1, \dots, 1\} = 0. \quad (4.4.18)$$

Для завершения доказательства необходим аналог теоремы 4.4.1 в случае, когда  $\mathbf{J}$  вырождена.

**Теорема 4.4.2.** Если  $\mathbf{J}$  вырожденная якобиева матрица, то уравнение  $\mathbf{J}\mathbf{x} = 0$  имеет единственное строго положительное решение  $\mathbf{x}$ , нормированное условием  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

Доказательство очевидно (см. упражнение 4.4.4).

Теперь можно закончить восстановление  $\mathbf{J}$ . Пусть  $\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}$ , тогда (4.4.18) принимает вид

$$\mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{d} = 0.$$

Таким образом,  $\mathbf{d} = \mathbf{c}\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x}$  определяется по теореме 4.4.2, и если общая масса  $m = 1$ , то  $c = 1$ . Отсюда получаем  $\mathbf{d}$ , а следовательно,  $\mathbf{D}$  и

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D} = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T,$$

где  $\widehat{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Кроме того, можно использовать данный результат, чтобы показать, что произвольная вырожденная якобиева матрица представима в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}, \quad (4.4.19)$$

где первый диагональный элемент  $\widehat{\mathbf{K}}$  нулевой.

#### Упражнения 4.4

- 1) Показать, что если  $\mathbf{K}\mathbf{e} = k_1\mathbf{e}_1$ , а  $\mathbf{E}^{-1}$  имеет вид (2.2.10), то  $\mathbf{K}\mathbf{E}^{-T}$  двухдиагональна, а  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{E}^{-T}$  диагональна.
- 2) Восстановить систему, показанную на рис. 4.4.1 а, по спектрам  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$  систем (а) и (с) соответственно.
- 3) Используя решение (4.4.12) уравнения (4.4.11) и преобразование (4.3.9), переводящее  $\mathbf{J}$  в  $\bar{\mathbf{J}}$ , найти решение уравнения (4.4.13).
- 4) Привести конструктивное доказательство теоремы 4.4.2, переписав  $\mathbf{x}$  в терминах главных миноров  $\mathbf{J}$ .
- 5) Пусть известны собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  системы, приведенной на рис. 4.4.2 а, а также собственные значения  $(\lambda_i^*)_1^n$  той же системы при замене коэффициента жесткости  $k_{n+1}$  на некоторый неизвестный коэффициент  $k_{n+1}^*$ . Показать, что существует однопараметрическое семейство систем, каждый член которого имеет указанный спектр.
- 6) Показать, что если  $\mathbf{J}$  является невырожденной якобиевой матрицей, то обратная к ней матрица  $\mathbf{C} = \mathbf{J}^{-1}$  имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_1v_2 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_1v_n & u_2v_n & \dots & u_nv_n \end{bmatrix},$$

т. е.

$$c_{ij} = \begin{cases} u_i v_j, & i \leq j, \\ u_j v_i, & i \geq j, \end{cases}$$

а также что  $(u_i)_1^n, (v_i)_1^n$  строго положительны и удовлетворяют неравенству

$$\frac{u_1}{v_1} \leq \frac{u_2}{v_2} \leq \dots \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

Этот результат содержится в книге Гантмахера и Крейна [98], но, возможно, был известен и ранее.

#### 4.5. Восстановление модифицированных систем

Простейшим способом модификации системы является прикрепление пружины к свободному концу, таким образом, переходя от системы на рис. 4.5.1 а к системе на рис. 4.5.1 б. (Массы перенумерованы так, чтобы пружина была прикреплена к  $m_1$ .)

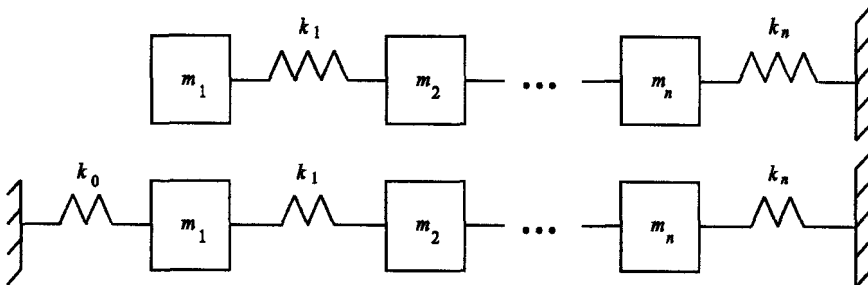


Рис. 4.5.1. Система с дополнительной пружиной

Ниже приведен пример анализа раздела 4.3. Спектры для (а) и (б) имеют вид  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{J}^*) = (\lambda_i^*)_1^n$  соответственно. При внесении дополнительной жесткости в систему, получаем  $\lambda_i^* > \lambda_i$ , согласно (4.3.21). Далее действуем следующим образом:

i) Из условия на след получаем

$$a_1^* - a_1 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^* - \lambda_i).$$

- ii) Используя  $a_1 = k_1/m_1$  и  $a_1^* = (k_1 + k_0)/m_1$ , находим  $k_0/m_1 = a_1^* - a_1$ .
- iii) Используя  $a_1^* - a_1$  и уравнение (4.3.22), получаем  $x_{i1}^2$ , и, следовательно,  $\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}\}$ .
- iv) Используя алгоритм Ланцоша, восстанавливаем  $\mathbf{J}$ .
- v) Используя анализ раздела 4.4, находим  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ , зная  $\mathbf{J}$ .

Для получения другой модификации можно добавить массу в систему, а именно  $m_1^*$  к  $m_1$ . В этом случае сначала легче работать с исходным уравнением (4.4.1), чем с приведенным уравнением (4.4.2). Вновь стартуем с зафиксированной на одном конце системы, приведенной на рис. 4.5.1 а. Задача на собственные значения в случае (а) имеет вид

$$\mathbf{K}\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{M}\mathbf{y}_i,$$

тогда как для модифицированной системы имеем

$$\mathbf{K}\mathbf{y} = \lambda \mathbf{M}^* \mathbf{y}, \quad (4.5.1)$$

где  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + m_1^* \mathbf{E}_{1,1}$ . Поскольку к системе была добавлена масса, собственные значения должны удовлетворять неравенству

$$0 < \lambda_1^* < \lambda_1 < \dots < \lambda_n^* < \lambda_n. \quad (4.5.2)$$

Выразим  $\mathbf{y}$  как линейную комбинацию  $\mathbf{y}_i$ :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}_i, \quad (4.5.3)$$

тогда

$$\mathbf{K}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{K}\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \mathbf{M}\mathbf{y}_i$$

и

$$\mathbf{M}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{M}\mathbf{y}_i + m_1^* \mathbf{E}_{1,1} \mathbf{y},$$

так что уравнение (4.5.1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \mathbf{M}\mathbf{y}_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{M}\mathbf{y}_i + \lambda m_1^* \mathbf{E}_{1,1} \mathbf{y}.$$



Умножая обе части слева на  $\mathbf{y}_j^T$  и используя условие ортонормированности  $\mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i = \delta_{ij}$ , получаем

$$\alpha_j \lambda_j = \alpha_j \lambda + \lambda m_1^* y_{1j} y_{1j},$$

а при подстановке  $\alpha_j$  в (4.5.3), приравнявая первые компоненты векторов с обеих сторон, находим

$$1 = \lambda m_1^* \sum_{i=1}^n \frac{(y_{1i})^2}{\lambda_i - \lambda}. \quad (4.5.4)$$

Чтобы использовать это уравнение для получения первых компонент  $u_{1i}$  собственных векторов  $\mathbf{u}_i$  приведенного уравнения (для подстановки в уравнение Ланцоша), нужно выразить  $y_{1i}$  через  $u_{1i}$ . Из уравнения  $\mathbf{D} \mathbf{u} = \mathbf{u}$  следует  $d_1 y_{1i} = u_{1i} = x_{i1}$ , так что можно переписать (4.5.4) в виде

$$1 = \lambda \alpha \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i1})^2}{\lambda_i - \lambda}, \quad \alpha = \frac{m_1^*}{m_1}.$$

Ввиду того что  $(\lambda_i^*)_1^n$  являются корнями уравнения, имеем

$$1 - \lambda \alpha \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i1})^2}{\lambda_i - \lambda} = c \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i^* - \lambda)}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)}. \quad (4.5.5)$$

В пределах  $\lambda = 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем

$$1 = c \prod_{i=1}^n (\lambda_i^* / \lambda_i), \quad 1 + \alpha \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = c.$$

Из условия чередования (4.5.2) следует

$$c = \prod_{i=1}^n (\lambda_i / \lambda_i^*) > 1.$$

Из условия ортонормированности получаем  $\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = 1$ , так что  $m_1^* / m_1 = \alpha = c - 1 > 0$ . Наконец, умножая (4.5.5) на  $\lambda_i - \lambda$ , при  $\lambda = \lambda_i$ , находим

$$-\lambda_i \alpha x_{i1}^2 = c \prod_{j=1}^n (\lambda_j^* - \lambda_i) / \prod_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_i). \quad (4.5.6)$$

Условие чередования (4.5.2) гарантирует, что  $x_{i1}^2 > 0$ . Далее используем  $\mathbf{x}_1$  в алгоритме Ланцоша и по стандартной процедуре находим матрицы инерции и жесткости.

Существует множество других способов получить второй спектр, см. работы Найлена и Улиха [253], [254]. Рам (Ram) [276] рассматривал в своей работе систему, приведенную на рис. 4.5.1, с одновременно добавленными массой  $m$  к  $m_1$  и пружиной  $k_0$ . Автор использовал несколько простых, но при этом значительных результатов, полученных в работе Рама и Блеха (Blech) [277].

Закончим раздел рассмотрением системы соединенных пружинами масс, приведенной на рис. 4.5.1а, с приложенной к свободному концу осциллирующей силой  $F \sin \omega t$ . Матричное уравнение, описывающее отклик  $\mathbf{y} \sin \omega t$ , имеет вид

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{y} = F \mathbf{e}_1.$$

Пусть

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{y}_i,$$

где  $\mathbf{y}_i$  —  $i$ -ый собственный вектор, нормированный условием

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = \delta_{ij}.$$

Тогда

$$(\lambda_i - \lambda) \alpha_i = F y_{1i},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{y} = F \sum_{i=1}^n \frac{y_{1i} \mathbf{y}_i}{\lambda_i - \lambda},$$

откуда получаем

$$y_1 = F \sum_{i=1}^n \frac{y_{1i}^2}{\lambda_i - \lambda}. \quad (4.5.7)$$

В случае если задача на собственные значения приводится к стандартной форме,  $\mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{u}$ , откуда  $d_1 y_{1i} = u_{1i} = x_{i1}$ , так что можно написать

$$y_1 = \frac{F}{m_1} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i1}^2}{\lambda_i - \lambda}, \quad (4.5.8)$$

где, как обычно,  $\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}\}$  является вектором, состоящим из первых компонент собственных векторов  $\mathbf{J}$ .

Величина  $y_1/F$  называется *частотной функцией отклика*, точнее, частотной функцией отклика для смещения  $y_1$  при приложении единичной силы к  $y_1$ . Эта функция также может быть определена как прямая *восприимчивость* для  $y_1$ , как, например, описано в книге Бишопа и Джонсона [34]. Спектры  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{J}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$  соответствуют полюсам и нулям функции отклика. Чередувание этих двух спектров теперь можно понимать как чередувание полюсов и нулей функции отклика. Данный результат хорошо известен в теории управления. Таким образом, результат раздела 4.3 можно переформулировать так: функция отклика, а точнее, ее полюса и нули однозначно определяют матрицу  $\mathbf{J}$ . Легко видеть, что, зная  $\mathbf{J}$  и *вид* матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ , можно восстановить  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  по  $\mathbf{J}$ . Другую трактовку читатель найдет в работе Глэдвела и Гбадэяна (Gbadeyan) [106].

Экспериментально-теоретическое исследование задачи восстановления системы масс, соединенных пружинами, по спектру частотного отклика реальной системы можно найти в работах Глэдвела и Мовахеда (Movahhedy) [123] и Мовахеда, Исмаила (Ismail) и Глэдвела [242].

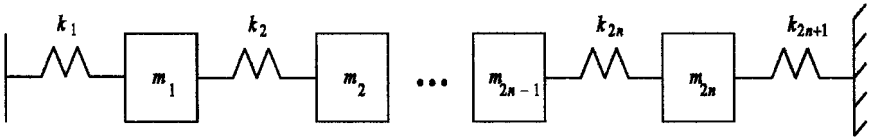
## 4.6. Персимметрические системы

Как было показано в разделе 4.3, персимметрическая якобиева матрица  $\mathbf{J}$  однозначно восстанавливается по своему спектру. Рассмотрим некоторые физические задачи, связанные с персимметрическими матрицами. На рис. 4.6.1 показана система, состоящая из  $2n$  масс, соединенных  $(2n + 1)$  пружинами, зафиксированная с обоих концов. Пусть система симметрична относительно средней точки так, что

$$m_r = m_{2n+1-r}, \quad k_r = k_{2n+1-r} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.6.1)$$

Главные колебания системы, имеющие нечетные номера, симметричны относительно средней точки, таким образом, они являются главными колебаниями, скажем, левой половины системы, свободной в средней точке, как показано на рис. 4.6.2 а. Следовательно, собственные значения с нечетными номерами  $\Lambda_1, \Lambda_3, \dots, \Lambda_{2n-1}$  полной системы являются также собственными значениями левой половины с одним зафиксированным концом, т. е.

$$\Lambda_{2i-1} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6.2)$$

Рис. 4.6.1. Симметричная система, состоящая из  $2n$  масс

С другой стороны, главные колебания системы, имеющие четные номера, антисимметричны относительно средней точки, таким образом, собственные значения с четными номерами  $\Lambda_2, \Lambda_4, \dots, \Lambda_{2n}$  являются собственными значениями левой половины при условии фиксации обоих концов, как показано на рис. 4.6.2 б.

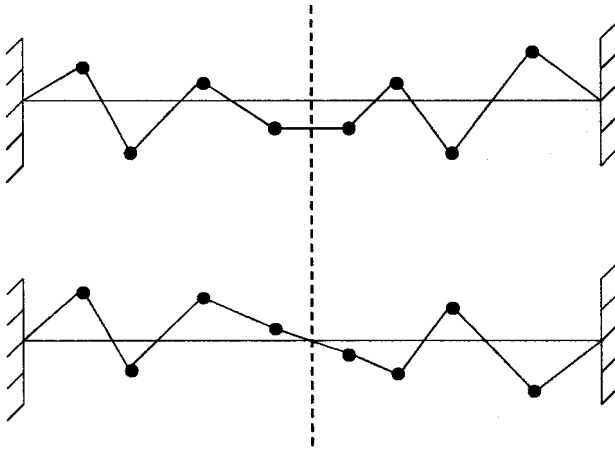


Рис. 4.6.2. (а) Колебания, имеющие нечетные номера, симметричны, (б) колебания, имеющие четные номера, антисимметричны

Таким образом,

$$\Lambda_{2i} = \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6.3)$$

Это значит, что левая половина, а следовательно, и вся система может быть однозначно восстановлена, если использовать анализ раздела 4.4 и знать спектр  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2n}$  и общую массу.

На рис. 4.6.3 приведена симметричная система, состоящая из  $2n - 1$  массы и  $2n$  пружин. Теперь симметричные колебания с нечетными номерами являются колебаниями левой половины с массой  $(m_n/2)$  на сво-

бодном конце, как показано на рис. 4.6.4 а. С другой стороны, антисимметричные колебания с четными номерами являются колебаниями левой стороны с массой  $m_n$  на зафиксированном конце, как показано на рис. 4.6.4 б. Таким образом,

$$\Delta_{2i-1} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.6.4)$$

$$\Delta_{2i} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.6.5)$$

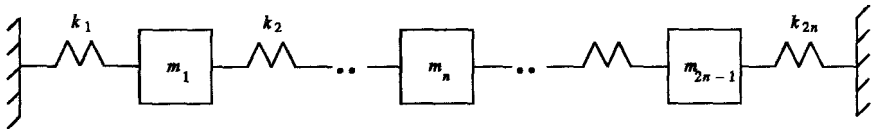


Рис. 4.6.3. Симметричная система, состоящая из  $2n - 1$  масс

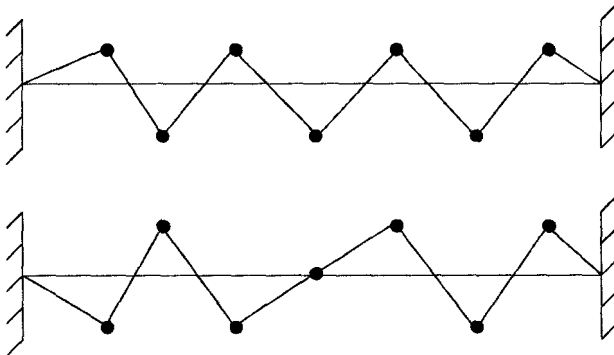


Рис. 4.6.4. (а) Колебания с нечетными номерами симметричны, (б) колебания с четными номерами антисимметричны

## 4.7. Обобщенные обратные задачи на собственные значения

В этом разделе будет рассмотрено восстановление конечно-элементной модели по спектру.

Задача на собственные значения описывается уравнением

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} = 0, \quad (4.7.1)$$

где, как и в (2.4.10),  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  симметричны и трехдиагональны, у  $\mathbf{K}$  кодиагонали отрицательны, а у  $\mathbf{M}$  положительные. Одного спектра недостаточно даже для восстановления одной трехдиагональной матрицы, не говоря уже о двух. Поэтому предположим (см. работу Глэдвела [127]), что  $\mathbf{M}$  может быть переписана в терминах  $\mathbf{K}$ , а именно

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^2 - c\mathbf{K}, \quad c > 0, \quad (4.7.2)$$

где  $\mathbf{D}$  все еще не определенная диагональная положительная матрица, а  $c$  — произвольное положительное число. Поскольку  $\mathbf{K}$  имеет отрицательные кодиагонали, у  $\mathbf{M}$  кодиагонали положительные. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} &= \mathbf{K} - \lambda(\mathbf{D}^2 - c\mathbf{K}) = (1 + c\lambda)\mathbf{K} - \lambda\mathbf{D}^2 \\ &= (1 + c\lambda)\{\mathbf{K} - \nu\mathbf{D}^2\}, \quad \nu = \lambda/(1 + c\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, (4.7.1) приводится к уравнению

$$(\mathbf{K} - \nu\mathbf{D}^2)\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (4.7.3)$$

что, как и в разделе 3.1, можно переписать в виде

$$(\mathbf{J} - \nu\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.7.4)$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}$ .

Предположим, что (4.7.1) имеет определенные собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$ , где  $\lambda_i \geq 0$ , тогда  $\mathbf{J}$  имеет собственные значения  $(\nu_i)_1^n$ , где  $\nu_i = \lambda_i/(1 + c\lambda_i) \geq 0$ , откуда следует, что матрицы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{K}$  являются положительно полуопределенными. Матрицу  $\mathbf{M}$  можно переписать в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}(\mathbf{I} - c\mathbf{J})\mathbf{D}, \quad (4.7.5)$$

где матрица  $\mathbf{I} - c\mathbf{J}$  имеет собственные значения  $1 - c\nu_i = 1/(1 + c\lambda_i) > 0$ , что означает положительную определенность  $\mathbf{M}$ .

Чтобы восстановить  $\mathbf{J}$ , необходим второй спектр. Если обозначить  $(\mu_i)_1^{n-1}$  собственные значения (4.7.1) при ограничении  $u_n = 0$ , то собственные значения (4.7.4) при том же ограничении имеют вид  $\sigma_i = \mu_i/(1 + c\mu_i)$ . Отметим, что чередование

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \lambda_n \quad (4.7.6)$$

приводит к чередованию

$$\nu_1 < \sigma_1 < \nu_2 < \cdots < \sigma_{n-1} < \nu_n. \quad (4.7.7)$$

После того как восстановлена  $\mathbf{J}$ , нужно найти такую  $\mathbf{D}$ , что  $\mathbf{K} = \mathbf{DJD}$  удовлетворяет характеристическому уравнению на матрицу жесткости (4.4.9). Это можно проделать явно, как в разделе 4.4. В работе Глэдвела [127] найдены семейства систем с данными спектрами. С другим подходом восстановления конечно-элементной модели для стержня можно ознакомиться в работе Рама и Глэдвела [289].

#### 4.8. Восстановление по внутренней точке

Рассмотрим, следуя работе Глэдвела и Вилмса (Willms) [113], систему, состоящую из  $n$  масс, соединенных пружинами, при некоторых граничных условиях, как на рис. 4.8.1а. (На данном этапе случай свободных концов исключен.) Приложенная к массе  $m_{m+1}$  ( $0 < m < n - 1$ ) синусоидальная сила  $F \sin \omega t$  вызывает отклик, который можно вычислить так же, как в уравнении (4.5.7):

$$x_{m+1}/F = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{m+1,i})^2}{\lambda_i - \lambda}.$$

Полюсами этой функции отклика являются собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  полной системы  $A$ . Нулями же являются собственные значения системы с наложенной связью  $x_{m+1} = 0$ , т. е. спектр системы  $B$  слева или системы  $C$  справа от точки  $x_{m+1}$ , как показано на рис. 4.8.1б. Различные способы присвоения собственных значений системы со связью подсистемам  $B$  и  $C$  приводят к восстановлению различных систем. Совершив такое присвоение, мы знаем собственные спектры  $(\lambda_i)_1^n$ ,  $(\mu_i)_1^m$  и  $(\nu_i)_1^p$  ( $p = n - m - 1$ ) систем  $A, B, C$  соответственно. В пределах каждого множества собственные значения должны быть различны. Имеют место два случая:

- а) Система со связью не имеет удвоенных собственных значений, т. е. все  $(\mu_i)_1^m$  и  $(\nu_i)_1^p$  различны. Если они упорядочены по возрастанию и переобозначены как  $(\tilde{\mu}_i)_1^{n-1}$ , то они удовлетворяют неравенству

$$\lambda_1 < \tilde{\mu}_1 < \lambda_2 < \dots < \tilde{\mu}_{n-1} < \lambda_n.$$

Это эквивалентно утверждению, что ни один собственный вектор  $\mathbf{x}_i$  матрицы  $\mathbf{J}$  не имеет узла в точке  $x_{m+1}$ , т. е.  $x_{m+1,i} \neq 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- б) Два члена пары  $(\mu_j, \nu_k)$  совпадают, т.е. найдется такой индекс  $i$ , что  $\lambda_i = \mu_j = \nu_k$ . Это имеет место тогда и только тогда, когда  $x_{m+1,i} = 0$ . Таких пар может быть несколько.

Для дальнейшего анализа предположим, что уравнение на собственные значения (4.4.1) приведено к нормальной форме (4.4.2), а матрица  $\mathbf{J}$  имеет следующую структуру

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} & m & 1 & p \\ \begin{matrix} m \\ 1 \\ p \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{b}_m & 0 \\ -\mathbf{b}_m^T & a_{m+1} & -\mathbf{c}_{m+1}^T \\ 0 & -c_{m+1} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (4.8.1)$$

где  $\mathbf{b}_m^T = \{0, 0, \dots, b_m\}$ ,  $\mathbf{c}_{m+1}^T = \{b_{m+1}, 0, 0, \dots, 0\}$ .

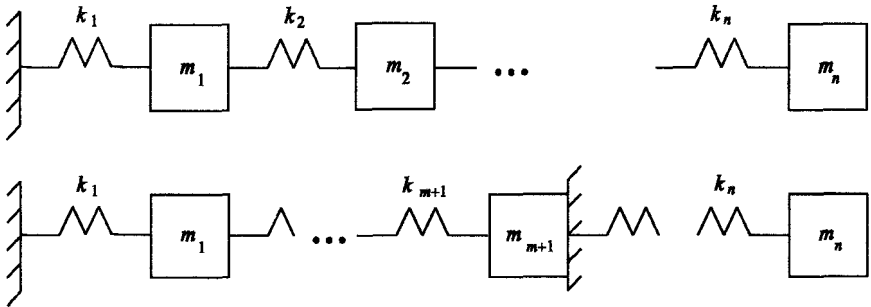


Рис. 4.8.1. На массу  $m_{m+1}$  наложена связь

Теперь рассмотрим главные миноры  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}$ . Обозначим последовательность главных миноров вдоль главной диагонали  $p_i(\lambda)$ , а главные миноры вдоль обратной диагонали —  $q_i(\lambda)$ . Разложения Лапласа для  $p_n(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J})$ , использующие первые  $m$  и  $m+1$  строк, имеют вид

$$p_n(\lambda) = p_m(\lambda)q_{p+1}(\lambda) - b_m^2 p_{m-1}(\lambda)q_p(\lambda), \quad (4.8.2)$$

$$= p_{m+1}(\lambda)q_p(\lambda) - b_{m+1}^2 p_m(\lambda)q_{p-1}(\lambda). \quad (4.8.3)$$

Известно, что

$$p_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad p_m(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \mu_j), \quad q_p(\lambda) = \prod_{k=1}^p (\lambda - \nu_k),$$



следовательно, из уравнений (4.8.2) и (4.8.3) следует

$$p_n(\mu_j) = -b_m^2 p_{m-1}(\mu_j) q_p(\mu_j), \quad (4.8.4)$$

$$p_n(\nu_k) = -b_{m+1}^2 p_m(\nu_k) q_{p-1}(\nu_k). \quad (4.8.5)$$

В случае (а) все величины в последних уравнениях ненулевые, так что, за исключением множителей  $b_m^2$  and  $b_{m+1}^2$ , эти уравнения дают  $p_{m-1}(\mu_j)$  и  $q_{p-1}(\nu_k)$  соответственно. Именно эти величины необходимы для вычисления матриц **B** и **C**, когда используется алгоритм Форсайта, рассмотренный в разделе 3.2. Веса  $(w_j)_b$  для **B** даются выражением

$$b_m^2 (w_j)_b = b_m^2 p_{m-1}(\mu_j) / p'_m(\mu_j) = -p_n(\mu_j) / [p'_m(\mu_j) q_p(\mu_j)], \quad (4.8.6)$$

тогда как веса для **C** имеют вид

$$b_{m+1}^2 (w_k)_c = b_{m+1}^2 q_{p-1}(\nu_k) / q'_p(\nu_k) = -p_n(\nu_k) / [q'_p(\nu_k) p_m(\nu_k)]. \quad (4.8.7)$$

Чтобы убедиться в том, что веса  $(w_i)_b$  положительны, предположим, что слева от  $\mu_j$  находятся  $s$   $\nu$ , а справа  $p - s$ , тогда  $\nu_{j+s} < \mu_j < \nu_{j+s+1}$ . Функция  $\text{sgn}$  определяется следующим образом: пусть число  $x$  записано в виде  $x = (-1)^n c$ , где  $c > 0$ , тогда  $\text{sgn}(x) = n$ . Теперь легко проверить, что

$$\text{sgn}[p_n(\mu_j), p'_m(\mu_j), q_p(\mu_j)] = [n - j - s, m - j, p - s],$$

так что

$$\text{sgn}(w_j)_b = 1 + (n - j - s) + (m - j) + p - s = 2n - 2j - 2s$$

— четное число, откуда следует  $(w_j)_b > 0$ . Аналогично доказывается, что  $(w_k)_c > 0$ .

Таким образом, **B** восстанавливается однозначно. В конце определяется  $p_{m-1}(\lambda)$ , а также  $p_{m-1}(\mu_j)$ . Любую из этих величин можно подставить в (4.8.4), чтобы получить  $b_m^2$ . **C** и  $b_{m+1}^2$  могут быть найдены аналогично.

В случае (б) в обоих уравнениях (4.8.2) и (4.8.3) присутствует общий множитель  $\lambda - \lambda_i \equiv \lambda - \mu_j = \lambda - \nu_k$ . Исключим его и затем положим  $\lambda = \lambda_i$ . Ввиду того что

$$\begin{aligned} p_{m+1}(\lambda) &= (\lambda - a_{m+1}) p_m(\lambda) - b_m^2 p_{m-1}(\lambda), \\ q_{p+1}(\lambda) &= (\lambda - a_{m+1}) q_p(\lambda) - b_{m+1}^2 q_{p-1}(\lambda), \end{aligned}$$

получаем

$$p_{m+1}(\mu_j) = -b_m^2 p_{m-1}(\mu_j), \quad q_{p+1}(\nu_k) = -b_{m+1}^2 q_{p-1}(\nu_k),$$



где

$$s_j = b_m y_{m,j}, \quad t_k = b_{m+1} z_{1,k}. \quad (4.8.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu_j) p_j - s_j x_{m+1} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ (\lambda - \nu_k) q_k - t_k x_{m+1} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

откуда

$$\left\{ a_{m+1} - \lambda_i + \sum_{j=1}^m \frac{s_j^2}{\lambda_i - \mu_j} + \sum_{k=1}^p \frac{t_k^2}{\lambda_i - \nu_k} \right\} x_{m+1,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В случае (а)  $x_{m+1,i} \neq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ , так что

$$a_{m+1} - \lambda + \sum_{j=1}^m \frac{s_j^2}{\lambda - \mu_j} + \sum_{k=1}^p \frac{t_k^2}{\lambda - \nu_k} = \frac{-p_n(\lambda)}{p_m(\lambda)q_p(\lambda)}, \quad (4.8.12)$$

откуда получаем

$$s_j^2 = \frac{-p_n(\mu_j)}{p'_m(\mu_j)q_p(\mu_j)}, \quad t_k^2 = \frac{-p_n(\nu_k)}{p_m(\nu_k)q'_p(\nu_k)} \quad (4.8.13)$$

при  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, p$ , что согласуется с (4.8.6), (4.8.7). Теперь  $b_m^2, b_{m+1}^2$  можно вычислить, используя

$$b_m^2 = \sum_{j=1}^m s_j^2, \quad b_{m+1}^2 = \sum_{k=1}^p t_k^2. \quad (4.8.14)$$

Зная  $(y_{m,j})_1^m$  и  $(z_{1,k})_1^p$  из уравнений (4.8.11)–(4.8.14), можно восстановить **B** и **C**, используя алгоритм Ланцоша.

В случае (б) предположим, что найдется  $r \geq 1$  триплетов  $\{\lambda_{iq}, \mu_{jq}, \nu_{kq}\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, r$ , таких, что  $\lambda_{iq} = \mu_{jq} = \nu_{kq}$ , тогда

$$f(\lambda) \equiv a_{m+1} - \lambda + \sum_{j=1}^m * \frac{s_j^2}{\lambda - \mu_j} + \sum_{k=1}^p * \frac{t_k^2}{\lambda - \nu_k} + \sum_{q=1}^r \frac{s_{jq}^2 + t_{kq}^2}{\lambda - \lambda_{iq}} \quad (4.8.15)$$

имеет среди своих  $m + p - r + 1 = n - 2$  корней  $n - r$  невырожденных  $\lambda_i$ . В уравнении (4.8.15) звездочка \* указывает на то, что вырожденные

триплеты опущены. Теперь найдем отдельные значения  $s_j^2$  и  $t_k^2$ , а также  $W_q = s_{jq}^2 + t_{kq}^2$  для вырожденных колебаний. Как и прежде,

$$s_{jq}^2 + t_{kq}^2 = W_q, \quad s_{jq}^2 = W_q \cos^2 \alpha_q, \quad t_{kq}^2 = W_q \sin^2 \alpha_q,$$

где  $W_q$  определено в (4.8.9). При определенном выборе  $\alpha_q$   $s_{jq}^2$  и  $t_{kq}^2$  известны. Из уравнения (4.8.14) следуют выражения для  $b_m^2$  и  $b_{m+1}^2$ , как функций параметров  $\{\alpha_q\}_1^r$  (отметим, что сумма  $b_m^2 + b_{m+1}^2$  инвариантна), откуда находятся  $(y_{m,i})_1^m$  и  $(z_{1,j})_1^p$ . Далее **B** и **C** можно вычислить, используя алгоритм Ланцоша.

Альтернативный подход к задаче восстановления по внутренней точке читатель найдет в работе Найлена и Ухлига [253].

Модели, описываемые набором масс, соединенных пружинами, которые рассматривались в этой главе, имеют много общего с моделями сдвиговых деформаций зданий, широко использовавшимися Такеваки (Takewaki) и его коллегами. Они сформулировали различные комбинированные обратные задачи, в которых часть конструкции задана, а другую часть необходимо найти исходя из заданных спектральных свойств. Полное законченное описание этих задач и их применения в строительном проектировании можно найти в монографии Такеваки [321]. Следующие оригинальные статьи наиболее близки по содержанию к материалу данной главы: Такеваки и Накамура (Nakamura) [317], Такеваки, Накамура и Арита (Arita) [318], Такеваки и Накамура [319] и Такевари (Takewari) [320].

---

---

## ГЛАВА 5

# Обратные задачи для некоторых более общих систем

Смысл сказанного зависит от порядка слов, изменение смысла имеет непредсказуемые последствия.  
Блез Паскаль. «Мысли», 23.

### 5.1. Введение: теория графов

Обратные задачи, рассмотренные в главе 4, являются особыми просто потому, что якобиевы матрицы являются особыми матрицами. В этой главе мы рассмотрим некоторые немного более общие задачи, но следует признать, что все еще только малая часть таких задач поддается решению.

Отличительными структурными особенностями якобиевой матрицы является трехдиагональность и строгая отрицательность элементов кодиагоналей. (Также она положительно полуопределена, но это совсем другой вопрос.) Структура матрицы  $\mathbf{J}$  в уравнении (4.4.2) связана со структурами  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  в (4.4.1):  $\mathbf{K}$  трехдиагональна, тогда как  $\mathbf{M}$  диагональна. Структуры матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  в свою очередь следуют из структуры расположенных на прямой системы масс, которую они и описывают. Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  связана с жесткостями пружин, соединяющих массы.  $\mathbf{K}$  трехдиагональна, поскольку каждая промежуточная масса  $m_i$ ,  $2 \leq i \leq n-1$ , связана только со своими непосредственными соседями  $m_{i-1}$  и  $m_{i+1}$ ; граничные массы  $m_1$  и  $m_n$  имеют по одному соседу  $m_2$  и  $m_{n-1}$  соответственно. Для описания и анализа структуры системы естественным образом подходит теория графов.

Здесь мы не станем доказывать какие-либо теоремы теории графов, но будет полезно ввести некоторые основные понятия. Графом называется  $\mathcal{G}$ -множество вершин, связанных ребрами. Множество вершин обозначается  $\mathcal{V}$ , множество ребер —  $\mathcal{E}$ . На рис. 5.1.1 показан граф. По

существо, это пример *простого неориентированного* графа. *Простой* он потому, что любые две вершины соединены не больше чем одним ребром. Ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , обозначается  $(i, j)$ . Граф является *неориентированным* поскольку для ребер не задано предпочтительное направление. С этого момента термин *граф* будет использоваться для обозначения *простого неориентированного графа*.

*Матрицей смежности*  $\mathbf{A}$  графа  $\mathcal{G}$  называется симметричная матрица, задаваемая следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i \neq j \text{ и } (i, j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Матрица смежности графа на рис. 5.1.1 имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

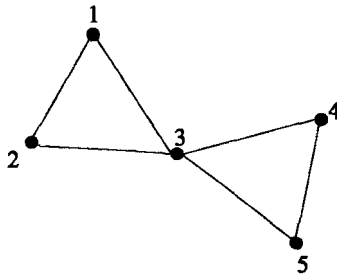


Рис. 5.1.1. Пример графа

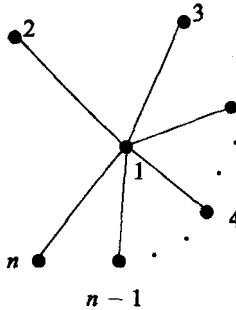
С каждой симметричной матрицей  $\mathbf{A}$  можно ассоциировать некоторый граф, используя следующее правило:

$$\text{если } i \neq j, \text{ то } (i, j) \in \mathcal{E} \text{ тогда и только тогда, когда } a_{ij} \neq 0. \quad (5.1.2)$$

Согласно этому правилу графом, ассоциированным с якобиевой матрицей, является (прямолинейный) *граф путей*, как показано на рис. 5.1.2. Граф путей, очевидно, является одним из простейших графов.



Рис. 5.1.2. Граф, ассоциированный с якобиевой матрицей

Рис. 5.1.3.  $n$ -вершинная звезда

Другим примером простого графа является  $n$ -вершинная звезда, показанная на рис. 5.1.3.

Ассоциированным графом к (симметричной) окаймленной диагональной матрице  $\mathbf{B}$  является  $n$ -вершинная звезда.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \hat{b}_1 & \dots & \hat{b}_{n-1} \\ \hat{b}_1 & a_2 & & \\ \cdot & & \ddots & \\ \hat{b}_{n-1} & & & a_n \end{bmatrix}. \quad (5.1.3)$$

Периодическая якобиева матрица имеет вид

$$\mathbf{J}_{per} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ b_n & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Она трехдиагональна, за исключением элементов  $b_n$  в верхнем правом и нижнем левом углах. С ней ассоциирован граф, имеющий вид  $n$ -вершинного кольца, как показано на рис. 5.1.4.

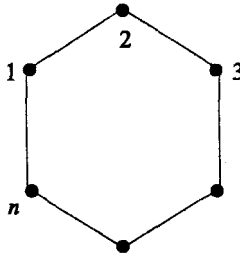


Рис. 5.1.4.  $n$ -вершинное кольцо

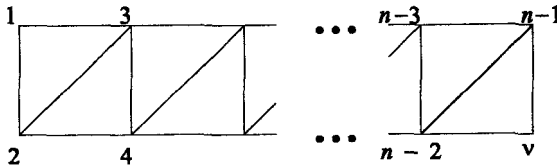


Рис. 5.1.5. Шпренгель с четным количеством  $n$  вершин, как ассоциированный граф для пятидиагональной матрицы

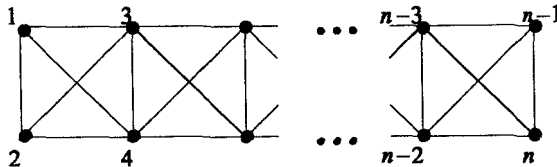


Рис. 5.1.6. Граф, ассоциированный с  $2 \times 2$ -блочной трехдиагональной матрицей

Графом, ассоциированным с пятидиагональной матрицей, подобной той, что рассматривалась в разделе 2.3 при анализе колебаний балки, является *шпренгель* (диагональная распорка), как показано на рис. 5.1.5.

Граф, ассоциированный с  $2 \times 2$ -блочной трехдиагональной матрицей, также является шпренгелем, но теперь уже с двумя диагональными ребрами, как показано на рис. 5.1.6.

Все графы, представленные на рис. 5.1.1–5.1.6, являются *связными* графами, т. е. найдется цепь, состоящая из ребер, соединяющая любые две вершины. Заметим, что пересечения диагоналей на рис. 5.1.6 не являются вершинами графа.

Графы, показанные на рис. 5.1.7а), б), являются *несвязными*.

Для того чтобы проверить, является ли связным граф, ассоциированный с данной (симметричной) матрицей, заметим, что *перенумеров-*



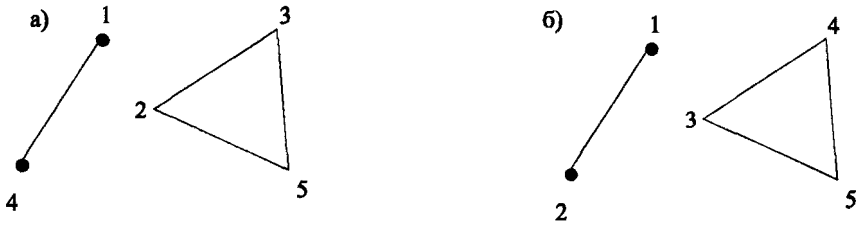


Рис. 5.1.7. Перенумеровка вершин не меняет граф

ка вершин не меняет определяющее свойство графа: графы а) и б) на рис. 5.1.7, по существу, одинаковые. Перенумеровка вершин графа ведет к *перегруппировке* строк и столбцов любой (симметричной) матрицы, ассоциированной с этим графом. В случае если граф является несвязным, его можно представить в виде набора связанных подграфов, как показано на рис. 5.1.7а. Поэтому всегда возможно изменить нумерацию вершин так (см. рис. б), что номера вершин в любом связном подграфе будут образовывать строгую последовательность. Матрицы смежности графов а) и б) имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Этот пример показывает, что если нумерация вершин каждого связного подграфа образует строгую последовательность, то матрица смежности расщепляется на две отдельные подматрицы: говорят, что такая (симметричная) матрица *разложима*. Симметричная матрица **A** *неразложима* тогда и только тогда, когда ее нельзя привести к виду

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array} \right] \quad (5.1.5)$$

никакой перегруппировкой строк и столбцов. Если матрица разложима, то ее можно привести к виду (5.1.5), при этом, конечно, **B** и **C** могут оказаться разложимыми сами по себе. Заметим, что понятие связности *направленного* графа и соответствующее понятие неразложимости (необязательно симметричной) матрицы общего вида являются более сложными, чем описанные выше. См. раздел 6.2.21 монографии Хорна и Джонсона [183].

Теперь можно сформулировать общий результат.

**Теорема 5.1.1.** (Симметричная) матрица  $\mathbf{A}$  неразложима тогда и только тогда, когда ассоциированный с ней граф является связным.

Легко проверить, что если убрать любую пружину (кроме  $k_1$ ) из такой системы, как показана на рис. 4.4.1, то соответствующий граф станет несвязным и матрица жесткости станет разложимой.

Дерево является особой разновидностью связных графов: оно не имеет циклов. Для любых двух вершин имеется *единственная* цепь ребер, соединяющая их друг с другом. Граф пути и граф-звезда являются деревьями, но кольцо (см. рис. 5.1.4) не имеет структуры дерева. Связный граф содержит в себе одно или более *остовных* деревьев. Если  $\mathcal{G}$  является связным графом с набором вершин  $\mathcal{V}$ , тогда остовное дерево  $\mathcal{S}$  графа  $\mathcal{G}$  является *максимальным* деревом с набором вершин  $\mathcal{V}$ . Если в  $\mathcal{S}$  добавить дополнительные ребра  $\mathcal{E}$ , то оно потеряет структуру дерева: образуется цикл. На рис. 5.1.8 приведены три возможных остовных дерева для графа  $\mathcal{G}$ , показанного на рис. 5.1.1.

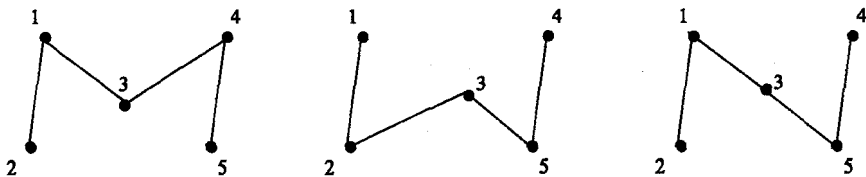


Рис. 5.1.8. Три остовных дерева для графа, приведенного на рис. 5.1.1

Можно доказать, что *все остовные деревья для данного графа  $\mathcal{G}$  имеют одинаковое число ребер.*

В охватывающей широкий класс вопросов работе Наббена (Nabben) [243] обсуждаются матрицы Грина для деревьев.

## 5.2. Преобразования матриц

В первой части книги мы очень подробно рассмотрели задачи на собственные значения матриц. Теперь зададимся одним из главных вопросов: «При каких преобразованиях собственные значения матрицы или пары матриц не изменяются?» Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что  $\mathbf{C}, \mathbf{A} \in M_n$ . Набор матриц  $\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}$  называется *пучком матриц*, образованным парой  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ . Как было сказано в

разделе 1.4, собственные значения  $\lambda$  пары матриц  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  таковы, что уравнение

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

имеет ненулевое решение  $\mathbf{x} \in V_n$ . Собственные значения являются корнями определителя

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}) = 0.$$

Пусть  $\mathbf{P}, \mathbf{R} \in M_n$  являются постоянными матрицами, т.е. не зависящими от  $\lambda$ . Поскольку

$$\det(\mathbf{PCR} - \lambda\mathbf{PAR}) = \det(\mathbf{P}) \cdot \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{R}),$$

мы приходим к выводу, что если  $\mathbf{P}, \mathbf{R}$  не вырождены, т.е.  $\det(\mathbf{P}) \neq 0$ ,  $\det(\mathbf{R}) \neq 0$ , то

$$\det(\mathbf{PCR} - \lambda\mathbf{PAR}) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A}) = 0,$$

таким образом, преобразование «умножение слева на  $\mathbf{P}$  и умножение справа на  $\mathbf{R}$ » не меняет собственных значений. Такое преобразование называется преобразованием *эквивалентности*. Это специальное *соотношение эквивалентности* (упражнение 5.2.1).

В общем случае преобразование эквивалентности преобразует симметричный пучок в несимметричный. Преобразования, сохраняющие симметрию, определяются условием

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^T. \quad (5.2.1)$$

Преобразование эквивалентности преобразует пучок  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$  в  $\mathbf{PAR} - \lambda\mathbf{PR}$ . Если оно переводит  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$  в  $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ , то матрицы  $\mathbf{P}, \mathbf{R}$  должны быть подобраны так, чтобы  $\mathbf{PR} = \mathbf{I}$ , т.е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}. \quad (5.2.2)$$

Преобразование эквивалентности, обладающее таким свойством, называется преобразованием *подобия*. Преобразование эквивалентности, удовлетворяющее (5.2.1) и (5.2.2) одновременно, называется *вращением* или *ортогональным преобразованием*. Будем обозначать преобразования  $\mathbf{P}$ , соответствующие вращениям, символом  $\mathbf{Q}$ . Из уравнений (5.2.1), (5.2.2) следует

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}: \quad (5.2.3)$$

т. е.  $\mathbf{Q}$  является *ортогональной матрицей*; матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{X}$  из раздела 4.2 являются ортогональными. Напомним, что столбцы (строки) ортогональной матрицы взаимно ортогональны, и норма каждого столбца (строки) равна 1. Таким образом, если  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$ , то

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \delta_{ij}. \quad (5.2.4)$$

При  $n = 2$  ортогональная матрица имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (5.2.5)$$

В этом случае задача на собственные значения ставится на плоскости, а матрица  $\mathbf{Q}$  соответствует вращению осей  $x, y$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ .

Поиск самого общего выражения для ортогональной матрицы  $M_n$  является сложной задачей. Вместо этого мы воспользуемся тем фактом, что произведение ортогональных матриц ортогонально (упражнение 5.2.3).

Существует очень простая, но важная ортогональная матрица, которая получается в результате одноранговой замены в единичной матрице:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}\mathbf{x}^T \quad (5.2.6)$$

ортогональна при условии

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \\ &= \mathbf{I} - 4\mu\mathbf{x}\mathbf{x}^T + 4\mu^2(\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

т. е. если  $\mu$  выбрано так, что

$$\mu = 1/\mathbf{x}^T\mathbf{x}. \quad (5.2.7)$$

Такое преобразование называется *преобразованием Хаусхолдера* (Householder). Заметим, что  $\mathbf{Q}$  в (5.2.6) симметрична, т. е.  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ .

Преобразования Хаусхолдера используются в различных целях. Одной из них является редукция симметричной матрицы к трехдиагональной форме, как описано ниже.

Пусть  $\mathbf{Q}$  задана в (5.2.6), и  $\mathbf{A} \in S_n$ . Мы собираемся выбрать  $\mathbf{Q}$ , т. е. найти  $\mathbf{x}$ , так, чтобы преобразованная матрица  $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{B}$  имела нулевые элементы в первом столбце и первой строке, кроме первых двух  $b_{11}, b_{12}$ .

Сначала рассмотрим умножение справа на  $\mathbf{Q}$  и обозначим первую строку матрицы  $\rho_1$ . Используя  $\mathbf{Q}$  из (5.2.6), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A} - 2\mu(\mathbf{A}\mathbf{x})\mathbf{x}^T, \\ \rho_1(\mathbf{C}) &= \rho_1(\mathbf{A}\mathbf{Q}) = \rho_1(\mathbf{A}) - 2\mu(\rho_1(\mathbf{A})\mathbf{x})\mathbf{x}^T.\end{aligned}$$

Таким образом,  $c_{1i} = a_{1i} - 2\mu(\rho_1(\mathbf{A})\mathbf{x})x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Теперь выберем

$$x_i = a_{1i}, \quad i = 3, 4, \dots, n. \quad (5.2.8)$$

Тогда  $c_{1i} = 0$ ,  $i = 3, 4, \dots, n$ , если

$$2\mu(\rho_1(\mathbf{A})\mathbf{x}) = 1. \quad (5.2.9)$$

Отсюда следует одно уравнение для оставшихся неизвестных  $x_1, x_2$ . Теперь произведем умножение слева:

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{C} = \mathbf{C} - 2\mu\mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{C}),$$

так что

$$\rho_1(\mathbf{B}) = \rho_1(\mathbf{C}) - 2\mu\rho_1(\mathbf{x})(\mathbf{x}^T\mathbf{C}).$$

Таким образом, чтобы умножение слева не изменило нулевые элементы первой строки матрицы  $\mathbf{C}$ , нужно выбрать  $x_1 = 0$ . Теперь из уравнений (5.2.7)–(5.2.9) следует

$$2(a_{12}x_2 + a_{13}^2 + \dots + a_{1n}^2) = x_2^2 + (a_{13}^2 + \dots + a_{1n}^2),$$

откуда получаем

$$x_2 = a_{12} \pm S, \quad (5.2.10)$$

где

$$S^2 = \sum_{i=2}^n a_{1i}^2. \quad (5.2.11)$$

Таким образом, искомый  $\mathbf{x}$  имеет вид

$$\mathbf{x} = \{0, a_{12} \pm S, a_{13}, \dots, a_{1n}\}, \quad (5.2.12)$$

и для вычислительных целей выберем знак  $S$  такой же, как и у  $a_{12}$ .

Итак, основное преобразование Хаусхолдера преобразует произвольную симметричную матрицу  $\mathbf{A}$  к виду

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.2.13)$$

где  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1$ . На этом завершается первый этап редукции к трехдиагональной форме. Теперь применим еще одно преобразование Хаусхолдера к подматрице  $\mathbf{B}_1$ , используя новый  $\mathbf{x}$  с  $x_1 = 0 = x_2$ . Это второе преобразование не изменяет  $a_{11}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}^T$  и обнуляет все элементы первой строки и первого столбца  $\mathbf{B}_1$ , кроме первых двух. После  $n - 2$  итераций матрица становится трехдиагональной. Поскольку матрица приобрела трехдиагональную форму, ее собственные значения можно легко определить, используя функцию смены знака  $s_r(\lambda)$  из раздела 3.1. С деталями численной реализации данной редукции можно ознакомиться в книгах Бишоп, Глэдвела и Майкельсона [33] (глава 9), Голуба и Ван Лоана [135] (раздел 8.2).

Сделаем два комментария. Во-первых, поскольку  $x_1 = 0$ ,  $\mathbf{Q}$  из (5.2.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.2.14)$$

где  $\mathbf{Q}_1$  — ортогональная матрица в  $M_{n-1}$ . Отсюда получаем важное следствие. Преобразование сохраняет не только  $\sigma(\mathbf{A})$ , т. е.  $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})$ , но и  $\sigma(\mathbf{A}_1) = \sigma(\mathbf{B}_1)$ .

Во-вторых, можно произвести незначительное изменение преобразования Хаусхолдера, чтобы свести симметричную матрицу  $\mathbf{A}$  общего вида, скажем, к пятидиагональной форме. Возьмем

$$\mathbf{x} = \{0, 0, a_{13} \pm S, a_{14}, \dots, a_{1n}\}, \quad (5.2.15)$$

где  $S^2 = \sum_{i=3}^n a_{1i}^2$ . Такое преобразование не изменяет  $\sigma(\mathbf{A})$ ,  $\sigma(\mathbf{A}_1)$ ,  $\sigma(\mathbf{A}_{1,2})$ , где последнее обозначает спектр  $\mathbf{A}$  с удаленными первыми и вторыми столбцами и строками.

## Упражнения 5.2

1) Соотношение эквивалентности ( $a$  эквивалентно  $b$ ) обозначается  $aRb$  и имеет три определяющих свойства:

- рефлексивность —  $aRa$

- *симметричность* — если  $aRb$ , то  $bRa$
- *транзитивность* — если  $aRb$  и  $bRc$ , то  $aRc$

Набор элементов, связанных соотношением эквивалентности, называется *классом эквивалентности*. Используйте одновременно умножение слева на  $\mathbf{P}$  и справа на  $\mathbf{R}$  (с невырожденными  $\mathbf{P}, \mathbf{R}$ ), чтобы определить соотношение эквивалентности и классы эквивалентности для пар матриц  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ .

2. Показать, что преобразование  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$  определяет соотношение эквивалентности и соответствующий класс эквивалентности.
3. Показать, что если  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  ортогональны, то  $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$  также ортогональна. Привести контрпример, иллюстрирующий, что если  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  симметричны, то  $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$  необязательно симметрична.
4. Показать, что для  $\mathbf{x}$ , определенного в (5.2.11),  $\mu$  из (5.2.7) находится из уравнения  $2S(S + a_{12})\mu = 1$ .
5. Проверить, что  $\mathbf{Q}$ , полученная в результате  $n - 2$  последовательных преобразований Хаусхолдера, имеет вид (5.2.14).

### 5.3. Звезда и граф путей

В разделе 5.1 было отмечено, что граф, ассоциированный с окаймленной диагональной матрицей (5.1.3), является  $n$ -вершинной звездой, как показано на рис. 5.1.3. Существует, в частности, простая обратная задача на собственные значения, связанная с окаймленной диагональной матрицей  $\mathbf{B}$ : найти такую  $\mathbf{B}$ , что  $\sigma(\mathbf{B}) = (\lambda_i)_1^n$ ,  $\sigma(\mathbf{B}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ . Из обычных вариационных аргументов вытекает, что два спектра должны чередоваться по меньшей мере в свободном смысле:

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (5.3.1)$$

Для простоты предположим, что  $(\mu_i)_1^{n-1}$  различны:

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{n-1}. \quad (5.3.2)$$

Перепишем  $\mathbf{B}$  в виде (5.1.3), т. е.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \hat{\mathbf{B}}^T \\ \hat{\mathbf{B}} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad (5.3.3)$$

где  $\mathbf{M}$  диагональна и  $\widehat{\mathbf{B}} = \{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \dots, \widehat{b}_{n-1}\}$ . Очевидно, можно добиться того, чтобы  $\sigma(\mathbf{B}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ , выбирая  $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ . Взяв след матрицы, имеем

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i. \quad (5.3.4)$$

Теперь рассмотрим уравнения на собственные векторы матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{b}_i v_1 + (\mu_i - \lambda) v_{i+1} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ (a_1 - \lambda) v_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{b}_i v_{i+1} &= 0. \end{aligned}$$

Из них следует уравнение на собственные значения

$$\lambda - a_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\widehat{b}_i^2}{\lambda - \mu_i} = 0.$$

Оно должно иметь корни  $(\lambda_i)_1^n$ , так что

$$\lambda - a_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\widehat{b}_i^2}{\lambda - \mu_i} = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \mu_i)} \quad (5.3.5)$$

и, следовательно,

$$\widehat{b}_i^2 = \frac{-\prod_{j=1}^n (\mu_i - \lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_i - \mu_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.3.6)$$

где, как обычно, ' означает  $i \neq j$ . Из условия чередования (5.3.1) следует, что  $\widehat{b}_i^2 \geq 0$ . Знак  $\widehat{b}_i$  можно выбрать произвольно: + или -. Поскольку мы предположили, что  $\mu_i$  различны, данное  $\mu_i$  может совпадать только с соседними  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ . Из уравнения (5.3.6) следует, что  $\widehat{b}_i = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mu_i$  совпадет с одним из этих  $\lambda$ . Если  $\widehat{b}_i = 0$ , то ребро  $(1, i+1)$  отсутствует в основном графе.

Построив окаймленную диагональную матрицу  $\mathbf{B}$ , мы получили новый способ построения трехдиагональной матрицы  $\mathbf{J}$  такой, что  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$ ,  $\sigma(\mathbf{J}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ : можно применить к  $\mathbf{B}$  преобразование Хаусхолдера, чтобы получить  $\mathbf{J}$ . Согласно упражнению 5.2.5, преобразование



будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \mathbf{e}_1^T \\ b_1 \mathbf{e}_1 & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \mathbf{e}_1^T \\ b_1 \mathbf{e}_1 & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (5.3.8)$$

Выполняя умножение, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{J}_1 \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{M}, \\ \mathbf{Q}_1^T b_1 \mathbf{e}_1 &= \widehat{\mathbf{b}}. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Из первого уравнения вытекает, что собственные векторы  $\mathbf{J}_1$  являются столбцами  $\mathbf{Q}_1$ :  $i$ -ый собственный вектор имеет вид

$$\mathbf{q}_i = \{q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{(n-1),i}\}. \quad (5.3.10)$$

Из второго уравнения следует, что, с точностью до множителя  $b_1$ , вектор  $\widehat{\mathbf{b}}$  состоит из первых компонент собственных векторов  $\mathbf{J}_1$ :

$$\widehat{\mathbf{b}} = b_1 \{q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1,n-1}\}. \quad (5.3.11)$$

Таким образом, с точностью до множителя  $b_1$ ,  $\widehat{\mathbf{b}}$  соответствует вектору  $\mathbf{x}_1$ , необходимому для построения  $\mathbf{J}_1$  на основе алгоритма Ланцоша из раздела 4.2. Множитель  $b_1$  равен  $b_1 = \|\widehat{\mathbf{b}}\|$ .

Отметим разницу между (5.3.6) и (4.3.17): первая формула, согласно (5.3.11), дает первые компоненты собственных векторов  $\mathbf{J}_1$ ; вторая же дает первые компоненты собственных векторов  $\mathbf{J}$ .

В работе Сассмана-Форста [312] обсуждается связь между обратными задачами для якобиевых и окаймленных матриц.

### Упражнения 5.3

- 1) Исследовать, что произойдет с  $\mathbf{J}$ , когда одно (или более)  $\lambda$  совпадет с  $\mu$ .

## 5.4. Периодические якобиевы матрицы

В разделе 5.1 было показано, что основным графом для якобиевой матрицы является  $n$ -вершинное *кольцо*. Материал данного раздела основывается на работах Фергюсона (Ferguson) [87] и Болея (Boley) и Голуба [35; 36].

Периодическая якобиева матрица  $\mathbf{J}_{per}$  содержит  $2n$  членов  $(a_i, b_i)_1^n$ . Покажем, как построить  $\mathbf{J}_{per}$  исходя из условия  $\sigma(\mathbf{J}_{per}) = (\lambda_i)_1^n$ ,  $\sigma(\mathbf{J}_{per,1}) = (\mu_i)_1^{n-1}$  и одного дополнительного условия:

$$\beta = b_1 b_2 \dots b_n. \quad (5.4.1)$$

Удобно рассмотреть две матрицы: исходную матрицу  $\mathbf{J}_{per}$  (5.1.4) и еще одну матрицу  $\mathbf{J}_{per}^-$ , у которой  $b_n$  заменены на  $-b_n$ . Предположим, что  $\sigma(\mathbf{J}_{per}^-) = (\lambda_i^-)_1^n$ . Очевидно, существуют связи между  $\lambda_i^-$  и  $\lambda_i$ . Вновь  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  чередуются, как и в (5.3.1), также чередуются и  $\lambda_i^-$  с  $\mu_i$ . Предположим, как и прежде, что  $(\mu_i)_1^{n-1}$  различны, т.е. (5.3.2) выполнено.

Начнем с построения двух окаймленных диагональных матриц —  $\mathbf{B}$  строится из  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ ,  $\mathbf{B}^-$  строится из  $(\lambda_i^-)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ . Они имеют следующий вид:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^- = \begin{bmatrix} a_1^- & \widehat{\mathbf{b}}^{-T} \\ \widehat{\mathbf{b}}^- & \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (5.4.2)$$

Здесь  $a_1, \widehat{\mathbf{b}}$  определены в (5.3.4), (5.3.6), а  $a_1^-, \widehat{\mathbf{b}}^-$  получаются из (5.3.4), (5.3.6) заменой  $\lambda_i$  на  $\lambda_i^-$ .

Поскольку  $\sigma(\mathbf{J}_{per}) = \sigma(\mathbf{B})$  и  $\sigma(\mathbf{J}_{per,1}) = \sigma(\mathbf{B}_1)$ ,  $\mathbf{J}_{per}$  и  $\mathbf{B}$  связаны друг с другом ортогональным преобразованием

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \mathbf{e}_1^T + b_n \mathbf{e}_{n-1}^T \\ b_1 \mathbf{e}_1 + b_n \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$ ,  $\mathbf{e}_{n-1} = \{0, 0, \dots, 1\}$  принадлежат  $V_{n-1}$ , и аналогично

$$\mathbf{B}^- = \begin{bmatrix} a_1^- & \widehat{\mathbf{b}}^{-T} \\ \widehat{\mathbf{b}}^- & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^- & b_1 \mathbf{e}_1^T - b_n \mathbf{e}_{n-1}^T \\ b_1 \mathbf{e}_1 - b_n \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}.$$

Подсистемы этих уравнений, соответствующие  $\widehat{\mathbf{b}}$  и  $\widehat{\mathbf{b}}^-$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{b}} &= \mathbf{Q}_1^T (b_1 \mathbf{e}_1 + b_n \mathbf{e}_{n-1}), \\ \widehat{\mathbf{b}}^- &= \mathbf{Q}_1^T (b_1 \mathbf{e}_1 - b_n \mathbf{e}_{n-1}). \end{aligned}$$

Складываем и вычитая их, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{b}}^- &= 2b_1 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{e}_1 = 2b_1 \mathbf{x}_1, \\ \widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\mathbf{b}}^- &= 2b_n \mathbf{Q}_1^T \mathbf{e}_{n-1} = 2b_n \mathbf{x}_{n-1},\end{aligned}$$

где, как и в (5.3.9),  $\mathbf{x}_1$  является первым столбцом  $\mathbf{Q}_1^T$ , а  $\mathbf{x}_{n-1}$  —  $(n-1)$  столбцом. Зная  $\widehat{\mathbf{b}}$  и  $\widehat{\mathbf{b}}^-$ , можно получить из этих уравнений  $b_1$  и  $b_n$  (с точностью до знака), поскольку  $\|\mathbf{x}_1\| = 1 = \|\mathbf{x}_{n-1}\|$ . Теперь, имея  $a_1, b_1$  и  $\mathbf{x}_1$ , можно вычислить  $\mathbf{J}_{per,1}$ , используя, как и прежде, алгоритм Ланцоша.

Однако, восстанавливая  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}^-$ , а точнее,  $\widehat{\mathbf{b}}$  и  $\widehat{\mathbf{b}}^-$ , предполагалось, что известны как  $(\lambda_i)_1^n$ , так и  $(\lambda_i^-)_1^n$ . В завершение анализа покажем, что на самом деле можно построить  $\widehat{\mathbf{b}}^-$  по  $(\lambda_i)_1^n$  и  $\beta$  (5.4.1).

Периодическая якобиева матрица  $\mathbf{J}_{per}$  отличается от обыкновенной якобиевой матрицы только наличием элементов  $b_n$  в углах. Это означает, что  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{per})$  и  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{per}^-)$  отличаются от  $n$ -го главного минора  $p_n(\lambda)$  только квадратичными по  $b_n$  членами. В самом деле:

$$\begin{aligned}\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{per}) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = p_n(\lambda) - b_n^2 r_{n-2}(\lambda) - 2\beta, \\ \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_{per}^-) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^-) = p_n(\lambda) - b_n^2 r_{n-2}(\lambda) + 2\beta,\end{aligned}$$

где  $r_{n-2}$  является главным минором, соответствующим строкам и столбцам  $2, 3, \dots, n-1$ . Вычитая одно уравнение из другого, имеем

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^-) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) + 4\beta.$$

Это означает, что можно выразить  $(\widehat{b}_j^-)^2$  через  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ :

$$(\widehat{b}_j^-)^2 = -\frac{\prod_{i=1}^n (\mu_j - \lambda_i^-)}{\prod_{i=1}^{n-1} (\mu_j - \mu_i)} = -\frac{\prod_{i=1}^n (\mu_j - \lambda_i) + 4\beta}{\prod_{i=1}^{n-1} (\mu_j - \mu_i)}.$$

Но неотрицательность этого выражения не следует из условия чередования  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ . Необходимо исследовать этот вопрос более подробно. Сначала предположим, что  $\beta = 0$ . В этом случае выражение является, конечно, неотрицательным и в действительности положительным, если  $\lambda$  и  $\mu$  строго чередуются. Если они строго чередуются, то из соображений непрерывности можно заключить, что для каждого значения  $j$  выражение будет неотрицательным при  $\beta$ , лежащем на отрезке  $[-e_j, f_j]$

в окрестности нуля,  $e_j > 0$ ,  $f_j > 0$ . Это означает, что все  $(b_j^-)^2$  на самом деле являются неотрицательными на пересечении таких отрезков. Для  $\beta$  из этого пересечения так поставленная задача имеет решение; для  $\beta$ , не принадлежащих этому интервалу, задача не имеет (действительного) решения. Болей и Голуб в работе [36] предложили алгоритм вычисления  $J_{per}$  таким способом. См. также работу Болей и Голуба [35]. В работе Ксю (Ху) [339] представлен подробный анализ задачи и показано, что (теорема 2.8.3) решение существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^n |\mu_j - \lambda_k| \geq 2\beta(1 + (-1)^{n-j+1}) \quad (5.4.3)$$

при всех  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Заметим, что если  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$  заданы, то из неравенства (5.4.3) следует верхняя граница значений для  $\beta$ . Андреа (Andrea) и Берри (Berri) предложили в своей работе [9] совершенно иной подход к задаче, используя цепные дроби.

## 5.5. Блочный алгоритм Ланцоша

В разделе 5.1 были приведены рис. 5.1.5 и 5.1.6, а также показано, что матрицы, ассоциированные с теми графами, пятидиагональные или блочные трехдиагональные. Для того чтобы развить методы решения обратных задач для таких систем, нам понадобится блочная версия фундаментального алгоритма Ланцоша, описанного в разделе 4.2.

Сначала напомним исходный скалярный вариант: по симметричной матрице  $\mathbf{A}$  и вектору  $\mathbf{x}_1$  построить якобиеву матрицу  $\mathbf{J}$ , как в уравнении (4.2.1), и ортогональную матрицу  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$  такие, что  $\mathbf{A} = \mathbf{XJX}^T$ .

В алгоритме используются поочередно два уравнения:

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{J}. \quad (5.5.1)$$

Таким образом, (1,1) член в (5.5.1a) имеет вид

$$a_1 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x}_1,$$

а первый столбец (5.5.1b)

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_1 = a_1 \mathbf{x}_1 - b_1 \mathbf{x}_2$$

можно переписать как

$$b_1 \mathbf{x}_2 = a_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_2, \quad (5.5.2)$$

откуда получаем

$$b_1 = \|\mathbf{z}_2\|, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2/b_1.$$

Далее, (2,2) элемент  $\mathbf{J}$  имеет вид  $a_2 = \mathbf{x}_2^T \mathbf{A} \mathbf{x}_2$ , а второй столбец (5.5.1b)

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_2 = -b_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 - b_2 \mathbf{x}_3$$

можно переписать как

$$b_2 \mathbf{x}_3 = -b_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_3,$$

откуда

$$b_2 = \|\mathbf{z}_3\|, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{z}_3/b_2$$

и т. д.

Теперь построим блочный вариант этих уравнений, следуя работе Болея и Голуба [36]. Начнем с симметричной матрицы  $\mathbf{A} \in S_n$  и положим  $n = ps$  для некоторого целого  $s$ . Преобразуем  $\mathbf{A}$  к блочной трехдиагональной матрице  $\mathbf{J}$ , где

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1^T & & & \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 & -\mathbf{B}_2^T & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\mathbf{B}_{s-1} & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}. \quad (5.5.3)$$

Здесь  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s$  — симметричные матрицы, т. е. принадлежат  $S_p$ , а  $\mathbf{B}_i$  — верхние треугольные матрицы из  $M_p$ . Мы предполагаем, что кроме  $\mathbf{A}$  нам также даны  $p$  ортонормированных векторов  $(\mathbf{x}_i)_1^p \in V_n$ , образующие столбцы  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p] \in M_{n,p}$ . Поэтому матрица  $\mathbf{X}_1$  удовлетворяет условию  $\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 = \mathbf{I}_p$ .

Целью данного метода является построение  $\mathbf{J}$  и ортогональной матрицы  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s]$  такой, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{J} \mathbf{X}^T.$$

Точно так же, как и в скалярном алгоритме Ланцоша, рассмотрим два уравнения

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X} \mathbf{J}. \quad (5.5.4)$$

Первый  $p \times p$ -блок первого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{X}_1^T \mathbf{A} \mathbf{X}_1,$$

а первый  $n \times p$ -блок второго уравнения можно переписать как

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 \mathbf{A}_1 - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_1,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{X}_2 \mathbf{B}_1 = \mathbf{X}_1 \mathbf{A}_1 - \mathbf{A} \mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_2.$$

В скалярном варианте мы имели  $b_1 \mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2$ , откуда сразу следовало, что  $b_1 = \|\mathbf{z}_2\|$  и, следовательно,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2/b_1$ . В блочном варианте мы построили  $\mathbf{Z}_2 \in M_p$ , и хотим переписать это в виде  $\mathbf{X}_2 \mathbf{B}_1$ . Запишем  $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p]$ ,  $\mathbf{Z}_2 = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_p]$  и

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & & \\ & & & b_{pp} \end{bmatrix}$$

тогда нахождение  $(\mathbf{y}_i)_1^p$  и элементов  $\mathbf{B}_1$  является, по существу, процессом Грама-Шмидта: нахождение ортонормированных комбинаций векторов  $(\mathbf{z}_i)_1^p$ . Таким образом,

$$b_{11} \mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1 \text{ влечет } b_{11} = \pm \|\mathbf{z}_1\|, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1/b_{11}, \quad (5.5.5)$$

и тогда из

$$b_{12} \mathbf{y}_1 + b_{22} \mathbf{y}_2 = \mathbf{z}_2$$

следует

$$b_{12} = \mathbf{y}_1^T \mathbf{z}_2, \quad b_{22} \mathbf{y}_2 = \mathbf{z}_2 - b_{12} \mathbf{y}_1 = \mathbf{w}_2,$$

так что

$$b_{22} = \pm \|\mathbf{w}_2\|, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{w}_2/b_{22} \text{ и т. д.} \quad (5.5.6)$$

Процесс Грама-Шмидта тесно связан с разложением матрицы на ортогональную и верхнюю треугольную. Разложение  $\mathbf{X}_2 \mathbf{B}_1 = \mathbf{Z}_2$  представляет собой запись  $\mathbf{Z}_2$  в виде произведения  $\mathbf{X}_2$ , которая принадлежит  $M_{n,p}$ , но удовлетворяет условию  $\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{I}_p$ , и верхней треугольной матрицы  $\mathbf{B}_1 \in M_p$ . Поскольку  $\mathbf{X}_2$  не просто ортогональная матрица из  $M_p$ ,

обычный алгоритм должен быть модифицирован с учетом особенностей разложения.

Теперь можно повторить этот процесс. Мы нашли  $\mathbf{X}_2$ , следовательно,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{X}_2^T \mathbf{A} \mathbf{X}_2$$

и

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_2 = -\mathbf{X}_1 \mathbf{B}_1^T + \mathbf{X}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{X}_3 \mathbf{B}_2,$$

так что

$$\mathbf{X}_3 \mathbf{B}_2 = -\mathbf{X}_1 \mathbf{B}_1^T + \mathbf{X}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{A} \mathbf{X}_2 = \mathbf{Z}_3,$$

откуда находим  $\mathbf{X}_3, \mathbf{B}_2$ , как и прежде, используя процесс Грама-Шмидта. Заметим, что различный выбор квадратных корней, как в (5.5.5) и (5.5.6), приводит к различным матрицам  $\mathbf{J}$ . В работе Болея и Голуба [36] представлены все детали алгоритма.

Дальнейшие исследования блочного алгоритма Ланцоша были проведены в работах Андервуда (Underwood) [325] и Голуба и Андервуда [134]. См. также работу Маттиса и Хочстада [222]. Совершенно иной, высоко эффективный, метод решения обратных задач для блочных матриц был развит Биглером-Кёнигом (Biegler-König) в работах [28; 29; 30; 31]. См. также работу Грэга (Gragg) и Хэррода (Harrod) [153], где описан метод, основанный на алгоритме Рутিশозера (Rutishauser); авторы исследовали связи с различными задачами. Кроме того, стоит обратить внимание на работы Глэдвела и Вилмса [114], Фридленда [92; 93] и, в частности, Чу (Chu) [58].

## 5.6. Обратные задачи для пятидиагональных матриц

Можно было бы сформулировать обратную задачу на собственные значения для произвольной симметричной матрицы с  $2p + 1$  блоками, как это сделано в работе Болея и Голуба [36]. Вместо этого мы ограничимся случаем  $p = 2$  пятидиагональной матрицы  $\mathbf{A}$ . Пятидиагональный случай имеет место в обратной задаче колебаний балки, но мы отложим рассмотрение стержня до тех пор, пока не рассмотрим положительность в главе 6. Пятидиагональная матрица, описывающая матрицу жесткости балки, имеет специальный вид: некоторые ее элементы должны быть положительны, а другие отрицательны. В этом разделе мы не будем рассматривать вопросы, касающиеся знаков.

Предположим, что нам задано

$$\sigma(\mathbf{A}) = (\lambda_i)_1^n, \quad \sigma(\mathbf{A}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}, \quad \sigma(\mathbf{A}_{1,2}) = (\nu_i)_1^{n-2}, \quad (5.6.1)$$

где, как и прежде,  $\sigma(\mathbf{A}_{1,2})$  обозначает спектр матрицы  $\mathbf{A}_{1,2}$  при удалении первых двух строк и столбцов из  $\mathbf{A}$ . Очевидно, собственные значения чередуются, и для простоты предположим, что чередование строгое.

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{n-1} < \lambda_n, \quad (5.6.2)$$

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \dots < \nu_{n-2} < \mu_{n-1}. \quad (5.6.3)$$

Нашей целью является построение  $\mathbf{A}$  такой, что выполняется (5.6.1). Имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.6.4)$$

где только первые две компоненты вектора  $\mathbf{b}$  ненулевые. Обозначим матрицы собственных векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_1$  через  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{Q}^{(1)}$  соответственно так, что

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \Lambda, \quad \mathbf{Q}_1^{(1)T} \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{M}. \quad (5.6.5)$$

Собственные векторы  $\mathbf{A}$  поэтому имеют вид  $\mathbf{q}_i$ , где  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$ , тогда как собственные векторы  $\mathbf{A}_1$  равны  $\mathbf{q}_i^{(1)}$ , где  $\mathbf{Q}^{(1)} = [\mathbf{q}_1^{(1)}, \mathbf{q}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{n-1}^{(1)}]$ .

Начнем с построения окаймленной диагональной матрицы, как в разделе 5.3,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (5.6.6)$$

такой, что  $\sigma(\mathbf{B}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{M}) = (\mu_i)_1^{n-1}$ . Член  $a_1$  получается взятием следа:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i, \quad (5.6.7)$$

тогда как  $\widehat{\mathbf{b}}$  дается выражением (5.3.6):

$$(\widehat{b}_i)^2 = - \frac{\prod_{j=1}^n (\mu_i - \lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_i - \mu_j)}. \quad (5.6.8)$$

Теперь, следуя уравнению (5.3.8), свяжем  $\mathbf{A}$  с

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & \widehat{\mathbf{b}}^T \\ \widehat{\mathbf{b}} & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^{(1)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (5.6.9)$$



Как и в (5.3.9), имеем

$$\mathbf{Q}^{(1)T} \mathbf{b} = \widehat{\mathbf{b}}. \quad (5.6.10)$$

Однако теперь, в противоположность ситуации в разделе 5.3,  $\mathbf{b}$  не является просто множителем  $\mathbf{e}_1$ , так что  $\widehat{\mathbf{b}}$  не является вектором первых компонент собственных векторов  $\mathbf{A}_1$ . Но можно использовать анализ раздела 4.3 для получения первых компонент собственных векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_1$ :

$$q_{1i}^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad (q_{1i}^{(1)})^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n-2} (\nu_j - \mu_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j - \mu_i)}. \quad (5.6.11)$$

Чтобы применить блочный алгоритм Ланцоша для построения  $\mathbf{A}$ , кроме вектора  $\mathbf{x}_1$ , состоящего из первых компонент собственных векторов  $\mathbf{A}$ , нам также необходим вектор  $\mathbf{x}_2$ , состоящий из вторых компонент. Вместе они составляют  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \in M_{n,2}$ . Разделим вектор  $\mathbf{q}_i$  следующим образом:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} q_{1i} \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_i \in V_{n-1}. \quad (5.6.12)$$

Поскольку  $\mathbf{q}_i$  является  $i$ -ым собственным вектором  $\mathbf{A}$ , заданной в (5.6.4), имеем

$$\begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1i} \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} q_{1i} \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix}, \quad (5.6.13)$$

следовательно,

$$q_{1i} \mathbf{b} + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i.$$

Теперь, умножая это слева на  $\mathbf{Q}^{(1)T}$ , получаем

$$q_{1i} \mathbf{Q}^{(1)T} \mathbf{b} + \mathbf{Q}_1^{(1)T} \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{Q}^{(1)T} \mathbf{y}_i. \quad (5.6.14)$$

Но из уравнения (5.6.10) следует  $\mathbf{Q}^{(1)T} \mathbf{b} = \widehat{\mathbf{b}}$ , а из (5.6.5b) получаем  $\mathbf{Q}_1^{(1)T} \mathbf{A}_1 = \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(1)T}$ , таким образом, из уравнения (5.6.14) следует

$$q_{1i} \widehat{\mathbf{b}} = -(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{Q}^{(1)T} \mathbf{y}_i,$$

откуда имеем

$$\mathbf{y}_i = -q_{1i} \mathbf{Q}^{(1)} (\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I})^{-1} \widehat{\mathbf{b}}.$$

Нам нужна лишь первая компонента  $y_i$ . Она имеет вид

$$y_{1i} = -q_{1i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_{1j}^{(1)} \widehat{b}_j}{\mu_j - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6.15)$$

Поскольку  $\widehat{b}_j$  дается выражением (5.6.8), а  $q_{1i}, q_{1j}^{(1)}$  имеют вид (5.6.11), из этого уравнения находим  $y_{1i}$ , и, следовательно,  $\mathbf{x}_2 = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}\}$ .

### Упражнения 5.6

- 1) Проверить, что вектор  $\mathbf{x}_2$  из (5.6.15) действительно ортогонален  $\mathbf{x}_1$ , как и требуется.
- 2) Распространить метод, описанный в данном разделе, на общий случай  $2p + 1$ -блочной матрицы.

## 5.7. Обратные задачи для графов, являющихся деревьями

Обратные задачи на собственные значения для графа путей и звезды являются частными примерами общей задачи. Как граф путей на рис. 5.1.2, так и звезда на рис. 5.1.3 являются *деревьями*, согласно определению раздела 5.1. Этим деревьям соответствуют якобиева матрица  $\mathbf{J}$  или, как мы выберем здесь, якобиева матрица с обратным знаком  $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{J}}$  и окаймленная диагональная матрица соответственно. В обеих задачах были заданы два спектра, а именно  $\sigma(\mathbf{A}) = (\lambda_i)_1^n$  и  $\sigma(\mathbf{A}, 1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ . Второй спектр соответствовал собственным векторам  $\mathbf{u}$ , положенным равными нулю в заданной вершине — вершине 1. В обоих случаях спектры удовлетворяли условию чередования Коши

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (5.7.1)$$

Также в обоих случаях, если все неравенства (5.7.1) были строгими, матрица  $\mathbf{A}$  была неприводима, а соответствующий ей граф  $\mathcal{G}$  был связным.

Данный раздел служит введением к важной работе Дюарта (Duarte) [81], в которой освещается история обратных задач на собственные значения для деревьев, и установлен общий результат. В нашем анализе мы рассмотрим простейшие детали общего случая. Как и Дюарт, здесь

и иногда в главе 6 мы будем нумеровать собственные значения в порядке убывания. В частности, будет показано, что если  $\mathcal{G}$  является деревом, содержащим  $n$  вершин  $\mathcal{V}$ , и если заданы два спектра  $(\lambda_i)_1^n, (\mu_i)_1^{n-1}$ , удовлетворяющие неравенству

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 \cdots > \mu_{n-1} > \lambda_n > 0, \quad (5.7.2)$$

то можно найти симметричную матрицу  $\mathbf{A} \in S_n$ , соответствующую  $\mathcal{G}$ , такую, что  $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{A}) = (\lambda_i)_1^n$ ,  $\sigma_1 \equiv \sigma(\mathbf{A}_1) = (\mu_i)_1^{n-1}$ . Для простоты рассмотрим строгое чередование и наложим условие положительности; Дюарт ослабил эти ограничения.

Начнем с наблюдения, что оба случая, рассмотренные выше — граф путей (якобиева матрица) и звезда (окаймленная диагональная матрица), — имеют общие черты. Во-первых, заметим, что элементы построенных матриц можно рассматривать как функции от начальных данных  $\sigma, \sigma_1$ . Во-вторых, заметим, что обе матрицы содержат  $n^2 - n - 2(n-1) = n^2 - 3n + 2$  постоянных функций, которые, по существу, все равны нулю. Отсюда вытекают следующие вопросы:

- 1) Может ли постоянная функция, входящая в  $\mathbf{A}$ , быть отличной от нуля?
- 2) Можно ли увеличить количество этих постоянных функций?

Ответ на первый вопрос отрицателен. В случае если  $\mathbf{A} \in S_n$  имеет собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  с максимальным модулем  $\lambda$ , то (упражнение 5.7.1)  $|a_{ij}| \leq \lambda$ , следовательно,  $\mathbf{A}$  не может иметь никаких других фиксированных элементов, независимых от собственных значений, кроме как нулевых. Для ответа на второй вопрос заметим, что если неравенства (5.7.2) выполнены, то  $\mathbf{A}$  должна быть неприводимой. В случае если  $\mathbf{A}$  была бы приводима, т.е. после возможной перенумеровки вершин, ее можно было бы записать в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

тогда  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_1$  (которая после перенумеровки стала бы  $\mathbf{A}_i$ ) имели бы общие собственные значения, что противоречит (5.7.2). Таким образом, матрица  $\mathbf{A}$  неприводима, а граф  $\mathcal{G}$  связный. Теперь заметим, что  $\mathbf{A}$  должна быть положительно определенной, так что все диагональные элементы  $a_{ii}$  отличны от нуля. Максимальное число нулевых элементов

достигается в случае матриц, чьи графы являются деревьями, и это число в точности равно  $n^2 - 3n + 2$  (упражнение 5.7.2). Таким образом, ответ на второй вопрос также отрицателен.

Ответив на эти вопросы, приступим к анализу. Начнем с рассмотрения дерева  $\mathcal{G}$ , выберем вершину из  $\mathcal{V}$ , обозначим ее 1 и рассмотрим последствия удаления вершины 1 — получившемуся графу соответствует матрица с удаленными из  $\mathbf{A}$  первой строкой и первым столбцом. Во-первых, обозначим символом  $\mathcal{N}$  набор  $m$  вершин  $j$  графа  $\mathcal{G}$ , которые связаны с вершиной 1. Далее, обозначим  $\mathcal{G}'$  граф, получившийся в результате удаления вершины 1 из  $\mathcal{G}$ . На рис. 5.7.1 приведены два примера. На рис. 5.7.1 а вершина 1 является крайней вершиной графа путей,  $\mathcal{N} = \{2\}$ , и  $\mathcal{G}'$  является связным графом с вершинами  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ . На рис. 5.7.1 б  $\mathcal{N} = \{2, 4\}$ , и  $\mathcal{G}'$  содержит две связные компоненты, по одной с обеих сторон от вершины 1; назовем их  $\mathcal{G}'_2$  и  $\mathcal{G}'_4$  соответственно. В общем случае граф  $\mathcal{G}'$  содержит  $m$  связных компонент, которые мы обозначим  $\mathcal{G}'_j, j \in \mathcal{N}$ . Соответствующая ему матрица  $\mathbf{A}_{,1}$  содержит  $m$  неприводимых компонент.

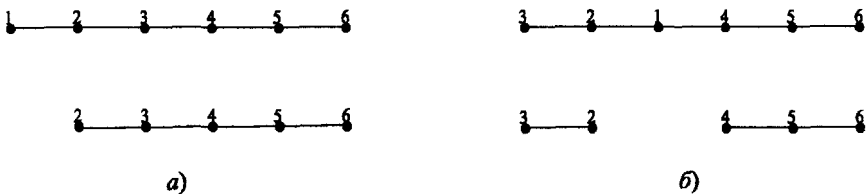


Рис. 5.7.1. Удаление вершины 1 из графа путей

На рис. 5.7.2 приведен еще один пример графа — звезда. В данном случае  $\mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5\}$  и  $\mathcal{G}'$  содержит 4 связных компоненты:  $\mathcal{G}'_j = \{j\}, j = 2, 3, 4, 5$ .

И наконец, нам понадобится символ для обозначения графа, полученного в результате удаления вершины  $j \in \mathcal{N}$  из  $\mathcal{G}'_j$ ; назовем его  $\mathcal{G}''_j$ . На рис. 5.7.3 показаны эти подграфы графа  $\mathcal{G}'$ , приведенного на рис. 5.7.1.

Заметим, что в случае звезды набор вершин графа  $\mathcal{G}''_j$  пуст, поскольку набором вершин графа  $\mathcal{G}'_j$  является  $\{j\}$ .

Введя обозначения, которые позволяют нам проследить, что происходит, когда мы удаляем вершину из графа, необходимо рассмотреть два набора собственных значений, и как они связаны с матрицей  $\mathbf{A}$ . Прежде чем сделать это, вернемся к двум рассмотренным ранее примерам,

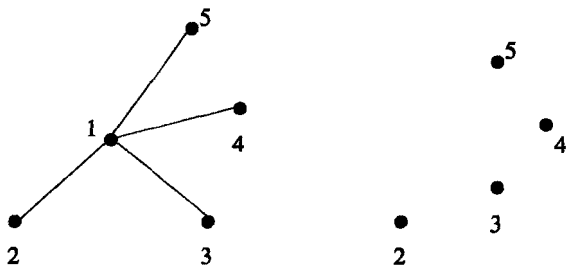
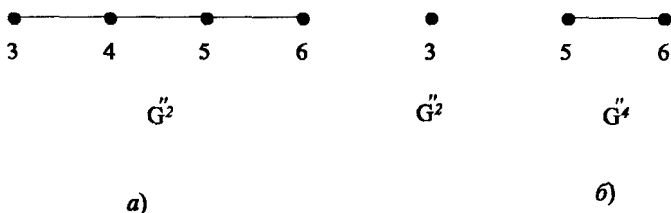


Рис. 5.7.2. Удаление центра звезды

Рис. 5.7.3. Подграфы  $\mathcal{G}''_j$  графа  $\mathcal{G}'$ 

соответствующим удалению крайней вершины из графа путей и центра звезды.

Сначала рассмотрим граф путей с вершиной 1. Собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$  являются нулями последних главных миноров со старшим коэффициентом 1  $P'_n(\lambda)$  и  $P'_{n-1}(\lambda)$  соответственно, которые, согласно обозначениям уравнения (4.3.4), связаны условием

$$P'_n(\lambda) = (\lambda - a_1)P'_{n-1}(\lambda) - b_1^2 P'_{n-2}(\lambda). \quad (5.7.3)$$

Заметим, что  $P'_n, P'_{n-1}, P'_{n-2}$  в точности соответствуют графам  $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \equiv \mathcal{G}'_2$  и  $\mathcal{G}'' \equiv \mathcal{G}''_2$ ; по существу,  $P'_n, P'_{n-1}, P'_{n-2}$  являются характеристическими многочленами  $\Delta$  матрицы  $\mathbf{A}$  и подматриц матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующих подграфам  $\mathcal{G}'$  и  $\mathcal{G}''_2$ :

$$P'_n(\lambda) = \Delta(\mathbf{A}), \quad P'_{n-1}(\lambda) = \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')), \quad P'_{n-2}(\lambda) = \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}''_2)).$$

Кроме того,  $a_1 = a_{11}, b_1 = a_{12}$  и  $\mathcal{N} = \{2\}$ . Это означает, что можно переписать (5.7.3) как

$$\Delta(\mathbf{A}) = (\lambda - a_{11}) \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{1j}^2 \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}''_j)). \quad (5.7.4)$$

Теперь рассмотрим звезду. Уравнением, соответствующим (5.7.3), является уравнение (5.3.5):

$$\lambda - a_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\widehat{b}_i^2}{\lambda - \mu_i} = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \mu_j)}. \quad (5.7.5)$$

Чтобы переписать его в тех же обозначениях, как и (5.7.4), заметим, что для звезды с  $m + 1 = n$  вершинами, с центром, обозначенным 1,  $\mathcal{N} = \{2, 3, \dots, m + 1\}$ ,  $a_1 = a_{11}$ ,  $\widehat{b}_i = a_{1,i+1}$ , так что

$$\Delta(\mathbf{A}) = (\lambda - a_{11}) \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{1j}^2 \prod_{k \in \mathcal{N} \setminus j} \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_k)). \quad (5.7.6)$$

Обратим внимание на то, что мы приписали  $m = n - 1$  величин  $\mu$   $m$  связным компонентам  $\mathcal{G}'$  так, что  $\mu_i$  приписано  $\mathcal{G}'_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Кроме того, несмотря на то что первые члены в правых частях (5.7.4), (5.7.6) одинаковы, вторые члены различны. В случае звезды набор вершин графа  $\mathcal{G}'_j$  пуст.

Партер (Parter) в своей работе [265] получил общий результат, который включает в себя частные случаи (5.7.4) и (5.7.6):

**Лемма 5.7.1.**  $\Delta(\mathbf{A}) = (\lambda - a_{11}) \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{1j}^2 \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j))$ .  $\prod_{k \in \mathcal{N} \setminus j} \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_k))$  с учетом условия  $\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j)) = 1$ , если, как в случае звезды, набор вершин графа  $\mathcal{G}'_j$  пуст.

Лемма 5.7.1, как и соответствующий результат (5.7.5) для звезды, по существу, представляет собой разложение на элементарные дроби. В общем случае имеем

$$\frac{\Delta(\mathbf{A})}{\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'))} = \lambda - a_{11} - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{1j}^2 \frac{\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j))}{\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j))}, \quad (5.7.7)$$

где мы использовали тот факт, что  $\mathcal{G}'$  имеет  $m$  отдельных связных компонент  $\mathcal{G}'_j$ , так что

$$\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')) = \prod_{j \in \mathcal{N}} \Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j)).$$

Уравнение (5.7.7) является первым шагом индуктивных рассуждений: в результате удаления вершины 1 из  $\mathcal{G}$  граф  $\mathcal{G}'$  распадается на  $m$  компонент  $\mathcal{G}'_j$ , и  $\mathcal{G}'_j$  имеет такую же связь с  $\mathcal{G}'_j$ , как и  $\mathcal{G}'$  с  $\mathcal{G}$ . Это означает, что

если можно влиять на восстановление  $\mathbf{A}$  на компонентах  $\mathcal{G}'_j$  из  $\mathcal{G}'$  за счет данных, относящихся к  $\mathcal{G}''_j$  и  $\mathcal{G}'_j$ , тогда можно восстановить матрицу  $\mathbf{A}$  целиком.

Теперь, поскольку  $\mathcal{G}'_j$  само по себе является деревом и  $\mathcal{G}''_j$  получается в результате удаления вершины  $j$  из  $\mathcal{G}'_j$ , корни  $\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}''_j))$  должны чередоваться с корнями  $\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}'_j))$  точно так же, как  $\mu_i$  чередуются с  $\lambda_i$ , т. е. выполняется (5.7.2). Но уравнение (5.7.7) в результате разложения на элементарные дроби дает  $\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}''_j))$ . Имеем

$$\Delta(\mathbf{A}) = f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad (5.7.8)$$

$$\Delta(\mathbf{A}(\mathcal{G}')) = g(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \mu_i). \quad (5.7.9)$$

Далее мы должны распределить  $n - 1$  величин  $\mu$  среди  $m$  компонент  $\mathcal{G}'_j$ . Предположим, что  $\mathcal{G}'_j$  имеет  $v_j$  вершин, тогда мы должны разбить индексы  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  на  $m$  наборов так, что если  $j \in \mathcal{N}$ , то графу  $\mathcal{G}'_j$  приписано  $v_j$  индексов. Это эквивалентно перегруппировке членов  $g(\lambda)$  в  $m$  членов  $g_j(\lambda)$ , где  $g_j(\lambda)$  имеет степень  $v_j$ :

$$g(\lambda) = \prod_{j \in \mathcal{N}} g_j(\lambda).$$

Отсюда следует, что мы должны удостовериться, что если  $f(\lambda)/g(\lambda)$  раскладывается на элементарные дроби

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \lambda - a - \sum_{j \in \mathcal{N}} y_j \frac{h_j(\lambda)}{g_j(\lambda)}, \quad (5.7.10)$$

где  $h_j(\lambda)$  — многочлен со старшим коэффициентом 1, удовлетворяющий  $\deg(h_j) < \deg(g_j)$ , и если  $\lambda$  и  $\mu$  чередуются как в (5.7.2), тогда  $y_j$  положительно, а нули  $h_j(\lambda)$  и  $g_j(\lambda)$  чередуются. Для этого лучше всего привести последнее выражение к виду, используемому в лемме 5.7.1, умножив для этого обе части уравнения на  $g(\lambda)$ :

$$f(\lambda) = (\lambda - a)g(\lambda) - \sum_{j \in \mathcal{N}} y_j h_j(\lambda) u_j(\lambda),$$

где  $u_j(\lambda) = g(\lambda)/g_j(\lambda)$ . Заметим, что

$$u_j(\lambda) = \prod_{s \in Q} (\lambda - \mu_s),$$

где  $Q$  содержит на  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  меньше индексов, чем приписано к  $g_j$ . Выберем  $j \in \mathcal{N}$  и предположим, что  $\mu_r, \mu_{r+p}$  являются двумя последовательными нулями  $g_j(\lambda)$ , тогда, поскольку  $g(\mu_r) = 0 = g(\mu_{r+p})$ , имеем

$$\begin{aligned} f(\mu_r) &= -y_j h_j(\mu_r) u_j(\mu_r), \\ f(\mu_{r+p}) &= -y_j h_j(\mu_{r+p}) u_j(\mu_{r+p}). \end{aligned}$$

Нам нужно показать, что  $h_j(\lambda)$  имеет нули между  $\mu_r$  и  $\mu_{r+p}$ , т. е. что  $h_j(\mu_r), h_j(\mu_{r+p})$  имеют противоположные знаки. Все члены  $(\mu_r - \mu_s)$  и  $(\mu_{r+p} - \mu_s)$ , появляющиеся в  $u_j(\mu_r)$  и  $u_j(\mu_{r+p})$ , имеют одинаковые знаки, кроме тех  $\mu_s$ , которые лежат между  $\mu_{r+p}$  и  $\mu_r$ ; таких  $\mu$  всего  $p-1$ , им отвечают индексы  $r+p-1, \dots, r+2, r+1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} p \text{ нечетное ; } u_j(\mu_r), u_j(\mu_{r+p}) &\text{ имеют одинаковый знак,} \\ p \text{ четное ; } u_j(\mu_r), u_j(\mu_{r+p}) &\text{ имеют противоположные знаки.} \end{aligned}$$

По предположению,  $f(\lambda)$  имеет только один нуль между любыми двумя последовательными  $\mu$ 's, таким образом:

$$\begin{aligned} p \text{ нечетное ; } f(\mu_r), f(\mu_{r+p}) &\text{ имеют противоположные знаки} \\ p \text{ четное ; } f(\mu_r), f(\mu_{r+p}) &\text{ имеют одинаковый знак.} \end{aligned}$$

Комбинируя эти результаты, мы видим, что  $h_j(\mu_r)$  и  $h_j(\mu_{r+p})$  должны иметь противоположные знаки.

Далее проверим, что  $y_j$  положительно. Предположим, что  $v_j = q$  и что корнями  $g_j(\lambda)$  и  $h_j(\lambda)$  являются  $(\mu_{\alpha_i})_1^q$  и  $(\nu_{\alpha_i})_1^{q-1}$  соответственно, где

$$\mu_{\alpha_1} > \nu_{\alpha_1} > \mu_{\alpha_2} > \dots > \nu_{\alpha_{q-1}} > \mu_{\alpha_q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_j(\lambda) &= \prod_{i=1}^q (\lambda - \mu_{\alpha_i}), & h_j(\lambda) &= \prod_{i=1}^{q-1} (\lambda - \nu_{\alpha_i}), \\ f(\lambda) &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \end{aligned}$$



и предположим, что  $\alpha_1 = r$ , так что

$$f(\mu_r) = \prod_{i=1}^n (\mu_r - \lambda_i).$$

Теперь все  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  больше, чем  $\mu_r$ , так что знак  $f(\mu_r)$  есть  $(-1)^r$ . Все  $\nu_{\alpha_i}$  меньше, чем  $\mu_r$ , так что  $h_j(\mu_r) > 0$ . Наконец,

$$u_j(\mu_r) = \prod (\mu_r - \mu_i),$$

где сумма берется по всем  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\} / \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$ . Исключая знак, нам нужно рассмотреть только  $\mu_i > \mu_r$ , их всего  $r-1$ , так что знак  $u_j(\mu_r)$  есть  $(-1)^{r-1}$ . Следовательно,  $y_j > 0$ .

Итак, первый этап построения **A** имеет следующий вид: возьмем  $f(\lambda), g(\lambda)$  и сделаем разложение на элементарные дроби (5.7.10);  $a_{11} = a$ ,  $a_{1j} = (y_j)^{1/2}$ , тогда как нули  $g_j(\lambda)$  и  $h_j(\lambda)$  являются собственными значениями компонент **A**<sub>1</sub>.

На рис. 5.7.4 приведен пример дерева.

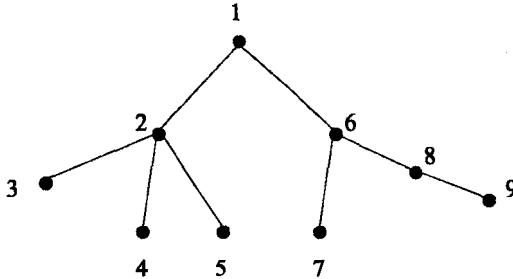


Рис. 5.7.4. 9-вершинное дерево

Матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} X & X & & & & & & & & X \\ X & X & X & X & X & & & & & \\ & X & X & & & & & & & \\ & & X & & X & & & & & \\ X & X & & & & X & & & & \\ & & & & & & X & X & X & \\ & & & & & & X & X & & \\ & & & & & & X & & X & X \\ & & & & & & & & X & X \end{bmatrix}.$$

На первом этапе  $\mathbf{A}_{,1}$  имеет две компоненты. Мы находим  $a_{11}, a_{12}, a_{16}$  и находим новые данные, которые позволяют построить звезду с вершинами  $\{2, 3, 4, 5\}$  и звезду-путь с вершинами  $\{6, 7, 8, 9\}$ . Для проведения второго этапа мы можем, если захотим, переобозначить каждую из связанных компонент так, что  $2 \rightarrow 1$  и  $6 \rightarrow 1$ .

Мы предположили, что данные для построения  $\mathbf{A}$  образуют два строго чередующихся спектра. Однако в случае графа путей и звезды возможно использовать взамен один спектр  $\sigma(\mathbf{A}) = (\lambda_i)_1^n$  и первые коэффициенты  $u_{1i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , нормированных собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ . Напомним результат, доказанный для произвольной матрицы  $\mathbf{A} \in S_n$ , а именно: собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_{,1}$  являются нулями уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{(u_{1i})^2}{\lambda - \lambda_i} = 0.$$

Дальнейшее обсуждение и ссылки на обратные задачи на собственные значения, связанные с древовидными графами, можно найти в работе Найлена и Ухлига [252].

Другие ссылки на огромное количество литературы, посвященной обратным задачам на собственные значения можно найти в работах Глэдвела [107; 124], Ноцедаля (Nocedal) и Овертона (Overton) [251], Фридлинда, Ноцедаля и Овертона [95], Икрамова и Чугунова [184], Ксю [339], Чу [58], а также Чу и Голуба [59].

### Упражнения 5.7

- 1) Показать, что если максимальная величина модуля собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A} \in S_n$  равна  $\lambda$ , то  $|a_{ij}| \leq \lambda$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .
- 2) Показать, что если матрица  $\mathbf{A} \in S_n$  соответствует графу  $\mathcal{G}$ , то максимальное число (недиагональных) нулевых элементов в  $\mathbf{A}$  достигается в случае, когда  $\mathcal{G}$  является деревом, и равно  $n^2 - 3n + 2$ .
- 3) Построить алгоритм для получения  $\mathbf{A}$  при заданных  $(\lambda_i)_1^n, (\mu_i)_1^n$  и известной структуре  $\mathcal{G}$ . Использовать его для нахождения  $\mathbf{A}$ , соответствующей графу  $\mathcal{G}$ , показанному на рис. 5.7.4. В качестве данных взять  $\{\lambda_i\}_1^9 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ ,  $\{\mu_i\}_1^8 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ . В качестве проверки найти собственные значения  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_{,1}$ .

---

## ГЛАВА 6

# Положительность

Стало быть, существуют два склада ума: один быстро и глубоко постигает следствия, вытекающие из того или иного начала, — это ум пронизательный; другой способен охватить множество начал, не путаясь в них, — это ум математический. Блез Паскаль. «Мысли», 2.

### 6.1. Введение

Основы спектрального анализа для вещественных симметрических матриц обсуждались в главе 1. Свойства собственных чисел, описанные в главе 1, наследуются всеми положительно определенными (положительно полуопределенными матрицами). В настоящей главе, которую можно опустить при первом прочтении, содержатся доказательства некоторых результатов, использовавшихся в главе 1. Главными среди этих результатов являются теорема 6.3.1, утверждающая, что если матрица  $\mathbf{A} \in S_n$ , то она имеет  $n$  вещественных собственных векторов, которые являются ортонормированными, а значит, порождают все  $V_n$ ; и теорема 6.3.7, дающая необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы  $\mathbf{A}$ . Знаки, положительные и отрицательные, постоянно появляются в этой главе, этим обусловлен выбор термина *положительность* для названия этой главы.

В главе 3 наше внимание сосредотачивается на более узком классе якобиевых матриц, которые имеют целый ряд дополнительных спектральных свойств.

Якобиевы матрицы имеют различные собственные значения и с возрастанием  $i$ ,  $u$  собственного вектора  $\mathbf{u}_i$  возрастает число перемен знаков среди элементов  $u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ni}$ . В этой главе будет показано, что многие спектральные свойства якобиевых матриц наследуются более широким классом *осцилляторных* матриц. В действительности, как от-

мечается в параграфе 6.5, существуют двойственные классы осцилляторных и *знаково-осцилляторных* матриц. Если матрица  $\mathbf{A}$  является осцилляторной и  $\mathbf{Z} = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1})$ , то  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{ZAZ}$  является знаково-осцилляторной и *наоборот*. Матрица Якоби  $\mathbf{J}$  из уравнения (3.1.4) является знаково-осцилляторной. Эти матрицы были введены и интенсивно изучались Гантмахером и Крейном (1950) [98], см. также работу Гантмахера (1959) [97]. Все матрицы, используемые в моделях конечных элементов или сосредоточенной массы для струн, стержней и балок, являются осцилляторными или знаково-осцилляторными, настоящая глава содержит большое количество ссылок, полезных для изучения осцилляторных матриц.

Теорема, на которой базируется теория осцилляторных матриц, принадлежит Перрону (теорема 6.5.1). Эта теорема связывает их со строго положительными матрицами, все элементы которых положительны, и утверждает, что такие матрицы имеют одно собственное значение наибольшей величины, что это собственное значение является вещественным и положительным, а у отвечающего ему собственного вектора все координаты являются положительными.

Матрицы, используемые в механике, как правило, не являются строго положительными; такие матрицы чаще встречаются в экономике и в исследовании операций. Однако матрицы, появляющиеся в механике, часто являются осцилляторными. (См. параграф 6.6.1. для точных определений.) Для того чтобы применить теорему Перрона к этим матрицам, необходимы следующие два шага. Во-первых, если  $\mathbf{A}$  является осцилляторной матрицей, то  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{n-1}$  является вполне положительной (totally positive) (ТР). Это понятие, оно вводится в параграфе 6.6.1, означает, что не только все элементы  $\mathbf{B}$  являются положительными, но и все *миноры* (параграф 6.2) матрицы  $\mathbf{B}$  являются положительными. Заметим, что собственные значения матрицы  $\mathbf{B}$  являются  $(n-1)$ -ми степенями,  $\lambda_i^{n-1}$ , собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ , в то время как собственные векторы  $\mathbf{B}$  являются собственными векторами  $\mathbf{A}$ . Во-вторых, нам понадобится ввести понятие *присоединенной матрицы* (compound matrix) (параграф 6.2). Присоединенная матрица  $\mathbf{A}_p$  состоит из  $N = \binom{n}{p}$  миноров порядка  $p$  данной матрицы  $\mathbf{A}$ . Фундаментальная теорема Коши–Бине, теорема 6.2.3, устанавливает (пример 6.3.1), что собственные значения  $\mathbf{A}_p$  являются произведениями  $p$  собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ . Тогда, предполагая, что  $\mathbf{A}$  — осцилляторная матрица, заключаем, что  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{n-1}$  обладает свойством ТР, следовательно, для  $p = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{B}_p$  является положительной, но не обладает свойством ТР. Первое следствие (теорема 6.10.1) состоит в том, что собственные

значения  $\mathbf{A}$  являются положительными и различными, так же как и собственные значения  $\mathbf{J}$  или  $\tilde{\mathbf{J}}$ .

Прежде чем переходить к исследованию, отметим ряд соглашений по обозначениям. В главе 3 мы имеем дело с матрицей Якоби  $\mathbf{J}$  — положительно полуопределенной трехдиагональной матрицей с *неотрицательной* кодиagonalю, собственные числа перечисляются в порядке *возрастания*, т.е.  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ . Число перемен знака в координатах собственных векторов растет, как утверждается в теореме 3.3.1. В упражнении 3.3.2 мы обращали внимание на то обстоятельство, что если собственные значения матрицы  $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{ZJZ}$ , которая является положительной полуопределенной трехдиагональной матрицей с *положительной* кодиagonalю (осцилляторной матрицей, если она на самом деле является невырожденной, т.е. положительно определенной), перечисляются в порядке *убывания*, т.е.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$ , то собственные векторы продолжают удовлетворять теореме 3.3.1. В этой главе, работая с осцилляторными матрицами, мы будем придерживаться того же порядка, т.е.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ . Теорема 6.10.2 является обобщением теоремы 3.3.1.

## 6.2. Миноры

Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$ . Чтобы получить некоторое понимание о структуре матрицы  $\mathbf{A}$  и относительных размерах ее элементов, мы вводим понятие *минора*. Минором порядка  $p$  матрицы  $\mathbf{A}$  называется определитель, составленный из элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , находящихся в  $p$  различных строках и в  $p$  различных столбцах. Следовательно, элементы  $\mathbf{A}$  являются минорами первого порядка, тогда как  $\det(\mathbf{A})$  является единственным минором порядка  $n$ ;  $a_{13}$ ,  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$  и  $\det(\mathbf{A})$ , все являются минорами  $\mathbf{A}$ .

Следуя Андо (Ando) (1987) [4], будем обозначать через  $Q_{p,n}$ ,  $1 \leq p \leq n$ , множество строго возрастающих последовательностей  $\alpha$  из  $p$  целых чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , взятых из  $\omega = \{1, 2, \dots, n\}$ . Дополнением  $\alpha'$  последовательности  $\alpha$  называется возрастающая последовательность  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \alpha = \omega \setminus \alpha$ , такая, что  $\alpha' \in Q_{n-p,n}$ . Когда  $\alpha \in Q_{p,n}$ ,  $\beta \in Q_{q,n}$  и  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , их объединение,  $\alpha \cup \beta$ , должно быть переупорядочено по возрастанию, для того чтобы стать элементом  $Q_{r,n}$  ( $r = p + q$ ). Мы будем часто использовать специальные последовательности:  $\theta = \theta(p) = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $\phi = \phi(p) = \{n - p + 1, \dots, n\}$  и их дополнения  $\theta' =$

$= \theta'(p) = \{p+1, \dots, n\}$ ,  $\phi' = \phi'(p) = \{1, 2, \dots, n-p\}$ . В случае когда отсутствует аргумент у  $\theta$  или  $\phi$ , будет предполагаться, что он равен  $p$ .

Подматрица, образованная строками  $\alpha$  и столбцами  $\beta$  матрицы  $\mathbf{A}$ , будет обозначаться  $\mathbf{A}[\alpha|\beta]$ ; вместо  $\mathbf{A}[\alpha|\alpha]$  мы пишем  $\mathbf{A}[\alpha]$ . Минор матрицы  $\mathbf{A}$ , состоящий из строк, отвечающих  $\alpha$ , и столбцов, отвечающих  $\beta$ , будет обозначаться  $A(\alpha; \beta)$ ; следовательно,

$$A(\alpha; \beta) = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1, \beta_1} & a_{\alpha_1, \beta_2} & \dots & a_{\alpha_1, \beta_p} \\ a_{\alpha_2, \beta_1} & a_{\alpha_2, \beta_2} & \dots & a_{\alpha_2, \beta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_p, \beta_1} & a_{\alpha_p, \beta_2} & \dots & a_{\alpha_p, \beta_p} \end{vmatrix}. \quad (6.2.1)$$

Минор  $A(\alpha; \alpha)$  будет сокращенно записываться как  $A(\alpha)$  и называться *ведущим*.

Алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ , введенное в параграфе 1.3, является минором со знаком, добавляемым к нему по следующему правилу:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \hat{a}_{ij}, \quad (6.2.2)$$

где

$$\hat{a}_{ij} = A(i'; j') \quad (6.2.3)$$

и  $i' = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\} = \omega \setminus i$ ,  $j' = \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\} = \omega \setminus j$ ;  $\hat{a}_{ij}$  иногда называется *минором*, дополнительным к элементу  $a_{ij}$ .

Если  $\mathbf{A} \in M_n$ , то мы можем определить новую матрицу  $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$ , состоящую из миноров, дополнительных к элементам  $\mathbf{A}$ .

**Теорема 6.2.1.** Пусть  $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$ , тогда миноры  $\hat{\mathbf{A}}$  вычисляются следующим образом:

$$\hat{A}(\alpha; \beta) = (\det(\mathbf{A}))^{p-1} A(\alpha'; \beta').$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $\alpha = \beta = \theta$ ; общий случай может быть получен подходящей перестановкой строк и столбцов. Так как  $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ , то

$$B = \hat{A}(\alpha; \beta) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Умножая это равенство на  $\det(\mathbf{A})$  и записывая определитель в формуле (6.2.4) как определитель  $n \times n$ -матрицы, получаем

$$B \cdot \det(\mathbf{A}) = \det \left( \begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} & A_{1,p+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} & A_{2,p+1} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} & A_{p,p+1} & \dots & A_{pn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

далее, используя уравнение (1.3.10), получаем:

$$B \cdot \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \det(\mathbf{A}) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(\mathbf{A}) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \det(\mathbf{A}) & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,p+1} & a_{2,p+1} & \dots & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{n,p+1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{p+1,n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\det(\mathbf{A}))^p A(\alpha'; \beta'),$$

значит теорема справедлива в случае  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . По соображениям непрерывности теорема остается справедливой также и в случае  $\det(\mathbf{A}) = 0$ . ■

Одно из следствий указанной теоремы состоит в том, что если  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , то ранг  $\widehat{\mathbf{A}}$  не превышает 1, что означает, что все строки  $\widehat{\mathbf{A}}$  являются кратными друг другу, аналогичное утверждение верно и для столбцов. Имеется также и другое следствие:

### Следствие 6.2.1.

$$\det(\widehat{\mathbf{A}}) = (\det(\mathbf{A}))^{n-1}.$$

Существует и другой способ построить матрицу из миноров заданной матрицы. Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$  и  $1 \leq p < n$ , и возьмем  $\alpha = \theta(p) := \{1, 2, \dots, p\}$ . Мы можем определить  $b_{ij}$  следующим образом:

$$b_{ij} = A(\theta \cup i, \theta \cup j), \quad i, j = p+1, p+2, \dots, n;$$

матрица  $\mathbf{B} \in M_{n-p}$ . Следовательно, если  $p = 2$  и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{то } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{B}$  называется **окаймляющей** (a bordered matrix); индексы  $i, j$  окаймляют  $\theta$ .

*Теорема Сильвестра* об окаймляющих определителях формулируется следующим образом:

**Теорема 6.2.2.** *Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$ ,  $1 \leq p < n$ ,  $b_{ij} = A(\theta \cup i, \theta \cup j)$  для  $i, j = p+1, p+2, \dots, n$ , и  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ , тогда*

$$\det(\mathbf{B}) = B(\theta'; \theta') = (A(\theta; \theta))^{n-p-1} \det(\mathbf{A}).$$

**Доказательство.** Теорема 6.2.1, где вместо  $p$  стоит  $n-p-1$  и  $\alpha = \{p+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n\} = \theta' \setminus r$ ,  $\beta = \{p+1, \dots, s-1, s+1, \dots, n\} = \theta' \setminus s$ , показывает, что

$$\begin{aligned} c_{rs} &= \widehat{A}(\alpha; \beta) = (\det(\mathbf{A}))^{n-p-2} A(\theta \cup r; \theta \cup s) \\ &= (\det(\mathbf{A}))^{n-p-2} b_{rs}. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Следствие теоремы 6.2.1 показывает, что если  $\mathbf{C} = (c_{rs})_{p+1}^n$ , то

$$\det(\mathbf{C}) = (\widehat{A}(\theta'; \theta'))^{n-p-1}. \quad (6.2.6)$$

Однако согласно (6.2.5)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= B(\theta'; \theta') (\det(\mathbf{A}))^{(n-p-2)(n-p)} \\ &= \det(\mathbf{B}) (\det(\mathbf{A}))^{(n-p-2)(n-p)}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

и из теоремы 6.2.1 получаем

$$\widehat{A}(\theta'; \theta') = (\det(\mathbf{A}))^{n-p-1} A(\theta; \theta). \quad (6.2.8)$$



Далее, подставляя (6.2.8) в (6.2.6), получаем

$$\det(\mathbf{C}) = (\det(\mathbf{A}))^{(n-p-1)^2} (A(\theta; \theta))^{n-p-1},$$

что, в сравнении с (6.2.7), дает требуемый результат в случае  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Соображения непрерывности позволяют заключить, что результат остается справедливым, если  $\det(\mathbf{A}) = 0$ . ■

**Следствие 6.2.2.** Если  $\alpha, \beta \in Q_{s,n}$ ,  $\theta \cap \alpha = 0$ ,  $\theta \cap \beta = 0$ , то

$$B(\alpha; \beta) = (A(\theta; \theta))^{s-1} A(\theta \cup \alpha; \theta \cup \beta).$$

**Следствие 6.2.3.** Предположим, что  $\alpha, \beta \in Q_{p,n}$  и

$$b_{ij} = A(\alpha \cup i; \beta \cup j)$$

для  $i = \alpha_p + 1, \dots, n$ ;  $j = \beta_p + 1, \dots, n$  и  $\gamma, \delta \in Q_{q,n}$  с  $\gamma_1 > \alpha_p$ ,  $\delta_1 > \beta_p$ , тогда

$$B(\gamma; \delta) = (A(\alpha; \beta))^{q-1} A(\alpha \cup \gamma; \beta \cup \delta).$$

Последнее является общей формулировкой теоремы Сильвестра. Доказательство этого утверждения может быть найдено в книге Гантмахера [97] (1959), т. I, стр. 32.

Перейдем к важной теореме Коши–Бине.

**Теорема 6.2.3.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_{m,k}$ ,  $\mathbf{B} \in M_{k,n}$  и  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ,  $\alpha \in Q_{p,m}$ ,  $\beta \in Q_{p,n}$  тогда

$$C(\alpha; \beta) = \sum A(\alpha; \gamma) B(\gamma; \beta), \quad (6.2.9)$$

где сумма берется по всем  $\gamma \in Q_{p,k}$ .

Эта теорема является обобщением формулы для  $c_{ij}$ , а именно:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pj}.$$

Доказательство ее содержится в книге Гантмахера [97] (1959), т. I, стр. 9.

Важность теоремы Коши–Бине заключается в ее приложениях к *присоединенным матрицам*, которые мы собираемся сейчас определить.

Предположим вначале, что матрица  $\mathbf{A}$  является квадратной, т. е.  $\mathbf{A} \in M_n$ . Определим присоединенную матрицу  $\mathbf{A}_p$ . Рассмотрим все последовательности  $\alpha \in Q_{p,n}$ , таких последовательностей всего

$$N = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Для заданных  $n, p$  все  $N$  последовательностей могут быть упорядочены по возрастанию  $1, 2, \dots, N$ . Это может быть осуществлено сопоставлением каждой последовательности  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  числа, образованного цифрами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  в системе счисления с базой  $d = N + 1$ . Эта процедура сопоставляет конкретный индекс  $s = s(\alpha)$  каждой последовательности  $\alpha$ ;  $s$  лежит в интервале  $1 \leq s \leq N$ . Следовательно, когда  $n = 5, p = 3$ , мы получаем  $N = 10$ , и возможные комбинации имеют следующий вид: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. Значит,  $s(124) = 2$ , тогда как  $s(245) = 9$ . Элемент  $a_{st}$  матрицы  $\mathbf{A}_p$  равен

$$a_{st} = A(\alpha; \beta),$$

где  $s = s(\alpha), t = s(\beta)$ .

Присоединенная матрица может быть также определена в прямоугольном случае, однако мы не будем использовать это обобщение в нашей книге для матрицы  $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ .

$$\mathbf{A}_p \in M_{M,N}, \quad M = \binom{m}{p}, \quad N = \binom{n}{p}$$

и  $a_{st}$  дается равенством (6.2.9) для  $\alpha \in Q_{p,m}, \beta \in Q_{p,n}$ . В этом случае теорема Коши–Бине утверждает следующее:

**Теорема 6.2.4.** Если  $\mathbf{A} \in M_{m,k}, \mathbf{B} \in M_{k,n}, \mathbf{C} = \mathbf{AB}$  и  $p \leq \min(m, k, n)$ , то

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{B}_p.$$

**Доказательство.** Перепишем уравнение (6.2.9) в виде:

$$c_{rs} = \sum_{t=1}^k a_{rt} b_{ts},$$

где  $r = s(\alpha), s = s(\beta), t = s(\gamma)$ . ■

**Следствие 6.2.4.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_n$  является невырожденной, тогда присоединенная матрица  $p$ -го порядка для  $\mathbf{A}^{-1}$  является обратной к присоединенной матрице  $p$ -го порядка для  $\mathbf{A}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , тогда  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ , откуда  $\mathcal{A}_p \mathcal{B}_p = \mathcal{I}_p$ ,  $\mathcal{B}_p = (\mathcal{A}_p)^{-1}$ . ■

## Упражнения 6.2

- 1) Если матрица  $\mathbf{A} \in M_n$  является невырожденной, то уравнение (1.3.20) позволяет заключить, что ее обратная матрица  $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$  имеет элементы

$$r_{ij} = A_{ji} / \det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j} \hat{a}_{ji} / \det(\mathbf{A}).$$

Используйте теорему 6.2.1 для того, чтобы установить, что условие  $\alpha, \beta \in Q_{p,n}$  влечет равенство

$$\det(\mathbf{A})R(\alpha; \beta) = (-1)^t A(\alpha'; \beta'),$$

где

$$t = \sum_{m=1}^p (\alpha_m + \beta_m).$$

- 2) Если  $\theta = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $\phi = \{n - p + 1, \dots, n\}$ , то  $A(\theta; \phi)$  и  $A(\phi; \theta)$  называются *угловыми* минорами  $p$ -го порядка для  $\mathbf{A}$ . Используйте упражнение 6.2.1 для того, чтобы установить, что угловые миноры  $\mathbf{R}$  удовлетворяют равенству

$$\det(\mathbf{A}) \cdot R(\theta, \phi) = (-1)^t A(\theta'; \phi'),$$

где  $t = r(p + 1)$ . Заметим, что  $A(\theta'; \phi')$  является угловым минором  $(n - p)$ -го порядка для матрицы  $\mathbf{A}$ .

- 3) Уравнения (1.3.7), (1.3.8) являются частными случаями *разложения Лапласа* для определителя,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum (-1)^t A(\alpha; \beta) A(\alpha'; \beta'),$$

где  $\alpha \in Q_{p,n}$  фиксировано, и сумма берется по всем  $\beta \in Q_{p,n}$  и  $t = \sum_{m=1}^p (\alpha_m + \beta_m)$ . Докажите этот результат и покажите, что существует аналогичное разложение с фиксированными  $\beta$  и  $\alpha$ , пробегающими все  $Q_{p,n}$ .

- 4) Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$ . Воспользуйтесь формулой Коши–Бине для доказательства того, что присоединенная матрица  $p$ -го порядка матрицы  $\mathbf{A}^m$  равняется  $(\mathcal{A}_p)^m$ , т. е.

$$(\mathbf{A}^m)_p = (\mathcal{A}_p)^m = \mathcal{A}_p^m.$$

- 5) Используя теорему Коши–Бине, докажите, что если  $\mathbf{Q}$  является ортогональной матрицей, то матрица  $\mathcal{Q}_p$ , являющаяся присоединенной матрицей  $p$ -го порядка для  $\mathbf{Q}$ , также является ортогональной.
- 6) Пусть  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$ . Покажите, что миноры  $\mathbf{B}$  выражаются при помощи миноров  $\mathbf{A}$ ; используйте обозначение (6.2.9), чтобы установить, что

$$B(\alpha; \beta) = \sum A(\alpha; \gamma)A(\gamma; \gamma') \dots A(\gamma^{(m-1)}; \beta),$$

здесь суммирование берется по всем  $\gamma; \gamma' \dots \gamma^{(m-1)} \in Q_{p,n}$ .

### 6.3. Общее представление симметричной матрицы

Начнем со следующих двух теорем.

**Теорема 6.3.1.** Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$ , тогда  $\mathbf{A}$  имеет  $n$  вещественных собственных векторов, образующих ортонормальную систему.

**Теорема 6.3.2.** Каждому собственному значению  $\lambda_0$  кратности  $m$  матрицы  $\mathbf{A} \in S_n$  соответствует  $m$  линейно независимых собственных векторов.

В параграфе 1.4 мы установили, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными. Последнее означает, что если все собственные значения  $\mathbf{A}$  являются различными, то такая матрица обладает  $n$  ортогональными собственными векторами, которые можно домножить на скаляры так, чтобы система стала ортонормированной. Достаточно доказать теорему 6.3.2.

**Доказательство.** Предположим, что  $\lambda_0$  является  $m$ -кратным собственным значением  $\mathbf{A}$ , т. е.  $\lambda_0$  является  $m$ -кратным корнем  $\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I}$  имеет ранг  $p$ , значит уравнение

$$\mathbf{B}\mathbf{u} \equiv (\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \quad (6.3.1)$$

имеет  $r = n - p$  линейно независимых решений. Достаточно доказать, что  $r = m$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - (\lambda - \lambda_0)\mathbf{I}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i T_j (\lambda - \lambda_0)^i, \quad j = n - i,\end{aligned}$$

где  $T_j$  является суммой главных миноров  $j$ -го порядка матрицы  $\mathbf{B}$  и  $T_0 = 1$ . Матрица  $\mathbf{B}$  имеет ранг  $p$ , значит  $T_n = 0 = T_{n-1} = \dots = T_{p+1}$ , следовательно,

$$\Delta(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_0)^r \{T_p - (\lambda - \lambda_0)T_{p-1} + \dots \pm (\lambda - \lambda_0)^p T_0\},$$

откуда  $m \geq r$ . Достаточно доказать, что  $T_p \neq 0$ , иначе  $\Delta(\lambda)$  имеет  $r$ -кратный корень, т. е.  $m = r$ . Без ограничения общности можно предполагать, что *первые*  $p$  строк  $\mathbf{B}$  являются линейно независимыми, а значит, любая строка  $\mathbf{B}$  может быть записана как линейная комбинация первых  $p$  строк, т. е.

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^p c_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

последнее можно записать как

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B}_0, \quad (6.3.2)$$

где  $\mathbf{C} \in M_{n,p}$  и  $\mathbf{B}_0 \in M_{p,n}$  образована первыми  $p$  строками матрицы  $\mathbf{B}$ . Применим теорему Коши–Бине 6.2.3 к (6.3.2):

$$\mathbf{B}(\alpha; \beta) = \sum \mathbf{C}(\alpha; \gamma) \mathbf{B}_0(\gamma; \beta). \quad (6.3.3)$$

Однако  $\mathbf{C}$  имеет только  $p$  столбцов, и аналогично  $\mathbf{B}_0$  имеет только  $p$  строк, которые являются  $1, 2, \dots, p$  строками матрицы  $\mathbf{B}$ . Следовательно, в разложении (6.3.3) имеется только одно слагаемое:

$$\mathbf{B}(\alpha; \beta) = \mathbf{C}(\alpha; \theta) \mathbf{B}(\theta; \beta), \quad (6.3.4)$$

где  $\theta = \{1, 2, \dots, p\}$ . Аналогично

$$\mathbf{B}(\beta; \theta) = \mathbf{C}(\beta; \theta) \mathbf{B}(\theta; \theta). \quad (6.3.5)$$

Однако матрица  $\mathbf{B}$  является симметричной, а значит,  $\mathbf{B}(\beta; \theta) = \mathbf{B}(\theta; \beta)$ , следовательно, объединяя (6.3.4), (6.3.5), получаем

$$\mathbf{B}(\alpha; \beta) = \mathbf{C}(\alpha; \theta) \mathbf{C}(\beta; \theta) \mathbf{B}(\theta; \theta). \quad (6.3.6)$$

Все миноры в левой части не могут обнулиться, так как в этом случае ранг матрицы  $\mathbf{B}$  был бы *меньше*  $p$ ; откуда  $\mathbf{B}(\theta; \theta) \neq 0$ . Тогда из уравнения (6.3.6) и условия  $\beta = \alpha$  следует

$$\mathbf{B}(\alpha; \alpha) = (\mathbf{C}(\alpha; \theta))^2 \mathbf{B}(\theta; \theta).$$

Последнее означает, что все главные миноры  $p$ -го порядка матрицы  $\mathbf{B}$  имеют одинаковый знак и по крайней мере одно значение  $\mathbf{B}(\theta; \theta)$  является ненулевым. Следовательно, их сумма  $T_p$  является ненулевой. Откуда  $m = r$ . ■

Теперь можно утверждать, что если  $\mathbf{A} \in S_n$ , то эта матрица *имеет*  $n$  собственных значений  $(\lambda_i)_1^n$  и  $n$  ортонормированных собственных векторов  $(\mathbf{u}_i)_1^n$ . Откуда

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а значит,

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}. \quad (6.3.7)$$

Последнее может быть преобразовано в

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T. \quad (6.3.8)$$

Данное равенство является наиболее важным представлением симметрической матрицы.

### Упражнения 6.3

- 1) Примените теорему Коши–Бине (теорема 6.2.4) к уравнению (6.3.7) для доказательства того, что собственные значения  $\mathbf{A}_p$  являются произведениями  $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_p}$ .
- 2) Показать, что собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}_p$  являются столбцами присоединенной матрицы  $\mathbf{U}_p$ .

## 6.4. Квадратичные формы

Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$ , тогда

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n,n-1}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \quad (6.4.1)$$

называется *квадратичной формой*, ассоциированной с  $\mathbf{A}$ . Одна из задач этого параграфа состоит в нахождении необходимых и достаточных условий того, что  $\mathbf{A}$  является положительно определенной (PD), т. е.  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Начнем с рассмотрения различных способов представления  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Пусть

$$A_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.4.2)$$

тогда

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j A_j(\mathbf{x}). \quad (6.4.3)$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & A_1(\mathbf{x}) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & A_2(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & A_n(\mathbf{x}) \\ A_1(\mathbf{x}) & A_2(\mathbf{x}) & \dots & A_n(\mathbf{x}) & A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{vmatrix} = 0, \quad (6.4.4)$$

так как последний столбец является линейной комбинацией первых  $n$  столбцов.

**Теорема 6.4.1.** Если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , то

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{-1}{\det(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & A_1(\mathbf{x}) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & A_2(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & A_n(\mathbf{x}) \\ A_1(\mathbf{x}) & A_2(\mathbf{x}) & \dots & A_n(\mathbf{x}) & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.4.5)$$

**Доказательство.** Разложим нулевой определитель (6.4.4) по последней строке. ■

Введем в рассмотрение величины

$$X_1(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} a_{11} & A_1(\mathbf{x}) \\ a_{21} & A_2(\mathbf{x}) \end{vmatrix}, X_3(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_1(\mathbf{x}) \\ a_{21} & a_{22} & A_2(\mathbf{x}) \\ a_{31} & a_{32} & A_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \quad (6.4.6)$$

и так далее, вплоть до  $X_n(\mathbf{x})$ , и докажем следующую теорему.

**Теорема 6.4.2.** Пусть  $\theta = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $D_p = A(\theta; \theta) \neq 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , тогда векторы  $(X_p(\mathbf{x}))_1^n$  являются линейно независимыми.

**Доказательство.** Действительно,  $X_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j$ , тогда как  $X_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=2}^n (a_{11} a_{2j} - a_{21} a_{1j}) x_j$ , и в общем случае

$$X_p(\mathbf{x}) = D_p x_p + \text{слагаемые, зависящие от } x_{p+1}, \dots, x_n.$$

Откуда видно, что в обратной последовательности  $X_n(\mathbf{x}), X_{n-1}(\mathbf{x}), \dots, X_1(\mathbf{x})$ , каждый член содержит на одно  $x_j$  больше, чем предыдущий. Последнее означает, что  $(X_i(\mathbf{x}))_1^n$  одновременно обнуляются тогда и только тогда, когда  $(x_i)_1^n$  равны нулю. ■

Этот факт позволяет получить следующее важное разложение для  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ :

**Теорема Якоби.** Пусть  $D_0 = 1$ ,  $\theta = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $D_p = A(\theta; \theta) \neq 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , тогда

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{p=1}^n \frac{(X_p(\mathbf{x}))^2}{D_p D_{p-1}}. \quad (6.4.7)$$

Заметим, что, ввиду теоремы 6.4.2, это уравнение дает представление  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  в виде линейной комбинации скалярных квадратов линейно независимых комбинаций  $(x_i)_1^n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $P_0 = 0$ , и

$$P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & A_1(\mathbf{x}) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & A_2(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & A_p(\mathbf{x}) \\ A_1(\mathbf{x}) & A_2(\mathbf{x}) & \dots & A_p(\mathbf{x}) & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.4.8)$$

Найдем рекуррентное соотношение, связывающее  $P_p$  и  $P_{p-1}$ .  $P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  является определителем симметрической матрицы  $\mathbf{C} \in S_{p+1}$ , т. е.

$$P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = C(\theta(p+1); \theta(p+1)).$$

Применим теорему 6.2.2 к этому равенству, полагая

$$b_{ij} = C(\theta(p-1) \cup i; \theta(p-1) \cup j), \quad i, j = p, p+1,$$



тогда

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= b_{pp}b_{p+1,p+1} - b_{p,p+1}b_{p+1,p} \\ &= C(\theta(p-1); \theta(p-1)) \cdot C(\theta(p+1); \theta(p+1)). \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Однако  $b_{pp} = D_p$ ,  $b_{p+1,p+1} = P_{p-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ,  $b_{p,p-1} = b_{p-1,p} = X_p(\mathbf{x})$ , тогда как  $C(\theta(p-1); \theta(p-1)) = D_{p-1}$ ,  $C(\theta(p+1); \theta(p+1)) = P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Следовательно, из уравнения (6.4.9) получаем

$$D_p P_{p-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - X_p^2(\mathbf{x}) = D_{p-1} P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

или, так как все  $D_p$  являются ненулевыми,

$$\frac{-P_p(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{D_p} = \frac{-P_{p-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{D_{p-1}} + \frac{X_p^2(\mathbf{x})}{D_p D_{p-1}}, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4.10)$$

Теорема (6.4.1) утверждает, что

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{-P_n(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{D_n}.$$

Суммируя (6.4.10) от 1 до  $n$  и используя условие  $P_0 = 0$ , получаем требуемую сумму (6.4.7). ■

**Теорема 6.4.3.** Пусть матрица  $\mathbf{A} \in S_n$ , тогда  $\mathbf{A}$  обладает свойством PD в том и только том случае, если  $D_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство.** Для начала докажем, что если  $\mathbf{A}$  обладает свойством PD, то  $\det(\mathbf{A}) > 0$ . Так как  $\mathbf{A} \in S_n$ , по следствию из теоремы 6.3.2, она имеет  $n$  собственных значений  $(\lambda_i)_1^n$  и  $n$  ортонормальных собственных векторов  $(\mathbf{u}_i)_1^n$  таких, что  $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ . Следовательно,  $\lambda_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{A}\mathbf{u}_i = A(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) > 0$ , откуда  $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$ , т. е.  $D_n > 0$ .

Пусть  $\mathbf{A}$  положительно определена, тогда матрица, полученная из  $\mathbf{A}$  удалением последних  $j$  строк и столбцов, является PD для всех  $j = 1, 1, \dots, n-1$ . Следовательно, определители всех этих матриц положительны, т. е.  $(D_{n-j})_1^{n-1} > 0$ . Нами доказано, что если  $\mathbf{A}$  является PD, то  $(D_i)_1^n > 0$ .

Предположим, что  $(D_i)_1^n > 0$ , тогда уравнение (6.4.7) показывает, что  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ , так как  $(X_i(\mathbf{x}))_1^n$  одновременно обращаются в ноль, только если  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Следовательно,  $\mathbf{A}$  является PD. ■

**Следствие 6.4.1.** Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  является PD, тогда все ведущие миноры  $A(\alpha; \alpha) = A(\alpha)$ ,  $\alpha \in Q_{p,n}$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , — положительны.

Пусть матрица  $\mathbf{A} \in S_n$  является только положительно полуопределенной (PSD), тогда главные миноры, а на самом деле все ведущие миноры, являются неотрицательными.

**Теорема 6.4.4.** Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  является PSD и для некоторого  $p$ ,  $1 \leq p < n$ ,  $D_p = A(\theta; \theta) = 0$ . Тогда любой ведущий минор, окаймляющий  $D_p$ , является нулевым. В частности, главные миноры  $D_q$ ,  $p \leq q \leq n$ , нулевые.

Докажем, что все  $D_q$  равны нулю, а оставшуюся часть доказательства предоставим в качестве упражнения.

**Доказательство.** Возможны два случая:

i)  $p = 1$ , тогда  $D_1 = a_{11} = 0$ , и условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} = -a_{1j}^2 \geq 0$$

позволяет заключить, что  $(a_{1j})_1^n = 0$ , значит  $(D_q)_1^n = 0$ ; в этом случае  $\mathbf{x}_1$  не участвует в  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  вообще.

ii)  $a_{11} \neq 0$  и для некоторого  $p$ ,  $1 \leq p \leq n-1$ ,  $D_p \neq 0$ ,  $D_{p+1} = 0$ . (Если  $p = n-1$ , то доказывать нечего; следовательно, будем рассматривать случай  $p < n-1$ .)

Рассмотрим окаймляющие определители

$$b_{ij} = A(\theta \cup i; \theta \cup j), \quad i, j = p+1, \dots, n$$

и построим  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p+1}^n$ . В силу тождества Сильвестра (следствие из теоремы 6.2.2), если  $\alpha_1 > p$  и  $\alpha \in Q_{r,n}$ ,  $r \leq n-p$ , то

$$B(\alpha; \alpha) = (A(\theta; \theta))^{r-1} A(\theta \cup \alpha; \theta \cup \alpha).$$

Тогда  $\mathbf{B}$  является PSD. Так как  $b_{p+1,p+1} = D_{p+1} = 0$ , матрица подходит под условия случая 1, и если  $q > p+1$ ,  $r = q-p-1$ ,  $\alpha = \{p+1, \dots, q\}$ , то

$$0 = B(\alpha; \alpha) = \{A(\theta(p); \theta(p))\}^r A(\theta(q); \theta(q)),$$

значит  $A(\theta(p); \theta(p)) = D_p \neq 0$ , откуда следует, что  $A(\theta(q); \theta(q)) = D_q = 0$ . ■

Из этой теоремы следует, что если  $\mathbf{A} \in S_n$  является PSD, то для некоторых  $p$ ,  $1 \leq p < n$ ,  $(D_i)_1^p > 0$ ,  $(D_i)_{p+1}^n = 0$ .

### Упражнения 6.4

- 1) Проверьте, что  $\mathbf{A} \in S_n$  является PD тогда и только тогда, когда ее собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  положительны; она является PSD тогда и только тогда, когда ее собственные значения неотрицательны.
- 2) Проверьте, что если  $\mathbf{A} \in S_n$  является PSD, то  $\mathbf{A}$  вырождена, и  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- 3) Проверьте, что  $\mathbf{A} \in S_n$  является PSD, и если  $a_{ii} = 0$  для некоторого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , то  $a_{ij} = 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ . Это означает, что если  $a_{ii} = 0$ , то  $x_i$  не присутствует в  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ .
- 4) Проверьте, что если  $\mathbf{A} \in S_n$  является PSD и имеет ранг  $r$ , то она имеет положительный ведущий минор порядка  $r$ .

Эти и остальные свойства PD- и PSD-матриц могут быть найдены в главе 7 книги Хорна и Джонсона (1985) [183].

### 6.5. Теорема Перрона

Большинство матриц, которые актуальны в различных задачах теории колебаний, является симметричными. Следовательно, их собственные значения являются вещественными и их собственные векторы являются ортонормированными. Зачастую эти матрицы являются PD, а значит их собственные значения являются не только вещественными, но и положительными. Однако вся теория, относящаяся к осцилляторным матрицам, зависит от основного результата о матрицах, не обязательно являющихся симметрическими, к изложению которого мы сейчас перейдем.

Напомним ряд определений. Если у вектора  $\mathbf{x}$  все координаты положительны (неотрицательны), то мы будем писать  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  ( $\geq \mathbf{0}$ ) и говорить, что  $\mathbf{x}$  является *положительным* (*неотрицательным*). Если  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  принадлежат  $V_n$ , то  $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  эквивалентно  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ . Матрица  $\mathbf{A} \in M_n$  называется *положительной* (*неотрицательной*), если  $a_{ij} > 0$  ( $\geq 0$ ) для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

До сих пор мы рассматривали только *евклидову* норму векторов  $\mathbf{x} \in V_n$ , т. е. так называемую  $L_2$ -норму:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.5.1)$$

Определим  $L_2$ -норму матриц  $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$ :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.5.2)$$

Эта норма иногда называется *фробениусовой* нормой, нормой *Шура* или нормой *Гильберта–Шмидта*.

Нам также понадобится другая норма, а именно  $L_1$ :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (6.5.3)$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|. \quad (6.5.4)$$

Норма является аналогом расстояния, таким образом, она должна удовлетворять многочисленным фундаментальным законам, см. упр. 6.5.1. Полное и всестороннее исследование векторных и матричных норм можно найти в книге Хорна и Джонсона (Horn, Johnson) [183] (1985), параграф 5.6.

Перейдем к доказательству теоремы Перрона, следуя Беллману (Bellman) (1970) [25].

**Теорема 6.5.1 (Перрон).** *Пусть  $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$  и  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ . Тогда  $\mathbf{A}$  имеет единственное собственное значение  $\rho$  наибольшего модуля. Это собственное значение является простым и однократным, соответствующий собственный вектор можно выбрать положительным. Собственное значение  $\rho$  часто называют перроновым корнем  $\mathbf{A}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $S(\lambda)$  является множеством всех неотрицательных  $\lambda$ , для которых существует неотрицательный вектор  $\mathbf{x}$  такой, что

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{x}. \quad (6.5.5)$$

Мы будем рассматривать  $L_1$ -отнормированные векторы  $\mathbf{x}$ , т. е. такие, что  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$ . (Так как  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,  $|x_i| = x_i$ .) Следовательно, нулевой вектор исключен из рассмотрения. Если  $\mathbf{x}$  удовлетворяет (6.5.5), то по умножению 6.5.2 получаем, что

$$\lambda\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_1, \quad (6.5.6)$$

откуда  $0 \leq \lambda \leq \|\mathbf{A}\|_1$ . Это показывает, что множество  $S(\lambda)$  ограничено. Это множество не является пустым, так как матрица  $\mathbf{A}$  положительна. Ограниченное множество  $S(\lambda)$  обладает точной верхней гранью, обозначим ее  $\lambda_0$ . Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  — последовательность в  $S(\lambda)$ , сходящаяся к  $\lambda_0$ , а  $\mathbf{x}_i$  — соответствующая последовательность векторов, удовлетворяющих  $\mathbf{A}\mathbf{x}_i \geq \lambda_i \mathbf{x}_i$ . Множество всех векторов  $\mathbf{x}$ , таких, что  $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ , замкнуто и ограничено; следовательно, последовательность  $\{\mathbf{x}_i\}$  содержит сходящуюся подпоследовательность  $\{\mathbf{x}_{\nu_i}\}$ , пределом которой является неотрицательный вектор  $\mathbf{x}_0$ , удовлетворяющий условиям  $\|\mathbf{x}_0\|_1 = 1$  и (см. упражнение 6.5.3)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq \lambda_0 \mathbf{x}_0. \quad (6.5.7)$$

Откуда  $\lambda_0 \in S(\lambda)$ . Покажем теперь, что в (6.5.7) справедливо равенство, для этого предположим противное.

Пусть

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \lambda_0 \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0},$$

предположим, что один из  $d_i$ , скажем  $d_j$ , является положительным. Рассмотрим

$$y_i = x_{i0} + (d_j/2\lambda_0)\delta_{ij},$$

тогда  $i$ -ая строка  $\mathbf{A}\mathbf{y} - \lambda_0 \mathbf{y}$  равняется

$$e_i = d_i + a_{ij}d_j/(2\lambda_0) - d_j\delta_{ij}/2 > 0.$$

Пусть  $\lambda = \lambda_0 + \min_i(e_i/y_i)$ , тогда  $\lambda > \lambda_0$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} &= \mathbf{e} - (\lambda - \lambda_0)\mathbf{y} \\ &= \mathbf{e} - \min_i(e_i/y_i)\mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $\lambda \in S(\lambda)$  и  $\lambda$  превышает точную верхнюю грань,  $\lambda_0$ , множества  $S(\lambda)$ . Полученное противоречие доказывает равенство в формуле (6.5.7), т. е.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \lambda_0 \mathbf{x}_0. \quad (6.5.8)$$

Следовательно,  $\lambda_0$  — собственное значение, а  $\mathbf{x}_0$  — соответствующий собственный вектор, причем  $\mathbf{x}_0$  является положительным (упр. 6.5.4). Покажем, что  $\lambda_0$  равно перроновому корню.

Предположим, что существует другое собственное значение  $\lambda$ , возможно, комплексное, такое что  $|\lambda| \geq \lambda_0$ , и  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  — соответствующий

собственный вектор, т. е.  $\mathbf{Az} = \lambda \mathbf{z}$ . Пусть  $|\mathbf{z}|$  обозначает вектор с координатами  $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ , тогда получим

$$|\lambda| |\mathbf{z}| = |\mathbf{Az}| \leq \mathbf{A}|\mathbf{z}|. \quad (6.5.9)$$

Однако в силу максимальности  $\lambda_0$  получаем  $|\lambda| \leq \lambda_0$  и, следовательно,  $|\lambda| = \lambda_0$ . Повторение предыдущих рассуждений позволяет установить, что в формуле (6.5.9) справедливо равенство, т. е.

$$\mathbf{A}|\mathbf{z}| = \lambda_0 |\mathbf{z}|, \quad |\mathbf{z}| > \mathbf{0}.$$

Тогда

$$|\mathbf{Az}| = \mathbf{A}|\mathbf{z}|, \quad (6.5.10)$$

а по упражнению 6.5.5 это может быть справедливо только в случае  $\mathbf{z} = c\mathbf{w}$ , где  $c$  — комплексное число и  $\mathbf{w}$  положительно; откуда  $\lambda$  — положительно, т. е.  $\lambda = \lambda_0$ . Покажем, что  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{w}$ , которые оба являются положительными собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}$ , отвечающими  $\lambda_0$ , пропорциональны. Рассмотрим  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 - \varepsilon \mathbf{w}$  и выберем

$$\varepsilon = \min_i (x_{i0}/w_i) = x_{j0}/w_j,$$

тогда  $\mathbf{y}$  является неотрицательным собственным вектором, соответствующим  $\lambda_0$ , удовлетворяющим условию  $y_j = 0$ . Таким образом,

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n = 0,$$

причем  $a_{j1} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Следовательно,  $\mathbf{x}_0 = \varepsilon \mathbf{w}$ , а значит  $\lambda_0$  является простым корнем. Следовательно,  $\lambda_0$  имеет все свойства перронова корня. ■

## Упражнения 6.5

1) Векторная норма удовлетворяет следующим трем условиям:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ , причем  $\|\mathbf{x}\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- $\|c\mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$ ;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

Установите, что нормы  $L_1$  и  $L_2$  удовлетворяют этим условиям.

2. Покажите, что для  $\mathbf{A} \in M_n$ ,  $\mathbf{x} \in V_n$ , справедливо

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_1.$$

3. Установите, что вектор  $\mathbf{x}_0$  удовлетворяет неравенству (6.5.7).
4. Покажите, что если  $\mathbf{x}$  является неотрицательным собственным вектором положительной матрицы  $\mathbf{A} \in M_n$ , то  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Откуда следует, что:

$$\text{если } \mathbf{A} > \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

и  $x_i = 0$  для некоторого  $i = 1, \dots, n$ , то  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

5. Установите, что если матрица  $\mathbf{A} \in M_n$  является положительно определенной, то уравнение (6.5.10) справедливо только в случае  $\mathbf{z} = c\mathbf{w}$ , где  $c$  — комплексное число и  $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ .

## 6.6. Вполне неотрицательные матрицы

Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$ . Матрица  $\mathbf{A}$  называется *положительной* (см. параграф 6.5), обозначается  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ , если  $a_{ij} > 0$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Свойство *вполне положительности* относится также ко всем минорам (см. параграф 6.2)  $\mathbf{A}$ , а не только к ее элементам. Если  $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ , то будем говорить, что  $\mathbf{A}$  является

- 1) *TN (вполне неотрицательной)*, если все миноры  $\mathbf{A}$  неотрицательны.

Если  $\mathbf{A} \in M_n$ , то будем говорить, что  $\mathbf{A}$  является

- 2) *NTN (невырожденной и вполне неотрицательной)*, если  $\mathbf{A}$  является невырожденной и TN;
- 3) *TP (вполне (totally) положительной)*, если все ее миноры строго положительны;
- 4) *O (осцилляторной)*, если  $\mathbf{A}$  является TN и некоторая ее степень  $\mathbf{A}^m$  является TP.

Некоторые математики, включая и автора данной книги, см. книгу Глэдвелла [108] (1986b), используют термин *вполне положительность* (TP) вместо термина *вполне неотрицательность* (TN) и *строгая вполне положительность* (STP) вместо термина *вполне положительность* (TP). Также в [108] (1986b), следуя книгам Гантмахера и Крейна [98] (1950), используется термин *полностью* (*completely*) вместо *вполне* (*totally*); таким образом, выражение «полностью положительный» может иметь самые разные значения. Читатель, обратите внимание на эти тонкие отличия!

Понятие осцилляторной матрицы (или матрицы осцилляций) было введено в работах Гантмахера и Крейна в 1930-х годах, см. книгу [98] (1950). Далее оно было развито Гантмахером [97] (1959). Понятие вполне положительной матрицы появилось намного ранее, см., например, работу Фекета (Fekete) [86] (1913); такие матрицы были впервые систематически исследованы Карлиным (Karlin) [190] (1968) в монографии «*Полная положительность*», том 1. (том 2 так и не появился!). Андо (Ando) [4] (1987) приводит обзор по этой теме и доказывает ряд важных новых результатов. Все эти понятия, полная положительность, осцилляторность, и др., возникли при изучении линейных систем, стержней, балок, сплайнов, дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля и т. д.

Изучение вполне положительности требует детальной работы с неравенствами. Мы приводим два типичных примера свойств, в которых читатель может непосредственно убедиться:

i) если  $a \geq 0$  или  $d \geq 0$ ;  $b \geq 0$  и  $c \geq 0$ , а также

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0,$$

то  $a > 0$  и  $d > 0$ ;

ii) если  $a \geq 0$  или  $d \geq 0$ ;  $b > 0$  и  $c > 0$  и

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \geq 0,$$

то  $a > 0$  и  $d > 0$ .

Понятие полной положительности близко к понятию положительной определенности, однако существуют принципиальные отличия между ними: положительная определенность применяется только к симметрическим матрицам, TP применяется к любым матрицам из  $M_n$ ; понятие



положительной определенности включает только главные миноры, в то время как ТР дает условия на все миноры матрицы. Очевидно, что если  $\mathbf{A} \in S_n$  является TN то она PSD; а из ТР следует PD; однако обратные импликации не являются справедливыми (упр. 6.6.1). Следующая теорема является аналогом теоремы 6.4.5 для TN матриц:

**Теорема 6.6.1.** Пусть матрица  $\mathbf{A} \in M_n$ ,  $\mathbf{A}$  является TN, и у  $\mathbf{A}$  есть нулевой ведущий минор. Тогда любой окаймляющий его минор также равен нулю.

**Доказательство.** Для простоты мы сфокусируем наше внимание только на главных минорах; это ограничение может быть снято некоторым усложнением доказательства. Как и в теореме 6.4.5, рассмотрим 2 случая:

1)  $D_1 = a_{11} = 0$ . Мы утверждаем, что отсюда следует, что или  $(a_{i1})_1^n = 0$ , или  $(a_{1j})_1^n = 0$ . Если это не так, то можно найти  $a_{i1} > 0$  и  $a_{1j} > 0$  для некоторых  $i, j$ , удовлетворяющих условию  $2 \leq i \leq n$ ,  $2 \leq j \leq n$ . Однако тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = -a_{i1}a_{1j} < 0,$$

что противоречит условию вполне неотрицательности матрицы  $\mathbf{A}$ . Следовательно, если  $a_{11} = 0$ , то или первая строка  $\mathbf{A}$ , или первый столбец  $\mathbf{A}$  нулевые. (См. также упр. 6.6.2.)

2)  $a_{11} \neq 0$ . Тогда для некоторого  $p$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) получаем  $D_p \neq 0$ ,  $D_{p+1} = 0$ . (Снова, если  $p = n-1$ , то доказывать нечего.) Введем окаймляющие определители

$$b_{ij} = A(\theta \cup i; \theta \cup j) \quad i, j = p+1, \dots, n$$

и определим матрицу  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p+1}^n$ . Согласно тождеству Сильвестра (следствие 6.2.3), если  $\alpha, \beta \in Q_{r,n}$ ,  $\alpha_1 > p$ ,  $\beta_1 > p$ , то

$$B(\alpha; \beta) = (A(\theta; \theta))^{r-1} A(\theta \cup \alpha; \theta \cup \beta),$$

значит матрица  $\mathbf{B}$  является TN. Так как  $b_{p+1,p+1} = D_{p+1} = 0$ , то эта матрица удовлетворяет условиям первого случая. Если  $q > p+1$  и  $\alpha = \beta = \{p+1, \dots, q\}$ , то

$$B(\alpha; \alpha) = (A(\theta(p); \theta(p)))^{q-p-1} A(\theta(q); \theta(q)) = 0.$$

Однако так как  $D_p = A(\theta(p); \theta(p)) \neq 0$ , получаем  $D_q = 0$ . ■



Предположим, что  $j > 1$  и  $a_{ij} = 0$ . Если  $k > j$ , то

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{jj} & a_{jk} \end{vmatrix} \geq 0, \quad a_{ij} = 0, \quad a_{jj} > 0, \quad a_{ik} \geq 0,$$

откуда  $a_{ik} = 0$ ; все элементы вправо от  $a_{ij}$  также являются нулевыми. Рассмотрим элементы  $\{a_{ii}, a_{i,i+1}, \dots, a_{in}\}$   $i$ -й строки. Первый из них является положительным; тогда существует индекс  $m$ ,  $i \leq m \leq n$ , такой, что  $a_{ij} = 0$  для  $j > m$ ; назовем этот индекс  $p_i$ ;  $p_i \geq i$ .

Предположим, что  $j > i$  и  $a_{ij} = 0$ . Если  $k < i$ , то

$$\begin{vmatrix} a_{ki} & a_{kj} \\ a_{ii} & a_{ij} \end{vmatrix} \geq 0, \quad a_{ij} = 0, \quad a_{ii} > 0, \quad a_{kj} \geq 0,$$

откуда  $a_{kj} = 0$ . Следовательно,  $a_{ij} = 0$  и  $k < i$ , значит  $a_{kj} = 0$ . Из  $j > p_i$  получаем  $a_{kj} = 0$ , т.е. из  $j > p_i$  следует  $j > p_k$ ;  $p_k \leq p_i$ . Поэтому  $p$  является лестничной последовательностью, и верхний треугольник  $\mathbf{A}$  — лестничная матрица. ■

**Теорема 6.6.4.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_n$  является  $TN$  и  $1 \leq p < n$ , тогда  $A(\theta(n); \theta(n)) \leq A(\theta(p); \theta(p)) \cdot A(\theta'(p); \theta'(p))$ . Здесь  $\theta(p) = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $\theta'(p) = \{p+1, \dots, n\}$ .

**Доказательство.** По теореме 6.6.1 мы можем предполагать, что все главные миноры *положительны*, действительно, если какой-то из них является нулевым, то неравенство будет выполнено, так как по теореме 6.6.1  $\det(\mathbf{A}) = 0$ . Эта теорема справедлива для  $n = 2$ , так как

$$A(\theta(2); \theta(2)) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq a_{11}a_{22}.$$

Будем доказывать по индукции и предположим, что утверждение справедливо для матриц порядка  $n - 1$  и менее. Рассмотрим матрицу  $\mathbf{B}$  из теоремы 6.6.1:

$$b_{ij} = A(\theta \cup i; \theta \cup j), \quad i, j = p+1, \dots, n,$$

и

$$\begin{aligned} B(\theta'; \theta') &= (A(\theta; \theta))^{n-p-1} A(\theta(n); \theta(n)) \\ &= (D_p)^{n-p-1} D_n, \end{aligned}$$

откуда

$$D_n = B(\theta'; \theta') / (D_p)^{n-p-1}.$$

Так как матрица  $\mathbf{B}[\theta'|\theta']$  имеет порядок  $n - p \leq n - 1$ , предположение индукции применимо к этой матрице:

$$B(\theta'; \theta') \leq b_{p+1, p+1} B(\theta'(p+1); \theta'(p+1)),$$

следовательно,

$$D_n \leq b_{p+1, p+1} B(\theta'(p+1); \theta'(p+1)) / (D_p)^{n-p-1}. \quad (6.6.1)$$

Применяя снова тождество Сильвестра, получаем

$$B(\theta'(p+1); \theta'(p+1)) = (A(\theta; \theta))^{n-p-2} A(\alpha; \alpha),$$

где  $\alpha = \theta \cup \theta'(p+1) = \{1, 2, \dots, p, p+2, \dots, n\}$ . Тогда из равенства (6.6.1) с учетом  $b_{p+1, p+1} = D_{p+1}$  следует

$$D_n \leq D_{p+1} (D_p)^{n-p-2} A(\alpha; \alpha) / (D_p)^{n-p-1} \leq D_{p+1} A(\alpha; \alpha) / D_p. \quad (6.6.2)$$

По предположению индукции:

$$A(\alpha; \alpha) \leq D_p A(\theta'(p+1); \theta'(p+1)).$$

Согласно (6.6.2) получаем

$$A(\theta(n); \theta(n)) \leq A(\theta(p+1); \theta(p+1)) A(\theta'(p+1); \theta'(p+1)),$$

т. е. результат справедлив для матриц порядка  $n$ . ■

**Следствие 6.6.2.** Если  $\mathbf{A} \in M_n$  является TN, то

$$D_p \leq a_{11} a_{22} \dots a_{pp}, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Теорема 6.6.4 касается главных миноров TN матрицы  $\mathbf{A}$ . Однако так как любая квадратная матрица, полученная как подмножество строк и столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ , также является TN, получаем

**Следствие 6.6.3.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_n$  является TN,  $\beta, \gamma \in Q_{q,n}$  и  $\beta, \gamma \in \theta(p) = \theta$  (т. е.  $\beta_q, \gamma_q \leq p$ ), тогда

$$A(\beta \cup \theta'; \gamma \cup \theta') \leq A(\beta; \gamma) A(\theta'; \theta').$$

Аналогично, если  $\beta, \gamma \in Q_{q,n}$  и  $\beta, \gamma \in \theta'(p) = \theta'$  (т. е.  $\beta_1, \gamma_1 \geq p+1$ ), то

$$A(\theta \cup \beta; \theta \cup \gamma) \leq A(\beta; \gamma) A(\theta; \theta).$$

Обобщения этого результата см. в работе Андо [4] (1987).

**Теорема 6.6.5.** *Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_{m,n}$  является TN. Если  $\mathbf{A}$  имеет  $p$  линейно зависимых строк, индексированных  $\alpha \in Q_{p,m}$ ,  $\alpha_1 = 1, \alpha_p = t$ , среди которых первые  $p-1$ , индексированные  $\alpha \setminus \alpha_p$ , и последние  $p-1$ , индексированные  $\alpha \setminus \alpha_1$ , являются линейно независимыми (л. н.), то  $\mathbf{A}$  имеет ранг  $p-1$ .*

**Доказательство.** Очевидно, что ранг  $\mathbf{A}$  не меньше  $p-1$ ; покажем, что он не больше  $p-1$ , т. е. в точности равен  $p-1$ .

Линейно независимые строки индексированы  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ . Если  $p > n$ , то ранг  $(\mathbf{A}) \leq n < p$ , а значит ранг  $(\mathbf{A}) = p-1$ . Рассмотрим  $p \leq n$ . Строка  $\alpha_p$  может быть представлена через строки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ :

$$a_{\alpha_p, j} = \sum_{k=1}^{p-1} c_k a_{\alpha_k, j} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.6.3)$$

и, так как строки  $\alpha \setminus \alpha_1$  являются линейно независимыми,  $c_1 \neq 0$ . Так как строки  $\alpha \setminus \alpha_p$  линейно независимы, то существует  $\beta^0 \in Q_{p-1, n}$  так, что  $A(\alpha \setminus \alpha_p; \beta^0) > 0$ . Подставляя вместо  $a_{\alpha_p, j}$  результат (6.6.3), получаем

$$A(\alpha \setminus \alpha_1; \beta^0) = (-1)^p c_1 A(\alpha \setminus \alpha_p; \beta^0).$$

Следовательно,  $A(\alpha \setminus \alpha_1; \beta^0) \neq 0$ , однако этот минор является неотрицательным, и, следовательно, он строго положителен; откуда  $(-1)^p c_1 > 0$ .

Предположим, что  $q \in \alpha'$ , тогда  $\alpha_r < q < \alpha_{r+1}$  для некоторого индекса  $r$ , удовлетворяющего  $1 \leq r < p-1$ . Если  $\beta \in Q_{p, n}$ , то, подставляя значение  $a_{\alpha_p, j}$ , как и ранее, получаем

$$A((\alpha \setminus \alpha_1) \cup q; \beta) = (-1)^{p+1} c_1 A((\alpha \setminus \alpha_p) \cup q; \beta). \quad (6.6.4)$$

Неравенство  $(-1)^p c_1 > 0$  означает, что миноры с каждой стороны равенства (6.6.4) имеют противоположные знаки. Однако оба они должны быть неотрицательными, откуда они оба нулевые. Так как  $\beta$  произвольный элемент  $Q_{p, n}$ , получаем, что любая строка  $q \in \alpha'$  может быть записана как линейная комбинация строк  $\alpha \setminus \alpha_1$  или, что эквивалентно,  $\alpha \setminus \alpha_p$ . Следовательно, ранг  $\mathbf{A}$  равен  $p-1$ . ■

Следующая теорема является следствием предыдущей.

**Теорема 6.6.6.** *Пусть  $\mathbf{A} \in M_{m,n}$  является TN и существует  $\alpha \in Q_{p,m}$ ,  $\beta \in Q_{p,n}$  такие, что  $\alpha_1 = 1, \alpha_p = t, \beta_1 = 1, \beta_p = n$  и*

$$A(\alpha; \beta) = 0, \quad A(\alpha \setminus \alpha_p; \beta \setminus \beta_p) > 0, \quad A(\alpha \setminus \alpha_1; \beta \setminus \beta_1) > 0,$$

то  $\mathbf{A}$  имеет ранг  $p-1$ .

**Доказательство.** Применим теорему 6.6.5 к матрице со строками  $\{1, 2, \dots, m\}$  и столбцами  $\beta$  матрицы  $\mathbf{A}$ . Она имеет  $p$  линейно зависимых строк  $\alpha$ , первые  $p - 1$  из них,  $\alpha \setminus \alpha_p$ , и последние  $p - 1$ ,  $\alpha \setminus \alpha_1$ , являются линейно независимыми. Следовательно, она имеет ранг  $p - 1$ , а значит,  $p$  ее столбцов являются линейно зависимыми. Эти столбцы являются столбцами  $\mathbf{A}$ , аналогичное справедливо для строк  $\mathbf{A}^T$ . Применим теорему 6.6.5 к  $\mathbf{A}^T$ . Ее строки  $\beta$  линейно зависимы, тогда как первые  $p - 1$ ,  $\beta \setminus \beta_p$ , и последние  $p - 1$ ,  $\beta \setminus \beta_1$ , линейно независимы. Следовательно, по теореме 6.6.5,  $\mathbf{A}^T$  имеет ранг  $p - 1$ ;  $\mathbf{A}$  имеет ранг  $p - 1$ . ■

### Упражнения 6.6

- 1) Предъявите матрицу  $\mathbf{A} \in S_2$ , являющуюся PD и не являющуюся TN.
- 2) Используйте 6.6.3 для доказательства того, что если  $\mathbf{A}$  является NTN и  $a_{1n} > 0$ ,  $a_{n1} > 0$ , то  $\mathbf{A}$  является (строго) положительной матрицей. Маркхам (Markham) [221] (1970) сформулировал этот результат для осцилляторных матриц  $\mathbf{A}$ , однако в этом случае достаточно условия NTN. Найдите более слабые условия, при которых справедлив этот результат. (См. Глэдвелл [126] (1998).) См. также близкие результаты в работе Гаска и Пены (Gasca, Pena) [99] (1992).

## 6.7. Осцилляторные матрицы

В параграфе 6.6 нами были введены четыре термина: TN, NTN, TP и O. В этом параграфе мы имеем дело с последним из них, *осцилляторными матрицами*. Заметим, что условие TN слабее NTN, которое в свою очередь слабее, чем условие TP. Условие O по определению сильнее NTN; оно также слабее TP, так как матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.7.1)$$

является O, в силу того что

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

является ТР, однако сама матрица  $\mathbf{A}$  не является ТР. Заметим, что если  $\mathbf{A}^m$  является ТР, то  $\mathbf{A}$  — невырожденная матрица. Тем самым матрица  $\mathbf{A}$  является О, если  $\mathbf{A}$  является ТН и  $\mathbf{A}^m$  является ТР. Мы установим далее, что если  $\mathbf{A} \in S_n$ ,  $\mathbf{A}$  — трехдиагональная матрица с положительной кодиагональю и является РД, то  $\mathbf{A}$  является О. Очевидно, что класс осцилляторных матриц гораздо шире. Получим сперва ряд предварительных результатов, которые позволят нам охарактеризовать осцилляторные матрицы. Именно осцилляторные матрицы, а не ТР-матрицы актуальны в приложениях к обратным задачам.

Мы определили осцилляторные матрицы (О) как ТН-матрицы, для которых некоторая степень  $\mathbf{A}^m$  является вполне положительной ТР. Используя это определение, мы не обладаем возможностью проверить, является ли данная ТН-матрица О-матрицей. Наша основная задача в этом параграфе — получить легкий способ проверки свойства О. В качестве первого шага докажем:

**Теорема 6.7.1.** *Если  $\mathbf{A} \in M_n$  является О, тогда любая диагональная подматрица  $\mathbf{B} \in M_p$ , полученная удалением последовательных строк и столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ , обладает свойством О.*

**Доказательство.** Очевидно, любая диагональная подматрица является ТН; необходимо проверить, является ли она О. Для этого достаточно доказать, что  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1$ , полученная удалением первой строки и столбца матрицы  $\mathbf{A}$ , является О.

Применим упр. 6.2.6, которое следует из теоремы Коши–Бине (уравнение (6.2.9)), для получения миноров степени матрицы в терминах миноров исходной матрицы. Предположим, что  $\mathbf{A}^m = \mathbf{C}$  является ТР и рассмотрим миноры  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^m$ . Будем придерживаться исходной нумерации строк и столбцов, таким образом,  $\mathbf{B} = (a_{ij})_2^n$ .

Тогда, если  $\alpha, \beta \in Q_{p,n}$  и  $\alpha_1 \geq 2$ ,  $\beta_1 \geq 2$ , получим

$$D(\alpha; \beta) = \sum A(\alpha; \gamma^{(1)}) A(\gamma^{(1)}; \gamma^{(2)}) \dots A(\gamma^{(m-1)}; \beta), \quad (6.7.2)$$

где суммирование рассматривается по всем последовательностям  $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(m-1)} \in Q_{p,n}$ , таким, что  $\gamma^{(i)} \geq 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ .

Рассмотрим соответствующие миноры  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^m$ :  $C(1 \cup \alpha; 1 \cup \beta)$ ; получим

$$C(1 \cup \alpha; 1 \cup \beta) = \sum A(1 \cup \alpha; \delta^{(1)}) A(\delta^{(1)}; \delta^{(2)}) \dots A(\delta^{(m-1)}; 1 \cup \beta), \quad (6.7.3)$$

где суммирование ведется по всем последовательностям  $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m-1)} \in Q_{p+1,n}$ . Так как  $\mathbf{C}$  является ТР, каждый из ее миноров

должен быть положителен, откуда получаем, что по крайней мере для одного множества  $\delta^{(1)}; \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(m-1)}$  произведение в правой части равенства (6.7.3) должно быть положительно. Из этого следует, что любой минор, входящий в это произведение, должен быть строго положителен, так как они оба неотрицательны. Тогда если  $\delta \in Q_{p+1,n}$ , то  $\delta$  может быть записано в виде  $\delta_0 \cup \gamma$ , где  $\gamma \in Q_{p,n}$  и  $\gamma_1 \geq 2$ . Откуда получаем, что по множеству  $\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(m-1)} \in Q_{p+1,n}$ , для которого все слагаемые в (6.7.3) положительны, можно построить множество  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(m-1)} \in Q_{p,n}$ , которое появляется в произведении (6.7.2). Теперь будем использовать следствие 2 теоремы 6.6.3; оно показывает, что для заданного выбора  $(\gamma^{(i)})_1^{m-1}$  все миноры в правой части (6.7.2) положительны, действительно, если один из них нулевой, например первый, то

$$A(1 \cup \alpha; \delta_0^{(1)} \cup \gamma^{(1)}) \leq a_{1, \delta_0^{(1)}} A(\alpha; \gamma^{(1)}) = 0,$$

это противоречит положительности минора в левой части. Получаем, что одно произведение в сумме из правой части (6.7.2) является положительным;  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^m$  является ТР;  $\mathbf{B}$  обладает свойством О. ■

Мы определили ведущий минор  $\mathbf{A}$  как  $A(\alpha; \alpha) \equiv A(\alpha)$ . Теперь определим *квазиведущий минор* следующим образом. Минор  $A(\alpha; \beta)$  называется квазиведущим, если  $\alpha, \beta \in Q_{p,n}$ ,

$$1 \leq \alpha_1, \beta_1 < \alpha_2, \beta_2 < \dots < \alpha_p, \beta_p \leq n \quad (6.7.4)$$

и

$$|\alpha_1 - \beta_1| \leq 1, \quad |\alpha_2 - \beta_2| \leq 1, \dots, |\alpha_p - \beta_p| \leq 1. \quad (6.7.5)$$

Следовательно, любой ведущий минор является квазиведущим минором.

Утверждение  $\alpha_1, \beta_1 < \alpha_2, \beta_2$  означает, что каждый из  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  меньше каждого из  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ , однако неравенства между  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  и между  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  могут быть любыми; следовательно:

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_1 < \beta_2, \quad \beta_1 < \alpha_2, \quad \beta_1 < \beta_2.$$

Все миноры

$$A(1, 3; 2, 3), \quad A(1, 3; 1, 3), \quad A(1, 2; 1, 3)$$

являются квазиведущими, однако  $A(1, 2; 2, 3)$  не является таковым.

Заметим, что для матрицы  $\mathbf{A}$  из формулы (6.7.1), которая является О, все квазиведущие миноры положительны. Последнее есть частный случай следующей теоремы.



**Теорема 6.7.2.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_n$ , если матрица  $\mathbf{A}$  является NTN и  $a_{i,i+1} > 0$ ,  $a_{i+1,i} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , то все квазиведущие миноры  $\mathbf{A}$  положительны.

**Доказательство.** Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по порядку миноров,  $p$ . Квазиведущие миноры первого порядка являются диагональными коэффициентами  $a_{ii}$ , которые положительны по следствию 6.6.2; и элементами вида  $a_{i,i+1}$ ,  $a_{i+1,i}$ , которые положительны по условию теоремы. Предположим, что все квазиведущие миноры порядка  $p-1$  являются положительными. Покажем, что все такие миноры порядка  $p$  положительны. Допустим, что это не так, т. е.

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = 0,$$

где индексы удовлетворяют неравенствам (6.7.4), (6.7.5). Тогда

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1})$$

и

$$A(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p; \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p)$$

являются квазиведущими минорами порядка  $p-1$ . Теорема 6.6.6 утверждает, что матрица со строками  $\alpha_1, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_p$  и столбцами  $\beta_1, \beta_1 + 1, \dots, \beta_p$  имеет ранг  $p-1$ . Пусть  $h = \max(\alpha_1, \beta_1)$ , тогда из неравенств (6.7.4), (6.7.5) получаем

$$\alpha_1, \beta_1 \leq h; \quad \alpha_p, \beta_p \geq h + p - 1.$$

Следовательно, минор  $A(h, h+1, \dots, h+p-1)$  является минором  $p$ -го порядка матрицы ранга  $p-1$ , а значит является нулевым. Однако этот минор является ведущим минором  $\mathbf{A}$ , и из теоремы 6.6.4 получаем  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ; однако  $\mathbf{A}$  является NTN и, следовательно, невырожденной. Полученное противоречие показывает, что все квазиведущие миноры  $\mathbf{A}$  положительны. ■

Докажем следующую важную теорему:

**Теорема 6.7.3.** Пусть  $\mathbf{A} \in M_n$  является NTN, тогда она является  $O$  в том и только том случае, когда  $a_{i,i+1} > 0$ ,  $a_{i+1,i} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Доказательство.** Сперва установим, что если матрица  $\mathbf{A}$  является осцилляторной, то  $a_{i,i+1} > 0$ ,  $a_{i+1,i} > 0$ . Действительно, в таком случае

по теореме 6.7.1 получаем, что матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \end{bmatrix}$$

обладает свойством  $O$ , а значит  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^m$  обладает свойством  $TP$  для некоторого  $m$ . Однако если, например,  $a_{i,i+1} = 0$ , то  $d_{i,i+1} = 0$  для любого значения  $m$ . Аналогично, если  $a_{i+1,i} = 0$ , то  $d_{i+1,i} = 0$ . Отсюда  $a_{i,i+1} > 0$  и  $a_{i+1,i} > 0$ .

Докажем теперь, что если  $a_{i,i+1} > 0$ ,  $a_{i+1,i} > 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , то существует степень матрицы  $\mathbf{A}$ , обладающая свойством  $TP$ . Покажем, что матрица  $\mathbf{A}^{n-1}$  является  $TP$ . Мы будем использовать теорему 6.7.2, которая утверждает, что квазиведущие миноры матрицы  $\mathbf{A}$  положительны. Напомним результат, использовавшийся при доказательстве теоремы 6.7.1, о том, что минор матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{n-1}$  является суммой произведений  $n-1$  миноров  $\mathbf{A}$ . Нам надо показать, что сумма, отвечающая заданному минору  $B(\alpha; \beta)$ , имеет хоть одно положительное слагаемое. Заметим, что если  $B(\alpha; \beta) > 0$  для некоторого значения  $m$ , то он также будет положителен для  $m+1$  и, следовательно, для всех последующих  $m$ ; так как  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^m = \mathbf{A}\mathbf{B}$ , и разложение Коши–Бине для минора  $C(\alpha; \beta)$  содержит слагаемое  $A(\alpha; \alpha)B(\alpha; \beta)$ . Это слагаемое является положительным, так как по теореме 6.6.2 главные миноры  $\mathbf{A}$  положительны.

Из этого рассуждения следует, что для доказательства  $B(\alpha; \beta) > 0$  для  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{n-1}$  достаточно установить, что для некоторого  $m$ , удовлетворяющего условию  $1 \leq m \leq n-1$ , разложение  $B(\alpha; \beta)$  содержит одно произведение, состоящее только из квазиведущих миноров. Основная проблема состоит в том, как перейти от последовательности  $\alpha$  к последовательности  $\beta$  при помощи промежуточных последовательностей  $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(m-1)}$  таких, что  $A(\alpha; \gamma^{(1)})$ ,  $A(\gamma^{(1)}; \gamma^{(2)})$ ,  $\dots$ ,  $A(\gamma^{(m-1)}; \beta)$  все являются квазиведущими. Например, пусть  $p = 3$ ,  $\alpha = \{1, 2, 3\}$  и  $\beta = \{3, 5, 6\}$ ; тогда осуществим переход следующим образом:

$$\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{2, 3, 4\} \longrightarrow \{3, 4, 5\} \longrightarrow \{3, 5, 6\}.$$

Требуемая экспонента  $m$  совпадает с числом шагов, необходимых для перехода от  $\alpha$  к  $\beta$ , что равно

$$D = \max_{1 \leq r \leq p} |\alpha_r - \beta_r|. \quad (6.7.6)$$

Число  $D$  (в данном примере 3) можно рассматривать как расстояние  $D(\alpha, \beta)$  между двумя последовательностями (см. упр. 6.7.2). Если минор

$A(\alpha, \beta)$  является квазиведущим, то  $D(\alpha, \beta) \leq 1$ ; если  $A(\alpha; \beta)$  является квазиведущим, но не является ведущим, то  $D(\alpha, \beta) = 1$ . Наибольшее расстояние между двумя последовательностями  $\alpha, \beta \in Q_{p,n}$  равно  $n - p$ ; например, когда

$$\alpha = \{1, 2, \dots, p\}, \quad \beta = \{n - p + 1, n - p + 2, \dots, n\};$$

то максимум достигается при  $p = 1$ , т. е.  $\alpha = \{1\}$ ,  $\beta = \{n\}$ . Получаем, что если  $m = n - 1$ , то разложение Коши–Бине для произвольного минора  $\mathbf{B}$  содержит одно произведение, целиком состоящее из квазиведущих миноров для  $\mathbf{A}$ ; матрица  $\mathbf{B}$  является ТР;  $\mathbf{A}$  не принадлежит классу  $\mathbf{O}$ . ■

Мы завершим этот параграф изучением связи между классами осцилляторных матриц и матриц Якоби, которые рассматривались в предыдущих главах. Матрица Якоби была определена в параграфе 3.1:  $\mathbf{J} \in S_n$ ,  $\mathbf{J}$  является PSD, и  $\mathbf{J}$  имеет неотрицательную кодиагональ. Очевидно,  $\mathbf{J}$  не является осцилляторной, однако

**Теорема 6.7.4.** *Если  $\mathbf{J}$  является PD, то матрица  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{ZJZ}$  является осцилляторной.*

**Доказательство.** Напомним, что  $\mathbf{Z} = \text{diag}(1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1})$ , т. е. в обозначениях уравнения (3.1.4)

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = b_i > 0.$$

Согласно теореме 6.7.3 достаточно показать, что  $\mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{J}}$  является TN. Рассмотрим минор  $A(\alpha; \beta)$ . Возможны три случая:

- 1)  $\alpha = \beta$ , тогда  $A(\alpha; \alpha) > 0$ , так как  $\mathbf{A}$  является PD.
- 2)  $d(\alpha, \beta) = 1$ , т. е. минор  $A(\alpha; \beta)$  является квазиведущим, если он может быть представлен как произведение ведущих миноров и элементов  $b_i$ ;  $A(\alpha, \beta) > 0$ .
- 3)  $d(\alpha, \beta) > 1$ , тогда  $A(\alpha; \beta) = 0$ . ■

У матрицы  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{J}}$  только квазиведущие миноры являются положительными, остальные равны нулю.

Если  $\mathbf{A} \in M_n$ , то  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{ZAZ}$  называется *знаково-обратной* матрицей к  $\mathbf{A}$ .

**Теорема 6.7.5.** *Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$ . Тогда матрица  $\mathbf{A}$  является NTN, ТР,  $\mathbf{O}$  тогда и только тогда, когда  $(\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$  является NTN, ТР,  $\mathbf{O}$  соответственно.*

**Доказательство.** Согласно параграфу 1.3,  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}$ , где  $r_{ij} = A_{ji}/\det(\mathbf{A})$  и  $A_{ij}$  равно  $A_{ij} = (-1)^{i+j}\hat{a}_{ij}$ . Откуда получаем, что достаточно убедиться, что  $\mathbf{A}$  является NTN, TP или O тогда и только тогда, когда  $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$  является NTN, TP, O. По теореме 6.2.1 получаем, что  $\mathbf{A}$  является NTN или TP тогда и только тогда, когда  $\hat{\mathbf{A}}$  является NTN или TP соответственно. Если  $\mathbf{A}$  обладает свойством O, то  $\hat{a}_{i,i+1}$  и  $\hat{a}_{i+1,i}$  по теореме 6.2.1 являются квазиведущими минорами  $\mathbf{A}$ , а значит положительны;  $\hat{\mathbf{A}}$  является O; и наоборот, если  $\hat{\mathbf{A}}$  является O, то и  $\mathbf{A}$ . ■

Если матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$  является осцилляторной, то говорят, что  $\mathbf{A}$  является знаково-осцилляторной (SO). В частности, невырожденная матрица Якоби принадлежит классу SO.

**Следствие 6.7.1.** Если  $\mathbf{A}$  принадлежит SO, то  $\mathbf{A}^{-1}$  принадлежит O.

### Упражнения 6.7

- 1) Установите, почему неверно, что  $\mathbf{A}$  является O тогда и только тогда, когда для некоторого  $m$ ,  $\mathbf{A}^m$  является TP? Предъявите пример  $\mathbf{A} \in M_2$  такой, что  $\mathbf{A}^2$  обладает свойством TP, однако  $\mathbf{A}$  не является TN.
- 2) Покажите, что расстояние  $D(\alpha, \beta)$  удовлетворяет основным свойствам расстояния:
 
$$D(\alpha, \beta) \geq 0; D(\alpha, \beta) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \alpha = \beta;$$

$$D(\alpha, \gamma) \leq D(\alpha, \beta) + D(\beta, \gamma).$$
- 3) Покажите, что если  $\mathbf{A} \in M_n$  является трехдиагональной, то она принадлежит классу O в том и только в том случае, если:
  - а) ее диагональные миноры неотрицательны
  - б)  $a_{i,i+1} > 0$ ,  $a_{i+1,i} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$
  - с) она является невырожденной.
- 4) Будем говорить, что трехдиагональная матрица  $\mathbf{A}$ , описанная в упр. 6.7.3, имеет полуленточную размерность 1; она имеет одну диагональ выше и одну диагональ ниже главной диагонали. Покажите, что если  $1 \leq p \leq n-1$ , то  $\mathbf{A}^p$  имеет полуленточную размерность  $p$ .

- 5) Покажите, что если  $a_{i,i+1} \neq 0$ ,  $a_{i+1,i} \neq 0$ , то трехдиагональная матрица  $\mathbf{A}$  может быть симметризована при помощи диагональных матриц, т. е. существуют диагональные матрицы  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  такие, что  $\mathbf{CAD}$  является симметричной. Покажите, что в этом случае осцилляторная трехдиагональная матрица может быть симметризована до матрицы  $\tilde{\mathbf{J}}$  посредством положительных диагоналей  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , т. е.  $\mathbf{CAD} = \tilde{\mathbf{J}}$ .
- 6) Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ . Установите, что если матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  обладают свойством TN, то матрица  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{AB}$  обладает свойством TN.
- 7) Покажите, что если  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  принадлежат классу  $\mathbf{O}$ , то матрица  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{AB}$  принадлежит классу  $\mathbf{O}$ .
- 8) Покажите, что если  $\mathbf{A} \in M_n$  является  $\mathbf{O}$ , то и  $\mathcal{A}_{n-1}$  — осцилляторная матрица.
- 9) Покажите, что если  $\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}$ , то  $\mathbf{A}$ , которая в этом случае обладает свойством  $\mathbf{O}$  по теореме 6.7.5, оказывается на самом деле (строго) положительной матрицей, т. е. без нулевых элементов. Заметим, что в силу упражнения 6.6.2 достаточно показать, что  $a_{1n} > 0$ .
- 10) Покажите, что если  $\mathbf{A}$  является  $\mathbf{O}$ , то индексы ее лестничной структуры (параграф 6.6) удовлетворяют условию  $p_i \geq i + 1$ ,  $q_j \geq j + 1$ .
- 11) Покажите, что если  $\mathbf{A}$  имеет собственные числа  $\lambda_l$  и собственные векторы  $\mathbf{u}_l$ , то  $\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$  имеет собственные числа  $\mu_k = 1/\lambda_l$  и собственные векторы  $\mathbf{v}_k = \mathbf{Zu}_l$ , где  $l = n + 1 - k$ .
- 12) Постройте контрпримеры, показывающие, что если  $\mathbf{A}$  удовлетворяет одному из свойств TN, TP или  $\mathbf{O}$ , то присоединенная матрица  $\mathcal{A}_p$  не обязательно обладает этим свойством.

## 6.8. Вполне положительные матрицы

Матрица  $\mathbf{A} \in M_n$  обладает свойством TP, если все ее миноры положительны. Последнее эквивалентно утверждению, что все присоединенные матрицы  $\mathcal{A}_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , являются (строго) положительными. Мы должны проверить

$$P = n^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + 1 \quad (6.8.1)$$

элементов. Используя теорему Фекете [86] (1913), Андо доказал в [4] (1987), что достаточно проверить гораздо меньшее множество миноров.

Как в параграфе 6.2, пусть  $Q_{p,n}$  обозначает множество строго возрастающих последовательностей  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ , выбранных из  $1, 2, \dots, n$ . Запишем

$$d(\alpha) = \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i - 1)$$

и заметим, что если  $\alpha \in Q_{p,n}$ , то  $d(\alpha) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$  для  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ; т. е.  $d(\alpha) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  образована *последовательными* целыми числами. Определим  $Q_{k,n}^0$  как подмножество  $Q_{k,n}$ , состоящее из тех чисел  $\alpha$ , для которых  $d(\alpha) = 0$ . Следуя теореме 2.5, принадлежащей Андо (1987) [4], докажем

**Теорема 6.8.1.**  *$A \in M_n$  обладает свойством TP, если  $A(\alpha; \beta) > 0$  для всех  $\alpha, \beta \in Q_{k,n}^0, k = 1, 2, \dots, n$ .*

**Доказательство.** Докажем, что

$$A(\alpha; \beta) > 0 \text{ для } \alpha, \beta \in Q_{k,n}, k = 1, 2, \dots, n \quad (6.8.2)$$

индукцией по  $k$ . Если  $k = 1$ , то все тривиально, так как  $Q_{k,n} = Q_{k,n}^0$ . Предположим, что (6.8.2) справедливо для  $k-1$  вместо  $k$  ( $k \geq 2$ ). Зафиксируем последовательность  $\alpha \in Q_{k,n}$  такую, что  $d(\alpha) = 0$ , т. е.  $\alpha \in Q_{k,n}^0$ , и докажем (6.8.2) для этой  $\alpha$  индукцией по  $\ell = d(\beta)$ . Если  $\ell = 0$ , то требуемая формула верна по условию теоремы. Предположим, что для всех миноров, удовлетворяющих  $\delta \in Q_{k,n}$  и  $d(\delta) \leq \ell - 1$  при  $\ell \geq 1$ , справедливо  $A(\alpha; \delta) > 0$ . Рассмотрим  $\beta \in Q_{k,n}$  при  $d(\beta) = \ell$ . Тогда существует такое  $p$ , что  $\beta_1 < p < \beta_k, d(\tau \cup \{\beta_1, p\}) \leq \ell - 1$  и  $d(\tau \cup \{p, \beta_k\}) \leq \ell - 1$ , где  $\tau = \{\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{k-1}\}$ . Используем тождество (1.39), доказанное Андо в [4] (1987):

$$A(\omega; \tau \cup \{p\})A(\alpha; \tau \cup \{\beta_1, \beta_k\}) = A(\omega; \tau \cup \{\beta_1\})A(\alpha; \tau \cup \{p, \beta_k\})$$

для всех  $\omega \in Q_{k-1,n}$  при условии  $\omega \subset \alpha$ . По предположению индукции получаем, что правая часть является положительной, как и  $A(\omega; \tau \cup \{p\})$ , значит  $A(\alpha; \tau \cup \{\beta_1, \beta_k\}) \equiv A(\alpha; \beta) > 0$ . Откуда получаем (6.8.2) для  $\alpha \in Q_{k,n}$  при  $d(\alpha) = 0$ . Для доказательства (6.8.2) достаточно применить те же самые рассуждения к системе строк. ■

Используя те же аргументы, можно доказать:

**Следствие 6.8.1.** Пусть  $A \in M_n$ . Если все миноры  $A(\alpha; \beta) > 0$  для  $\alpha, \beta \in Q_{k-1, n}$  и  $A(\alpha; \beta) > 0$  для  $\alpha, \beta \in Q_{k, n}^0$ , то  $A(\alpha; \beta) > 0$  для всех  $\alpha, \beta \in Q_{k, n}$ .

Этот результат дает способ проверки того, что матрица  $A \in S_n$  положительно определена; для того чтобы  $A$  обладала свойством PD, достаточно доказать, что главные миноры  $D_1, D_2, \dots, D_n$  положительны. Важность этого результата состоит в том, что число миноров, для которых надо проверить положительность намного меньше, чем соответствующее число из формулы (6.8.1).

Способ проверки, который дает теорема 6.8.2, определяет, когда произвольная матрица  $A \in M_n$  обладает свойством TP. Если известно, что  $A$  является TN, то, как утверждается ниже, достаточно проверить строгую положительность небольшого числа миноров для того, чтобы установить, что  $A$  — TP.

**Теорема 6.8.2.** Пусть матрица  $A \in M_n$  вполне неотрицательна. Если все угловые миноры  $A$  положительны, то она является вполне положительной.

**Доказательство.** Угловыми минорами являются следующие:

$$A(1, 2, \dots, p; n-p+1, \dots, n), \quad A(n-p+1, \dots, n; 1, 2, \dots, p),$$

$p = 1, 2, \dots, n$ . Утверждение следует из теоремы 6.6.6 и теоремы 6.8.1. Рассмотрим минор  $A(\alpha; \beta)$ , где  $\alpha, \beta \in Q_{k, n}^0$ . Предположим, что  $\alpha = \{i, i+1, \dots, i+k-1\}$ ,  $\beta \in \{j, j+1, \dots, j+k-1\}$ . Если  $i \geq j$ , то  $A(\alpha; \beta)$  является ведущим минором угловой подматрицы  $A(n-p+1, \dots, n; 1, 2, \dots, p)$  при  $p = n - (i - j)$ . Эта подматрица является NTN, а значит, по теореме 6.6.6, ее ведущие миноры положительны. Если  $i < j$ , то  $A(\alpha; \beta)$  является ведущим минором для  $A(1, 2, \dots, p; n-p+1, \dots, n)$  при  $p = n - (j - i)$ . Так как  $A(\alpha; \beta) > 0$  для всех  $\alpha, \beta \in Q_{k, n}^0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , теорема 6.8.1 показывает, что  $A$  является TP. ■

### Упражнения 6.8

- 1) Покажите, что если для  $A$  выполняется свойство NTN и  $B$  вполне положительна, то  $AB$  и  $BA$  вполне положительны.
- 2) Покажите, что если  $p_{ij} = \exp[-k(i-j)^2]$ , то  $P = (p_{ij})$  обладает свойством TP. См. параграф 7 работы Андо (1987) [4].

- 3) Примените упр. 6.8.3 для доказательства того, что NTN-матрица  $\mathbf{A}$  аппроксимируется с произвольной точностью по  $L_1$ -норме (см. (6.5.4)) посредством ТР-матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}$ . (См. параграф 7 работы Андо (1987) [4].)

## 6.9. Осцилляторные системы векторов

Перед исследованием спектральных свойств вполне положительных матриц рассмотрим некоторые знаковые свойства векторов.

Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — последовательность вещественных чисел. Нулевым числам мы будем сопоставлять произвольные знаки. Можно рассматривать число перемен знака в последовательности. Это число может меняться в зависимости от выбора знаков нулевых членов последовательности. Наибольшее и наименьшее значения этого числа будут обозначаться  $S_{\mathbf{u}}^+$  и  $S_{\mathbf{u}}^-$  соответственно, где  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

Если  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^-$ , то мы будем говорить о *точном* числе перемен знака в последовательности и обозначать его посредством  $S_{\mathbf{u}}$ . Этот случай возникает только если

- 1)  $u_1, u_n \neq 0$
- 2) если  $u_i = 0$  для некоторого  $i$ , удовлетворяющего  $2 \leq i \leq n-1$ , то  $u_{i-1}u_{i+1} < 0$ , т. е.  $u_{i-1}$  и  $u_{i+1}$  оба являются ненулевыми, и имеют противоположные знаки. В этом случае,  $S_{\mathbf{u}}$  является числом перемен знака после удаления нулевых элементов.

Будем говорить, что система векторов  $\mathbf{u}_k = \{u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , является *осцилляторной*, если для любой  $(c_k)_1^p$ , удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^p c_k^2 > 0, \quad (6.9.1)$$

вектор

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^p c_k \mathbf{u}_k \quad (6.9.2)$$

удовлетворяет условию  $S_{\mathbf{u}}^+ \leq p-1$ . Очевидно, нам достаточно рассмотреть  $p \leq n$ . Возьмем  $p = 1$ , тогда имеем  $S_{\mathbf{u}_1}^+ = 0$ , т. е.  $\mathbf{u}_1 > \mathbf{0}$ ; для  $p = 2$ ,  $S_{\mathbf{u}}^+ \leq 1$  и т. д.



**Теорема 6.9.1.** *Необходимым и достаточным условием осцилляторности системы  $(\mathbf{u}_k)_1^p$  является условие, гарантирующее, что все миноры*

$$U(\alpha; \theta)$$

*отличны от нуля и имеют одинаковый знак для*

$$\alpha \in Q_{p,n}, \theta = \{1, 2, \dots, p\}.$$

**Доказательство.** Рассматриваемые миноры имеют вид

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; 1, 2, \dots, p). \quad (6.9.3)$$

Напомним, что  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  относятся к координатам векторов, а  $1, 2, \dots, p$  к номеру  $k$  рассматриваемого вектора. Теорема утверждает, что в случае  $p = 1$ ,  $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$  все являются ненулевыми и имеют одинаковый знак; последнее эквивалентно условию  $S_{\mathbf{u}}^+ = 0$ . Для  $p = 2$  получаем

$$U(1, 2; 1, 2) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}, \quad U(1, 3; 1, 2) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix},$$

$$\dots U(n-1, n; 1, 2) = \begin{vmatrix} u_{n-1,1} & u_{n-1,2} \\ u_{n,1} & u_{n,2} \end{vmatrix},$$

все являются ненулевыми и имеют один знак.

Докажем необходимость. Если минор (6.9.3) обнуляется, то можно найти числа  $(c_k)_1^p$ , не все одновременно равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^p c_k u_{\alpha_j, k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (6.9.4)$$

Тогда векторы  $\mathbf{u}$  из (6.9.2) имеют  $p$  нулевых координат

$$u_{\alpha_1} = 0 = u_{\alpha_2} = \dots = u_{\alpha_p},$$

значит, по упр. 6.9.1,  $S_{\mathbf{u}}^+ \geq p > p - 1$ .

Для доказательства того, что все миноры имеют одинаковый знак, достаточно установить, что все миноры  $U(\alpha; \theta)$  для  $\alpha$  и  $\theta$  при  $D(\alpha; \theta) = 1$  (см. уравнение (6.7.6)) имеют одинаковые знаки. Эти миноры имеют вид  $(U_j)_1^p$ , где  $U_j = U(\alpha^{(j)}; \theta)$  и  $\alpha^{(1)} = \{2, 3, \dots, p+1\}$ ,  $\alpha^{(j)} = \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, p+1\}$ ,  $j = 2, 3, \dots, p$ . Они все должны иметь такой же

знак, как и у минора  $U_{p+1} = U(\theta; \theta)$ . Рассмотрим вектор  $\mathbf{u}_{p+1}$  такой, что

$$u_{i,p+1} = \begin{cases} (-1)^{j+1}U_{p+1}, & i = j, \\ (-1)^{p+1}U_j, & i = p+1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.9.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & U(1, 2, \dots, p+1; 1, 2, \dots, p+1) = \\ & = (-1)^{p+1} \{ (-1)^{p+1}u_{p+1,p+1}U_{p+1} + (-1)^j u_{j,p+1}U_j \} = 0, \end{aligned}$$

а значит мы можем найти  $(c_k)_1^{p+1}$ , не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{k=1}^{p+1} c_k u_{i,k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Тогда вектор (6.9.2) имеет координаты

$$u_i = -c_{p+1}u_{i,p+1} \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Величина  $c_{p+1}$  не может обнулиться, так как в этом случае  $\mathbf{u}$  будет иметь  $p+1$  нулевых координат и, следовательно,  $S_{\mathbf{u}}^+ \geq p$ . Выберем  $c_{p+1}$  такое, что  $c_{p+1}U_{p+1} > 0$ , тогда по (6.9.5)  $(u_i)_1^{j-1} = 0$ ,  $u_j = (-1)^j c_{p+1}U_{p+1}$ ,  $(u_i)_{j+1}^p = 0$ ,  $u_{p+1} = (-1)^p c_{p+1}U_j$ . Если  $U_j, U_{p+1}$  имеют противоположные знаки, то  $u_j$  имеет знак  $(-1)^j$  и  $u_{p+1}$  имеет знак  $(-1)^{p+1}$ . Значит, мы можем сопоставить знаки нулевым  $u_i$  таким образом, что для всех  $i = 1, 2, \dots, p+1$  величина  $u_i$  имеет знак  $(-1)^i$ . Тогда  $S_{\mathbf{u}}^+ = p$ . Последнее доказывает необходимость.

Достаточность. Предположим, что все миноры из (6.9.3) являются ненулевыми и имеют одинаковый знак, который мы можем считать положительным. Докажем, что  $S_{\mathbf{u}}^+ \leq p-1$ , предполагая противное, т.е.  $S_{\mathbf{u}}^+ \geq p$ . Если это так, то мы можем найти  $p+1$  координат  $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_{p+1}}$  таких, что

$$u_{\alpha_j} u_{\alpha_{j+1}} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (6.9.6)$$

Все  $(u_{\alpha_j})_1^p$  не могут одновременно обратиться в ноль, иначе не все равные нулю  $(c_k)_1^p$  будут удовлетворять уравнению (6.9.4), определитель которого ненулевой.

Рассмотрим нулевой определитель

$$\begin{vmatrix} u_{\alpha_{1,1}} & u_{\alpha_{1,2}} & \cdots & u_{\alpha_{1,p}} & u_{\alpha_1} \\ u_{\alpha_{2,1}} & u_{\alpha_{2,2}} & \cdots & u_{\alpha_{2,p}} & u_{\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ u_{\alpha_{p+1,1}} & u_{\alpha_{p+2,2}} & \cdots & u_{\alpha_{p+1,p}} & u_{\alpha_{p+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

разложим его по последнему столбцу

$$\sum_{k=1}^{p+1} u_{\alpha_k} (-1)^{p+1+k} U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{p+1}; 1, 2, \dots, p) = 0.$$

Последнее невозможно, так как все миноры положительны, а в силу неравенств (6.9.6) величины  $(-1)^k u_{\alpha_k}$  имеют один знак и не являются нулевыми. Утверждение доказано. ■

### Упражнения 6.9

- 1) Рассмотрите вещественную последовательность  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Покажите, что если  $(u_i)_1^n = 0$ , то  $S_{\mathbf{u}}^- = 0, S_{\mathbf{u}}^+ = n - 1$ . Покажите также, что если  $p$  ( $0 \leq p < n$ ) значений  $u_i$  являются нулевыми, то

$$S_{\mathbf{u}}^- \leq n - p - 1 \text{ и } p \leq S_{\mathbf{u}}^+ \leq n - 1,$$

тогда как если  $p$  ( $1 < p < n$ ) последовательных значений  $u_i$  являются нулевыми, то  $S_{\mathbf{u}}^+ - S_{\mathbf{u}}^- \geq p$ .

## 6.10. Спектральные свойства вполне неотрицательных матриц

Так как ТН-матрицы не обязательно являются симметричными, то мы не можем сразу заключить, что все их собственные числа являются вещественными; для того чтобы это заключить, нам понадобится использовать ряд их специфических свойств.

**Теорема 6.10.1.** *Собственные числа ТР матриц являются положительными и различными.*

**Доказательство.** Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$  имеет собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , возможно, являющиеся комплексными. Расположим их по убыванию модуля, т. е. так, что  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Так

как  $\mathbf{A}$  является ТР, то она положительна; по теореме Перрона (теорема 6.5.1)  $\lambda_1$  является положительным и  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ . Так как  $\mathbf{A}$  является ТР, присоединенная матрица  $\mathbf{A}_2$  является положительной; ее собственные значения равны произведениям  $\lambda_i \lambda_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Она также имеет положительное собственное значение, превышающее остальные; оно равно  $\lambda_1 \lambda_2$  так, что  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  и  $\lambda_1 \lambda_2 > |\lambda_1 \lambda_3|$ . Следовательно,  $\lambda_2 > 0$  и  $\lambda_2 > |\lambda_3|$ . Рассматривая  $\mathbf{A}_3$ , заключаем, что  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$  и  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4|$ , т. е.  $\lambda_3 > 0$  и  $\lambda_3 > |\lambda_4|$  и т. д. ■

**Следствие 6.10.1.** *Собственные числа осцилляторных матриц положительны и различны.*

**Доказательство.** Если  $\mathbf{A} \in M_n$  является О, то  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$  является ТР для всех  $m \geq n - 1$ . Однако, если собственные числа  $\mathbf{A}$  это  $(\lambda_i)_1^n$ , а для  $\mathbf{B}$  это  $\mu_i = \lambda_i^m$ , так как  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > 0$  и  $\lambda_i \geq 0$ , получаем  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ . ■

Покажем, что собственные векторы осцилляторных матриц ведут себя в точности как у  $\tilde{\mathbf{J}}$ -матриц, т. е. как у матриц Якоби с обращенным порядком на собственных значениях (см. комментарий в конце параграфа 6.1).

**Теорема 6.10.2.** *Предположим, что  $\mathbf{A} \in M_n$  является О и имеет собственные числа  $(\lambda_i)_1^n$ , удовлетворяющие  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ . Пусть  $\mathbf{u}_k = \{u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}\}$  является собственным вектором, отвечающим  $\lambda_k$ ; он единственен с точностью до скалярного множителя. Пусть*

$$\mathbf{u} = \sum_{k=p}^q c_k \mathbf{u}_k, \quad \sum_{k=p}^q c_k^2 > 0, \quad (6.10.1)$$

тогда число перемен знака среди координат  $\mathbf{u}$  для различных  $(c_k)_p^q$  удовлетворяет неравенствам

$$p - 1 \leq S_{\mathbf{u}}^- \leq S_{\mathbf{u}}^+ \leq q - 1. \quad (6.10.2)$$

**Доказательство.** Так как собственные векторы  $\mathbf{A}$  являются собственными векторами  $\mathbf{A}^m$  и так как  $\mathbf{A}^m$  является ТР для некоторого  $m \leq n - 1$ , то без ограничения общности можно предполагать, что  $\mathbf{A}$  является ТР.

Предположим, что  $1 \leq q \leq n$ ,  $\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_q\} \in Q_{q,n}$ ,  $\theta = \{1, 2, \dots, q\}$ . Тогда миноры  $U(\alpha; \theta)$  являются координатами собственного вектора присоединенной матрицы  $\mathbf{A}_q$ , отвечающего максимальному

собственному значению  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q$ . По теореме Перрона, все координаты данного собственного вектора имеют одинаковый знак. Если знак  $q$ -того множества миноров обозначить через  $E_q$ , то, умножая векторы  $(\mathbf{u}_k)_1^n$  на  $E_1, E_2/E_1, \dots, E_n/E_{n-1}$  соответственно, получаем

$$U(\alpha; \theta) > 0 \quad q = 1, 2, \dots, n.$$

Из теоремы 6.9.1 следует, что  $S_{\mathbf{u}}^+ \leq q - 1$ .

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим  $\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$ . Теорема 6.7.5 утверждает, что если  $\mathbf{A}$  является ТР, то также и  $\mathbf{B}$ , и по упр. 6.7.11 получаем, что она имеет собственные значения  $\mu_k = 1/\lambda_l$  и собственные векторы  $\mathbf{v}_k = \mathbf{Z}\mathbf{u}_l$ , где  $l = n + 1 - k$ . Следовательно,

$$\mathbf{v}_k = \{v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk}\} = \{u_{1l}, -u_{2l}, u_{3l}, \dots, (-1)^{n-1}u_{nl}\}.$$

Доказанный результат показывает, что число перемен знаков в

$$\mathbf{v} = \sum_{k=n+1-q}^{n+1-p} c_{n+1-k} \mathbf{v}_k = \mathbf{Z} \sum_{l=p}^q c_l \mathbf{u}_l$$

удовлетворяет неравенству  $S_{\mathbf{v}}^+ \leq n - 1$ . Однако так как  $\mathbf{v}_i = (-1)^{i-1} \mathbf{u}_i$ , получаем  $S_{\mathbf{v}}^+ + S_{\mathbf{u}}^- = n - 1$ , откуда  $S_{\mathbf{u}}^- \geq p - 1$ . ■

**Следствие 6.10.2.** Вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k$  имеет в точности  $k - 1$  перемен знака. ( $S_{\mathbf{u}}^- = S_{\mathbf{u}}^+ = k - 1$ ).

**Следствие 6.10.3.**  $u_{nk} \neq 0$ , значит  $\mathbf{u}_k$  может быть выбран так, что  $u_{nk} > 0$ .

Рассуждения, использовавшиеся в последней теореме, приводят к следующему следствию.

**Следствие 6.10.4.** Для любого  $p$ , такого что  $1 \leq p \leq n$ , миноры  $U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; 1, 2, \dots, p)$  имеют одинаковый знак для всех  $\alpha \in Q_{p,n}$ .

Миноры из следствия 6.10.4 связывают координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  первых  $p$  собственных векторов. Перейдем к изложению результата, в котором координаты и индексы собственных значений переставлены местами; эта теорема имеет важное значение для обратных задач о колебаниях дискретной балки (глава 8). Перед тем как формулировать теорему, мы повторим замечания, сделанные о связи (O)- и (SO)-матриц.

Если матрица  $\mathbf{A}$  — осцилляторная с собственными значениями  $(\lambda_i)_1^n$ , упорядоченными таким образом, что  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ ,

то ее собственные векторы  $(\mathbf{u}_k)_1^n$  удовлетворяют теореме 6.10.2, откуда, в частности,  $\mathbf{u}_k$  имеет в точности  $k - 1$  перемену знака. Если  $\mathbf{A}$  является знаково-осцилляторной и мы обозначим ее собственные значения через  $(\lambda_i)_1^n$  в обратном порядке, т. е. так, что  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , то ее собственные векторы  $(\mathbf{u}_k)_1^n$  снова удовлетворяют теореме 6.10.2, а значит, в частности,  $\mathbf{u}_k$  имеет  $k - 1$  перемену знака. Мы сформулируем последнюю теорему этого параграфа для  $SO$ -матриц.

**Теорема 6.10.3.** *Если  $\mathbf{A} \in M_n$  является знаково-осцилляторной и ее собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  удовлетворяют  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , то ее собственные векторы  $(\mathbf{u}_i)_1^n$  могут быть выбраны так, что*

$$U(\phi; \alpha) > 0 \tag{6.10.3}$$

для  $\phi = \{n - p + 1, n - p + 2, \dots, n\}$  и любого  $\alpha \in Q_{p,n}$ .

**Доказательство.** Рассмотрения из параграфа 6.3 (см. упр. 6.3.2) показывают, что  $U(\phi; \alpha)$  является последней компонентой собственного вектора присоединенной матрицы  $\mathbf{A}_p$ , отвечающей  $s$ -тому собственному числу  $\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_p}$ , где  $s = s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ . Более общая формулировка теоремы 6.10.3 заключается в том, что все элементы  $U(\phi; \alpha)$  имеют *одинаковый знак*, который, в частности, является знаком для случая  $p = 1$ , т. е. для  $u_{ni}$ .

Будем доказывать индукцией по  $p$ . Следствие 6.10.3 показывает, что  $u_{ni} \neq 0$ . Выберем  $u_{ni} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ ; откуда теорема справедлива для  $p = 1$ . Пусть утверждение верно для  $p$ . По следствию 6.10.2 получаем, что  $\mathbf{u}_i$  имеет  $i - 1$  перемен знака, так что  $(-1)^{i-1} u_{1i} > 0$ . Выберем  $(c_j)_i^{p+1}$  таким образом, что

$$\mathbf{u} = \sum_{j=i}^{i+p} c_j \mathbf{u}_j, \quad \sum_{j=i}^{i+p} c_j^2 > 0$$

и

$$u_{n-p+1} = 0 = u_{n-p+2} = \dots = u_n,$$

используя выбор

$$c_j = (-1)^{j-i} U(\phi; \beta \setminus j) \quad j = i, i + 1, \dots, i + p,$$

где  $\beta = \{i, i + 1, \dots, i + p\}$ ,  $\phi = \{n - p + 1, \dots, n\}$ .

Вектор  $\mathbf{u}$  имеет вид

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-p}, 0, 0, \dots, 0\}$$

и имеет первый элемент

$$u_1 = c_i u_{1,i} + c_{i+1} u_{1,i+1} + \dots + c_{i+p} u_{1,i+p}.$$

Так как по предположению индукции утверждение верно для  $p$ , коэффициенты  $c_j$  удовлетворяют  $(-1)^j c_{i+j} > 0$ ; это неравенство и неравенство  $(-1)^{i+j-1} u_{1,i+j} > 0$  дают  $(-1)^{i-1} c_{i+j} u_{1,i+j} > 0$ , значит  $(-1)^{i-1} u_1 > 0$ . По теореме 6.10.2,

$$i - 1 \leq S_{\mathbf{u}}^- \leq S_{\mathbf{u}}^+ \leq p + i - 1.$$

Так как последние  $p$  элементов вектора  $\mathbf{u}$  являются нулевыми, отсюда следует, что должно быть в точности  $i - 1$  перемена знака в первых  $n - p$  элементах  $\mathbf{u}$ ; однако  $(-1)^{i-1} u_1 > 0$ , значит последний ненулевой элемент,  $u_{n-p}$ , должен быть положительен, т. е.

$$u_{n-p} = U(n - p, n - p + 1, \dots, n; i, i + 1, \dots, i + p) > 0, \quad i + p \leq n.$$

Последнее неравенство показывает, что все миноры порядка  $(p + 1)$  с *последовательными* индексами  $i, i + 1, \dots, i + p$  являются положительными, и по теореме 6.8.1 получаем, что все миноры  $(p + 1)$ -ого порядка положительны. ■

### Упражнения 6.10

- 1) Покажите, что если  $\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}$  являются собственными значениями  $\mathbf{O}$ -или  $\mathbf{SO}$ -матрицы  $\mathbf{A} \in M_n$ , то  $u_{n-1,j} u_{n,j+1} - u_{n-1,j+1} u_{n,j}$  является ненулевым и имеет одинаковый знак для  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .
- 2) Покажите, как можно использовать доказательство теоремы 6.10.3, чтобы показать, что если  $\mathbf{A} \in M_n$  является осцилляторной и имеет собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$ , удовлетворяющие  $0 < \lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_1$ , то ее собственные значения  $(\mathbf{u}_i)_1^n$  могут быть выбраны таким образом, что

$$U(\phi; \alpha) > 0$$

для  $\phi = \{n - p + 1, \dots, n$  и любого  $\alpha \in \mathcal{Q}_{p,n}$ .

- 3) Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

обладает свойством  $O$ . Используйте рекуррентный метод из параграфа 2.6 для поиска ее собственных значений  $(\lambda_i)_4^4$ , индексированных так, что  $0 < \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ , и ее собственных векторов. [Заметим: собственные векторы могут быть записаны явно в терминах  $x = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  и  $x = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .] Выберите знаки собственных векторов так, что они удовлетворяют следствию 6.10.4. Сделайте другой выбор так, чтобы выполнялось упр. 6.10.2.

- 4) Если  $\mathbf{u}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A} \in M_n$  и  $\mathbf{T}$  является матрицей переворота из уравнения (4.3.8), то  $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$  является собственным вектором  $\mathbf{B} = \mathbf{TAT}$ , отвечающим тому же собственному значению  $\lambda$ . Используйте этот результат и упр. 6.10.2 для доказательства того, что если  $B$  — осцилляторная матрица, то  $V(p, p-1, \dots, 1; \alpha_1, \dots, \alpha_p) > 0$ .

## 6.11. Анализ $\mathbf{u}$ -линий

Напомним понятие  $\mathbf{u}$ -линии, отвечающей вектору  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , из параграфа 3.3: это ломаная линия, составленная из отрезков, соединяющих точки с координатами  $(x, y) = (i, u_i)$  таким образом, что

$$u(x) = (i+1-x)u_i + (x-i)u_{i+1}, \quad i \leq x \leq i+1.$$

**Теорема 6.11.1.** Пусть  $\mathbf{u}_k$  является собственным вектором, отвечающим собственному значению  $\lambda_k$  осцилляторной матрицы  $\mathbf{A}$ . Соответствующая  $\mathbf{u}_k$ -линия,  $\mathbf{u}^{(k)}(x)$  не имеет отрезков на оси  $x$  и имеет только  $k-1$  узел, т. е. простой ноль, где  $\mathbf{u}^{(k)}(x)$  меняет знак.

**Доказательство.** Отрезок  $\mathbf{u}$ -линии может лежать на оси  $x$  только в том случае, когда два последовательных  $u_i$  являются нулевыми, однако это исключается следствием из теоремы 6.10.2. Так как  $S_{\mathbf{u}} = k-1$ ,  $\mathbf{u}$ -линия имеет только  $k-1$  узел. ■

**Следствие 6.11.1.** Если  $\alpha, \beta$  являются последовательными нулями  $\mathbf{u}_k$ -линии, то  $|\alpha - \beta| > 1$ .

**Теорема 6.11.2.**  $\mathbf{u}$ -линии, соответствующие двум последовательным собственным векторам осцилляторной матрицы, не могут иметь общего узла.



**Доказательство.** Предположим, что  $u^{(k)}(\alpha) = 0 = u^{(k+1)}(\alpha)$ , и рассмотрим

$$u(x) = cu^{(k)}(x) - u^{(k+1)}(x).$$

Теорема 6.10.2 показывает, что

$$k - 1 \leq S_{\mathbf{u}}^- \leq S_{\mathbf{u}}^+ \leq k. \quad (6.11.1)$$

Следствие из теоремы 6.11.1 гарантирует, что  $u^{(k)}(x)$  и  $u^{(k+1)}(x)$  не обращаются в ноль на промежутке  $(\alpha, \alpha + 1]$ . Выберем  $\gamma$  так, что  $\alpha < \gamma \leq \alpha + 1$ , и возьмем  $c = u^{(k+1)}(\gamma)/u^{(k)}(\gamma)$ . Тогда  $u(x)$  будет иметь два нуля,  $\alpha, \gamma$ , таких, что  $\alpha < \gamma \leq \alpha + 1$ , следовательно, существует отрезок  $\mathbf{u}$ -линии для  $u(x)$ , лежащий на оси  $x$ , откуда следует, что два последовательных значения  $u_i$  должны обнулиться. Согласно упр. 6.9.1 это означает, что  $S_{\mathbf{u}}^+ - S_{\mathbf{u}}^- \geq 2$ , что противоречит (6.11.1). ■

**Теорема 6.11.3.** Узлы  $\mathbf{u}$ -линий, отвечающих двум последовательным собственным векторам  $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$  осцилляторных матриц, чередуются.

**Доказательство.** Предположим, что  $\alpha, \beta$  являются двумя последовательными узлами  $\mathbf{u}_{k+1}$ -линии, тогда  $u^{(k+1)}(\alpha) = 0 = u^{(k+1)}(\beta)$  и  $\beta - \alpha > 1$ . Предположим, что  $\mathbf{u}_k$ -линия не имеет узла в интервале  $(\alpha, \beta)$ . Без ограничения общности мы можем предполагать, что

$$u^{(k)}(x) > 0 \text{ в } [\alpha, \beta], \quad u^{(k+1)}(x) > 0 \text{ в } (\alpha, \beta).$$

Рассмотрим

$$u(x) = cu^{(k)}(x) - u^{(k+1)}(x),$$

тогда

$$k - 1 \leq S_{\mathbf{u}}^- \leq S_{\mathbf{u}}^+ \leq k. \quad (6.11.2)$$

Для достаточно большого  $c$  справедливо  $u(x) > 0$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Уменьшим  $c$  до значения  $c_0$ , при котором  $u(x)$  впервые обнуляется, по крайней мере один раз, в точке  $\gamma$  из  $[\alpha, \beta]$ . Очевидно,  $c_0 > 0$  и

$$u_0(x) = c_0 u^{(k)}(x) - u^{(k+1)}(x)$$

не обнуляется в точках  $\alpha$  или  $\beta$ , откуда  $\alpha < \gamma < \beta$ . Следовательно,  $u_0(x) \geq 0$  на  $[\alpha, \beta]$  и  $u_0(\gamma) = 0$ . Ломаная  $u_0(x)$  не может иметь целого отрезка на оси  $x$ , иначе, как в теореме 6.11.2, она будет обнуляться на двух последовательных  $u_0(i)$ , откуда  $S_{\mathbf{u}_0}^+ - S_{\mathbf{u}_0}^- \geq 2$ , что противоречит

(6.11.2). Так как  $u_0(\gamma) = 0$  и  $u_0(x)$  является положительным с обеих сторон от  $\gamma$ ,  $\gamma$  должна являться точкой излома  $u_0(x)$ -линии, например,  $i$ -й, значит

$$u_0(i-1) > 0, u_0(i) = 0, u_0(i+1) > 0,$$

откуда снова  $S_{\mathbf{u}_0}^+ - S_{\mathbf{u}_0}^- \geq 2$ , что противоречит (6.11.2). Получаем, что между любыми двумя узлами  $u^{(k+1)}(x)$  существует по крайней мере один узел  $u^{(k)}(x)$ . Однако  $u^{(k)}(x)$  имеет только  $k-1$  узлов, тогда как  $u^{(k+1)}(x)$  имеет  $k$  узлов. Следовательно,  $u^{(k)}(x)$  имеет *не более чем* один узел между двумя узлами  $u^{(k+1)}(x)$ , т. е. в точности один узел; таким образом, два множества узлов перемежаются. ■

---

---

## ГЛАВА 7

# Изоспектральные системы

Мы видим вещи не только с разных сторон, но и разными глазами;  
мы не желаем видеть их схожими.

Блез Паскаль. *Мысли*, 124.

### 7.1. Введение

Две системы называются *изоспектральными*, если у них одинаковые собственные значения. (Некоторые авторы называют такие системы ко-спектральными.) В нашем контексте такие «системы» характеризуются посредством *симметричных* матриц  $\mathbf{A} \in S_n$ , или, возможно, посредством пары симметрических матриц  $\mathbf{M}, \mathbf{K} \in S_n$ . В обозначениях параграфа 4.3 две матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S_n$  называются изоспектральными, если

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}). \quad (7.1.1)$$

Две системы  $(\mathbf{M}, \mathbf{K})$  и  $(\mathbf{M}', \mathbf{K}')$  называются изоспектральными, если

$$\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{K}) = \sigma(\mathbf{M}', \mathbf{K}'). \quad (7.1.2)$$

Напомним, что если  $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$  являются положительно определенными, то задача сводится к (7.1.1).

В параграфе 5.2, обсуждая матричные преобразования, мы установили, что если  $\mathbf{Q}$  является ортогональной матрицей, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (7.1.3)$$

и если

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \quad (7.1.4)$$

то  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  являются изоспектральными. Обратное также верно: если  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B} \in S_n$  являются изоспектральными, то они удовлетворяют (7.1.4)

для некоторой матрицы  $\mathbf{Q}$ . Для доказательства последнего можно воспользоваться общим представлением симметричной матрицы из следствия к теореме 6.3.2. Предположим, что  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S_n$  имеют одинаковые собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$ . Рассмотрим  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , тогда

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^T \text{ и } \mathbf{B} = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^T,$$

где обе матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  являются ортогональными. Следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \mathbf{V}^T.$$

Однако так как  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  — ортогональные матрицы, то и матрица  $\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T$  является ортогональной (упр. 5.2.2). Следовательно,  $\mathbf{B} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T$ . Напомним, см. упр. 5.2.2, что это преобразование задает класс эквивалентности, называемый *изоспектральным семейством* матриц.

Последнее означает, что с математической точки зрения задача характеристики изоспектральных систем, определяемых одной матрицей, решена: матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  связаны посредством ортогональной матрицы  $\mathbf{Q}$ . Однако для приложений к теории колебательных систем этого результата недостаточно. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть колебательные системы *специального вида*, например, системы, описанные в параграфе 5.1. Легко проверить, что если матрица  $\mathbf{A}$  имеет некоторый специальный вид, т. е. отвечает некоторому графу  $\mathcal{G}$ , а  $\mathbf{Q}$  — произвольная ортогональная матрица, то  $\mathbf{B}$  не обязательно имеет тот же вид, т. е. связана с тем же графом  $\mathcal{G}$ . На практике условия на матрицу системы являются даже более строгими; и возникают условия на *знаки* элементов матрицы.

В настоящей главе будет исследоваться следующий вопрос: пусть задана система с матрицей  $\mathbf{A}$  или  $(\mathbf{M}, \mathbf{K})$ , при этом матрицы имеют один и тот же вид, заданный посредством графа  $\mathcal{G}$ , возможно, вместе с условиями на знаки, как найти другие системы  $\mathbf{B}$  или  $(\mathbf{M}', \mathbf{K}')$ , удовлетворяющие тем же условиям? При этом мы не ищем любое изоспектральное семейство, а нас интересует некоторое специальное изоспектральное семейство (т. е. подсемейство), чьи элементы обладают рядом общих характеристик. Результаты, полученные до сих пор, относились к достаточно простым системам. Мы начинаем наш поиск с рассмотрения понятия изоспектрального потока.

## 7.2. Изоспектральный поток

Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  имеет собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  и собственные векторы  $(\mathbf{u}_i)_1^n$ , тогда уравнение (6.3.8) утверждает, что если  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$  и  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , то

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}. \quad (7.2.1)$$

Предположим, что  $\mathbf{U}$  зависит от некоторого параметра  $t$ , и  $\mathbf{U}(t)$ , а значит и  $\mathbf{A}(t)$  меняются таким образом, что собственные значения, а значит и  $\Lambda$  инвариантны. Будем использовать символ  $\dot{\phantom{x}}$  для обозначения  $d/dt$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \mathbf{U} \wedge \dot{\mathbf{U}}^T + \dot{\mathbf{U}} \wedge \mathbf{U}^T \\ &= (\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}^T) + (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}^T). \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Дифференцируя второе уравнение в (7.2.1), получаем

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^T + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}^T = \mathbf{0}.$$

Записывая

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}^T, \quad (7.2.3)$$

получим

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^T = -\mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (7.2.4)$$

Перепишем уравнение (7.2.2) в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{A}. \quad (7.2.5)$$

Это дифференциальное уравнение определяет изоспектральный поток. Из уравнения (7.2.4) видно, что матрица  $\mathbf{S}$  является *кососимметричной*. Заметим также, что дифференциальное уравнение, задающее  $\mathbf{U}$ , имеет вид

$$\dot{\mathbf{U}} = -\mathbf{S}\mathbf{U},$$

а так как матрица  $\mathbf{S}$  является кососимметричной и матрица  $\mathbf{A}$  является симметричной, то матрица  $\dot{\mathbf{A}}$ , задаваемая уравнением (7.2.5), является симметричной.

Применим эти рассуждения в обратной последовательности. Пусть  $\mathbf{S}(t)$  является кососимметричной матрицей и  $\mathbf{U}(t)$  — решение уравнения

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = -\mathbf{S}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0,$$

где матрица  $U_0$  является ортогональной, тогда

$$(U^T U)^\bullet = \dot{U}^T U + U^T \dot{U} = U^T S U - U^T S U = 0.$$

Так как  $U_0^T U_0 = I$ ,  $U^T(t)U(t) = I$  для всех  $t$ ;  $U(t)$  является ортогональной.

Для этих  $S(t)$  и  $U(t)$  рассмотрим уравнение

$$\dot{A}(t) = A(t)S(t) - S(t)A(t), \quad A(0) = A_0,$$

где  $A_0 = U_0 \wedge U_0^T$ . Получаем

$$\begin{aligned} (U^T A U)^\bullet &= \dot{U}^T A U + U^T \dot{A} U + U^T A \dot{U} \\ &= U^T S A U + U^T (A S - S A) U - U^T A S U = 0, \end{aligned}$$

значит

$$U^T A U = U_0^T A_0 U_0 = \wedge.$$

Уравнение (7.2.5) дает возможность строить одномерное семейство, т. е. траекторию, изоспектральных систем, и мы покажем позже, как оно применяется. Сейчас мы обсудим связи между уравнением (7.2.5) и разложимостью матриц.

Одним из важнейших алгоритмов численных методов линейной алгебры является метод Грамма–Шмидта: пусть дано множество векторов  $(\mathbf{a}_i)_1^n \in V_n$ . Построим множество ортонормированных векторов  $(\mathbf{q}_i)_1^n \in V_n$ , используя линейные комбинации векторов  $\mathbf{a}_i$ . Метод Грамма–Шмидта позволяет строить факторизационные разложения невырожденных матриц  $A \in M_n$ . Так как матрица  $A$  является невырожденной, ее столбцы являются линейно независимыми, а значит, порождают пространство  $V_n$ . Метод Грамма–Шмидта позволяет получить  $n$  ортонормированных векторов  $(\mathbf{q}_i)_1^n$ , порождающих  $V_n$ . Записывая выражение векторов  $\mathbf{a}_i$  в виде линейных комбинаций векторов  $\mathbf{q}_i$ , мы получим требуемое разложение. Пусть

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n],$$

тогда найдем векторы  $(\mathbf{q}_i)_1^n$  такие, что

$$\mathbf{a}_m = \sum_{k=1}^m r_{km} \mathbf{q}_k, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

откуда получаем

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \quad (7.2.6)$$

$\mathbf{q}_i$  и  $r$  находятся из теоремы 3.2.1:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a}_1\|, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1/r_{11}, \\ r_{12} &= \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2, \quad r_{22} = \|\mathbf{a}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1\|, \quad \mathbf{q}_2 = (\mathbf{a}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1)/r_{22}, \end{aligned}$$

и т. д. Заметим, что диагональные коэффициенты  $r_{ii}$  *положительны*.

Один из основных результатов, относящихся к  $\mathbf{QR}$ -разложению, состоит в следующем:

$$\text{Пусть } \mathbf{A} = \mathbf{QR}, \text{ тогда } \mathbf{A}' \equiv \mathbf{RQ} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{QR})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}, \quad (7.2.7)$$

последнее означает, что матрица  $\mathbf{A}'$ , полученная перестановкой множителей  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ , изоспектральна матрице  $\mathbf{A}$ . Один из вариантов применения  $\mathbf{QR}$ -алгоритма в численной линейной алгебре состоит в построении последовательности матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'', \dots$  последовательной перестановкой множителей:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{RQ} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}', \quad \mathbf{A}'' = \mathbf{R}'\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}''\mathbf{R}'', \dots \quad (7.2.8)$$

При ряде ограничений эта последовательность сходится к некоторой верхнетреугольной матрице, или в случае когда  $\mathbf{A}$  является симметричной матрицей, к диагональной матрице, образованной собственными значениями. В дальнейшем мы будем использовать формулу (7.2.7) и последовательность (7.2.8), однако нас не будут интересовать свойства сходимости этой последовательности, которые могут быть найдены в книге [135].

Покажем, что для некоторого специального выбора кососимметричной матрицы  $\mathbf{S}$  последовательность (7.2.8) может быть связана с изоспектральным потоком. Для того чтобы это установить, нам потребуется повторить ранее проделанные рассуждения.

Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$ , а  $\mathbf{A}^+$  является ее *наддиагональной подматрицей*, т. е.

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad (7.2.9)$$

тогда матрица  $\mathbf{A}$  может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^{+T} + \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \\ &= \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+ + 2\mathbf{A}^+ + \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \\ &= \mathbf{S} + \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

где  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$  является кососимметрической матрицей и  $\mathbf{R} = 2\mathbf{A}^+ + \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  является верхнетреугольной матрицей. Заметим, что любая симметричная матрица однозначно раскладывается в сумму кососимметричной матрицы и верхнетреугольной матрицы.

Повторим ранее проделанные шаги:

**Лемма 7.2.1.** Пусть  $\mathbf{S}$  — кососимметричная матрица и  $\mathbf{Q}$  — решение задачи

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{S}, \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}, \quad (7.2.11)$$

тогда матрица  $\mathbf{Q}$  является ортогональной.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^\bullet &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{S}^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T)\mathbf{Q}^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Так как  $\mathbf{Q}(0)\mathbf{Q}^T(0) = \mathbf{I}$ , получаем  $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ . ■

**Лемма 7.2.2.** Пусть  $\mathbf{A}(t)$  является решением задачи

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{A} \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad (7.2.12)$$

тогда  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{A}_0\mathbf{Q}(t)$ , где матрица  $\mathbf{Q}(t)$  такая же, как и в лемме 7.2.1.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}^T(t)$ , тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{A}\dot{\mathbf{Q}}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{S}^T\mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T)\mathbf{Q}^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$



Откуда получаем, что:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(0) = \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0,$$

значит,  $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \mathbf{A}_0$ , т. е.  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_0\mathbf{Q}$ . ■

Ортогональная матрица  $\mathbf{Q}$  была введена как решение дифференциального уравнения (7.2.11)'. Покажем теперь, что она может быть задана при помощи  $\mathbf{QR}$  разложения:

**Лемма 7.2.3.** Если матрица  $\exp(t\mathbf{A}_0)$  обладает  $\mathbf{QR}$ -разложением

$$\exp(t\mathbf{A}_0) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t), \quad (7.2.13)$$

то  $\mathbf{Q}(t)$  удовлетворяет уравнению (7.2.11) и  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{A}_0\mathbf{Q}(t)$  является решением (7.2.12).

**Доказательство.** Здесь

$$\exp(t\mathbf{A}_0) = \mathbf{I} + t\mathbf{A}_0 + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}_0^2 + \dots \quad (7.2.14)$$

является решением уравнения

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (7.2.13), получаем

$$(\mathbf{QR})^\bullet = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{R} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A}_0 \exp(t\mathbf{A}_0) = \mathbf{A}_0\mathbf{QR}$$

откуда

$$\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{A}_0\mathbf{Q}$$

и

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_0\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{A}}(t). \quad (7.2.15)$$

Однако  $\hat{\mathbf{A}}(t)$  является симметричной матрицей;  $\mathbf{Q}$  — ортогональной, т. е.  $\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$  — кососимметричная и  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}$  — верхнетреугольная. Уравнение (7.2.15) дает нам единственное представление для  $\hat{\mathbf{A}}$  в виде суммы симметричной и верхнетреугольной матриц, т. е.:

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{A}}^{+T} - \hat{\mathbf{A}}^+ = \hat{\mathbf{S}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} \\ &= (\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q})(\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}) + (\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q})(\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}) \\ &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

и  $\hat{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{A}_0$ . Последнее означает, что  $\hat{\mathbf{A}}$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и  $\mathbf{A}$ , и имеет то же начальное значение,  $\mathbf{A}_0$ ;  $\hat{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}$ . ■

Теперь мы можем утверждать следующее:

**Теорема 7.2.1.** Пусть  $\mathbf{A}(t)$  — решение дифференциального уравнения (7.2.12). Для  $k = 1, 2, \dots$  предположим, что

$$\exp(\mathbf{A}(k-1)) = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k,$$

тогда

$$\exp(\mathbf{A}(k)) = \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k,$$

где  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}(k)$ ,  $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}(k)$ .

**Доказательство.** Из лемм 7.2.2 и 7.2.3 получаем

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}(t)$$

и

$$\exp(t\mathbf{A}(0)) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t), \quad (7.2.16)$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t)\mathbf{Q}(t) &= \mathbf{Q}^T(t)(\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t))\mathbf{Q}(t) \\ &= \mathbf{Q}^T(t) \exp(t\mathbf{A}_0)\mathbf{Q}(t).\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\exp(t\mathbf{A}(t)) &= \exp(\mathbf{Q}^T(t)t\mathbf{A}_0\mathbf{Q}(t)) \quad (7.2.17) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{Q}^T t\mathbf{A}_0 \mathbf{Q} + \frac{(\mathbf{Q}^T t\mathbf{A}_0 \mathbf{Q})^2}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{Q}^T t\mathbf{A}_0 \mathbf{Q} + \frac{(\mathbf{Q}^T t\mathbf{A}_0 \mathbf{Q})(\mathbf{Q}^T t\mathbf{A}_0 \mathbf{Q})}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{Q}^T \left( \mathbf{I} + t\mathbf{A}_0 + \frac{t^2 \mathbf{A}_0^2}{2!} + \dots \right) \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{Q}^T \exp(t\mathbf{A}_0) \mathbf{Q} = \mathbf{R}(t)\mathbf{Q}(t).\end{aligned}$$

Последнее означает, что для  $t = 1$  в (7.2.16) справедливо

$$\exp(\mathbf{A}(0)) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1,$$

рассматривая  $t = 1$  в (7.2.17), получаем:

$$\exp \mathbf{A}(1) = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2$$

и т. д. ■

Таким образом, решение уравнения (7.2.12) в целочисленные моменты времени  $0, 1, 2, \dots$  дает члены  $\mathbf{QR}$ -последовательности (7.2.8), начиная с  $\exp(\mathbf{A}(0)) = \exp \mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$ .

Закончим этот параграф рядом исторических замечаний о развитии теории изоспектрального потока.

Это исследование началось с рассмотрения так называемых *решеток Тоды* [324] (1970),  $n$  частиц вынуждены двигаться вдоль прямой под действием экспоненциальной отталкивающей силы. Симе (Symes) в работах [315] (1980) и [316] (1982) дает ссылки на физические истоки этой задачи и обосновывает соответствующую теорию, в основном как это сделано выше, для частного случая, встречающегося при изучении решеток Тода, а именно когда  $\mathbf{A}$  — матрица Якоби. Изучение матриц Якоби развивалось далее в работах Нанда (Nanda) [245] (1982), [246] (1985) и Дейфта, Нанда, Томея (Deift, Nanda, Tomei) [77] (1983). Обобщение этой теории на произвольные комплексные несимметрические матрицы было осуществлено в работах Чу (Chu) [57] (1984). Уаткинс (Watkins) [331] (1984) приводит обзор общей теории и ее обобщения на другие матричные разложения, такие как  $\mathbf{LR}$  (нижнетреугольная матрица  $\mathbf{L}$ , умноженная на верхнетреугольную матрицу  $\mathbf{R}$ ) или разложение Холецкого  $\mathbf{LL}^T$ . Чу и Норрис (Chu, Norris) в работе [60] (1988) изучают связь между изоспектральными потоками и абстрактными матричными разложениями.

Большинство этих исследований посвящено связи между изоспектральными потоками и методами, используемыми в вычислительной линейной алгебре; последнее находится за пределами наших интересов в данной монографии. В свою очередь, изоспектральные потоки нам интересны как средство построения изоспектральных систем, как мы покажем в последующих параграфах этой главы.

Мы будем исследовать изоспектральные потоки в параграфе 7.6 после рассмотрения алгебраических методов получения изоспектральных систем.

### 7.3. Изоспектральные якобиевы системы

Будем следовать работе Гэдвелла [121] (1995) и начнем наше обсуждение с рассмотрения частного случая пружинно-массовой системы, показанной на рисунке 4.4.2 а, а также на рисунке 7.3.1.

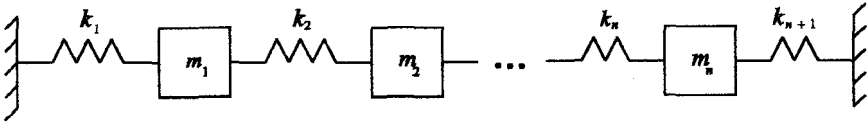


Рис. 7.3.1. Прямолинейная пружинно-массовая система

Определяющим уравнением является:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{y} = 0, \quad (7.3.1)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -k_n & k_n + k_{n+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.3.2)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n). \quad (7.3.3)$$

Мы будем предполагать, что цепочка масс и пружин не имеет разломов, откуда

$$(k_i)_2^n > 0, \quad (m_i)_1^n > 0.$$

Возможны три частных случая:

(S) поддерживаемый (supported);  $k_1 > 0, k_{n+1} > 0$ ;

(C) консольный (cantilever);  $k_1 > 0, k_{n+1} = 0$ ;

(F) свободный (free);  $k_1 = 0, k_{n+1} = 0$ .

Если две системы, 1 и 2, являются изоспектральными, то в обозначениях параграфа 4.3:

$$\sigma(\mathbf{M}_1, \mathbf{K}_1) = \sigma(\mathbf{M}_2, \mathbf{K}_2). \quad (7.3.4)$$

Существуют два практически тривиальных способа получения изоспектральных пар. Во-первых, если  $c > 0$ , то

$$\sigma(c\mathbf{M}, c\mathbf{K}) = \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{K}).$$

Во-вторых, если мы физически повернем систему вокруг себя и перенумеруем массы и пружины слева направо, то мы не изменим собственные значения. Перенумерация эквивалентна умножению слева и справа на матрицу  $\mathbf{T}$  из уравнения (4.3.8). Следовательно, (7.3.4) справедливо, если

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{T}\mathbf{M}_1\mathbf{T}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{T}\mathbf{K}_1\mathbf{T}. \quad (7.3.5)$$

Для получения нетривиальных изоспектральных пар мы редуцируем (7.3.1) к стандартному виду. Запишем

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}, \quad (7.3.6)$$

откуда

$$(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0. \quad (7.3.7)$$

Сперва рассмотрим консольную систему. Как и в (4.4.7), матрица  $\mathbf{K}$  разлагается следующим образом:

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T, \quad \widehat{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

и

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}. \quad (7.3.8)$$

Для получения изоспектральной пары нам потребуется:

**Лемма 7.3.1.** Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ , тогда  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{BA}$  имеют одинаковые собственные значения, возможно, за исключением нулевого.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \neq 0$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{AB}$ , тогда для некоторого  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{ABx} = \lambda\mathbf{x}$ . Так как  $\lambda \neq 0$  и  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , получим  $\mathbf{Bx} \neq \mathbf{0}$ . Имеем  $\mathbf{B}(\mathbf{ABx}) = \mathbf{BA}(\mathbf{Bx}) = \lambda\mathbf{Bx}$ , откуда  $\mathbf{Bx}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{BA}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ . Нами доказано, что любое ненулевое собственное значение матрицы  $\mathbf{AB}$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{BA}$ . Замена матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в этом рассуждении завершает доказательство. ■

Запишем  $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^2$ , тогда

$$\mathbf{J} = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{F})(\mathbf{F}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}). \quad (7.3.9)$$

Применим лемму: собственные значения матрицы  $\mathbf{J}$  являются ненулевыми (более того, положительными), поэтому если

$$\mathbf{J}' = (\mathbf{F}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{F}), \quad (7.3.10)$$

то

$$\sigma(\mathbf{J}') = \sigma(\mathbf{J}).$$

Для получения пружинно-массовой системы, отвечающей  $\mathbf{J}'$ , мы обратим редукцию к стандартному виду и запишем:

$$(\mathbf{J}' - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

как

$$(\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} - \lambda \widehat{\mathbf{K}}^{-1})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{u}. \quad (7.3.11)$$

Это уравнение на собственные числа перевернутой консольной системы. Установим это, заметив, что

$$\mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{T} = \mathbf{E}^T, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{I}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}\mathbf{v} &= \mathbf{T}\mathbf{E}^T \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}^0 \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{T}\mathbf{v}, \end{aligned}$$

поэтому уравнение (7.3.11) может быть переписано в виде

$$(\mathbf{K}^0 - \lambda \mathbf{M}^0)\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}^0 \mathbf{E}^T, \quad \widehat{\mathbf{K}}^0 = \mathbf{T}\mathbf{M}^{-1} \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}^0 = \mathbf{T}\widehat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{T}.$$

Эта система относится к консоли с условиями

$$k_i^0 = m_{n-i+1}^{-1}, \quad m_i^0 = k_{n-i+1}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$\sigma(\mathbf{M}^0, \mathbf{K}^0) = \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{K}).$$

Эта пара была найдена Рамом и Элхаем (Ram, Elhay) [285] (1995a), см. также их работу [287] (1998).

В описанных выше рассуждениях мы стартовали с системы, заданной посредством матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  и образованной якобиевой матрицей  $\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D}^{-1}$ . Указанный переход от пружинно-массовой системы к матрице Якоби однозначен, однако, как будет показано ниже, по заданной матрице Якоби можно построить бесконечное семейство пружинно-массовых систем.

Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  из формулы (7.3.2) обладает свойством

$$\mathbf{K}\{1, 1, 1, \dots, 1\} = \{k_1, 0, \dots, 0, k_{n+1}\}; \quad (7.3.12)$$

это уравнение показывает, что, для того чтобы статично отодвинуть все массы вправо посредством единичного смещения, мы должны применить силы  $k_1$  и  $k_{n+1}$  к массам  $m_1$  и  $m_n$  соответственно. Повторяя рассуждения из параграфа 4.4, получаем, так как  $\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$ , что  $\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}$ , откуда уравнение (7.3.12) дает

$$\mathbf{J}\{d_1, d_2, \dots, d_n\} = \{k_1 d_1^{-1}, 0, \dots, k_{n+1} d_n^{-1}\}.$$

Следовательно, для нахождения пружинно-массовой системы мы должны рассмотреть матрицу  $\mathbf{J}$  и найти решение уравнения

$$\mathbf{J}\mathbf{d} = \{\alpha, 0, \dots, 0, \beta\} \quad \mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad (7.3.13)$$

где  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ . Если матрица  $\mathbf{J}$  является невырожденной, то по теореме 4.4.1 получаем, что  $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ . Значит, для построения пружинно-массовой системы достаточно выбрать произвольные неотрицательные константы  $\alpha, \beta$ , хотя бы одна из которых отлична от нуля. Последнее эквивалентно выбору произвольных коэффициентов жесткости пружин  $k_1$  и  $k_{n+1}$ , для которых, решая уравнение (7.3.13), мы находим

$$k_1 = d_1 \alpha, \quad k_{n+1} = d_n \beta. \quad (7.3.14)$$

Нами получено двухпараметрическое семейство изоспектральных систем. Если мы потребуем, чтобы построенная система являлась консольной, т. е.  $\beta = 0 = k_{n+1}$ , то решение является, по существу, единственным; оно может быть сделано единственным при помощи дополнительного ограничения  $m_1 = 1$  или  $\sum_{i=1}^n m_i = 1$ .

Если  $\mathbf{J}$  является вырожденной, то применим теорему 4.4.2, которая утверждает существование положительного решения для уравнения

$$\mathbf{J}\mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (7.3.15)$$

Тогда построим  $\mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^2$ ; эта система, по существу, опять является единственной.

Обсудим теперь два различных способа построения семейств изоспектральных матриц. Пусть  $\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  обозначает множество якобиевых матриц  $\mathbf{J}$  таких, что  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$ . Первое следует напрямую из рассуждений параграфа 4.3: мы можем построить  $\mathbf{J}$  единственным

образом по данным  $\sigma(\mathbf{J}) = (\lambda_i)_1^n$  и вектору  $\mathbf{x}_1$  первых компонент ортонормированных собственных векторов  $\mathbf{u}_i$  матрицы  $\mathbf{J}$ . Нам известно, что эти первые компоненты  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$  все являются ненулевыми, т. е. мы можем выбрать их положительными и удовлетворяющими уравнению

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 = 1 = x_{11}^2 + x_{21}^2 + \dots + x_{n1}^2. \quad (7.3.16)$$

Последнее означает, что любая матрица  $\mathbf{J} \in \mathcal{M}$  может быть ассоциирована с точкой  $P = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$  (строго) положительного ортанта единичной  $n$ -сферы. (Более точно,  $\mathcal{M}$  является гладким  $(n-1)$ -мерным многообразием диффеоморфным строго положительному ортанту единичной  $n$ -сферы.)

Второй способ использует **QR**-разложение, см. параграф 7.2. Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  и  $\mu$  не является собственным значением  $\mathbf{A}$ . Тогда  $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$  является невырожденной матрицей, и значит может быть разложено:

$$\mathbf{A} - \mu\mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{R}. \quad (7.3.17)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  является ортогональной матрицей и  $\mathbf{R}$  является верхнетреугольной матрицей с *положительными* диагональными коэффициентами  $r_{ii}$ ; это разложение (7.3.17) является единственным. Теперь рассмотрим матрицу  $\mathbf{A}'$  из уравнения

$$\mathbf{A}' - \mu\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{Q}. \quad (7.3.18)$$

Уравнения (7.3.17), (7.3.18) определяют преобразования  $\mathcal{G}_\mu : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ .

Матрица  $\mathbf{A}'$  является симметрической и изоспектральна  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}' = \mu\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T(\mu\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{R})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}. \quad (7.3.19)$$

**Теорема 7.3.1.** *Если  $\mathbf{A}$  является матрицей Якоби, то матрица  $\mathbf{A}'$  является матрицей Якоби.*

**Доказательство.** Покажем сначала, что если  $\mathbf{A}$  является трехдиагональной матрицей, то и  $\mathbf{A}'$  является трехдиагональной матрицей.

Из уравнений (7.3.17), (7.3.18) получаем

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{R}(\mu\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{R}) = (\mu\mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{Q})\mathbf{R} = \mathbf{A}'\mathbf{R}. \quad (7.3.20)$$

Это соотношение между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$  является фундаментальным и зачастую более полезным, чем (7.3.17), (7.3.18) или (7.3.19). Рассмотрим  $i, j$ -тый коэффициент с каждой стороны (7.3.20) и возьмем  $i \geq j$ :

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a'_{ik} r_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad i = j, j+1, \dots, n. \quad (7.3.21)$$



Так как  $\mathbf{R}$  является верхнетреугольной,  $r_{ik}$  является ненулевым только при  $k = i, i + 1, \dots, n$ . Так как  $\mathbf{A}$  является трехдиагональной матрицей,  $a_{kj}$  отличен от нуля только при  $k = j - 1, j, j + 1$ . Следовательно, произведение в левой части равенства является ненулевым только при  $k$ , пробегающем значения от  $i$  до  $j + 1$ ; оно тождественно равно нулю, если  $i \geq j + 2$ . Так как  $\mathbf{R}$  является верхнетреугольной матрицей, то в правой части равенства индекс  $k$  пробегает значения  $k = 1, 2, \dots, j$ . Следовательно,

$$\sum_{k=i}^{j+1} r_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^j a'_{ik} r_{kj}. \quad (7.3.22)$$

Значит, в частности,

$$\sum_{k=1}^j a'_{ik} r_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - 2; \quad i = j + 2, \dots, n. \quad (7.3.23)$$

Рассматривая  $j = 1$ , получаем  $a'_{i1} r_{11} = 0$  и, так как  $r_{11} > 0$ ,

$$a'_{i1} = 0, \quad i = 3, \dots, n.$$

Рассматривая  $j = 2$ , получаем:

$$a'_{i1} r_{12} + a'_{i2} r_{22} = 0, \quad i = 4, \dots, n.$$

Однако  $a'_{i1} = 0$  при этих значениях и  $r_{22} > 0$ , значит

$$a'_{i2} = 0, \quad i = 4, \dots, n.$$

Продолжая эти рассуждения, получим

$$a'_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - 2; \quad i = j + 2, \dots, n. \quad (7.3.24)$$

Следовательно,  $\mathbf{A}'$  имеет только одну ненулевую диагональ ниже главной диагонали. Однако  $\mathbf{A}'$  является симметрической матрицей, следовательно, она — трехдиагональная.

Чтобы доказать, что якобиевость матрицы  $\mathbf{A}$  влечет якобиевость матрицы  $\mathbf{A}'$ , вернемся к уравнению (7.3.22). Так как матрица  $\mathbf{A}'$  является трехдиагональной, равенство (7.3.22) можно переписать в виде

$$\sum_{k=i}^{j+1} r_{ik} a_{kj} = \sum_{k=i-1}^j a'_{ik} r_{kj}. \quad (7.3.25)$$

Рассмотрим  $i = j+1$ , тогда каждая из сумм имеет только одно слагаемое:

$$r_{ii}a_{i,i-1} = a'_{i,i-1}r_{i-1,i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (7.3.26)$$

если  $a_{i,i-1}$  является положительным (отрицательным), то и  $a'_{i,i-1}$  обладает этим свойством. ■

Пусть  $\mathbf{A} = \mathbf{J}$  является матрицей Якоби. Докажем следующую теорему:

**Теорема 7.3.2.** Действие операторов  $\mathcal{G}_\mu$  на матрицах Якоби является коммутативным:

$$\mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_\nu \mathbf{J} = \mathcal{G}_\nu \mathcal{G}_\mu \mathbf{J}. \quad (7.3.27)$$

**Доказательство.** Рассмотрим соотношение между собственными векторами матриц  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}'$ . Пусть  $\mathbf{u}$  является отнормированным собственным вектором матрицы  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},$$

тогда

$$\mathbf{J}'\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{J}\mathbf{Q})\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T\mathbf{J}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{u},$$

откуда  $\mathbf{u}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{u}$  является отнормированным собственным вектором для  $\mathbf{J}'$ . Этот собственный вектор может быть записан другим способом. Так как

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = (\mathbf{Q}\mathbf{R} + \mu\mathbf{I})\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},$$

получаем

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{u} = (\lambda - \mu)\mathbf{u}$$

или

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{u}}{\lambda - \mu}. \quad (7.3.28)$$

Это уравнение показывает, что *последняя* координата собственного вектора  $\mathbf{u}'_i$  может иметь вид

$$u'_{ni} = \frac{r_{nn}(\mu)u_{ni}}{|\lambda_i - \mu|}. \quad (7.3.29)$$

Следовательно, при преобразовании  $\mathcal{G}_\mu$  последние компоненты собственных векторов домножаются на два множителя: один из которых,  $r_{nn}(\mu)$ ,

не зависит от  $i$ , а другой равняется  $|\lambda_i - \mu|^{-1}$ . Это означает, что последние компоненты отнормированных собственных векторов матриц из формулы (7.3.27) пропорциональны:

$$\frac{u_{ni}}{|\lambda_i - \mu| |\lambda_i - \nu|}. \quad (7.3.30)$$

Так как они пропорциональны и сумма квадратов элементов каждого множества равна единице, множества должны совпадать. Однако матрица Якоби однозначно определяется своими собственными значениями и последними компонентами ее отнормированных собственных векторов. Следовательно, равенство (7.3.27) справедливо и действие  $\mathcal{G}_\mu$  коммутативно. ■

Докажем более сильный результат в теореме 7.4.2.

**Теорема 7.3.3.** Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}$ , тогда можно найти единственное такое множество  $(\mu_i)_1^{n-1}$ , что  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{n-1}$  и

$$\mathcal{G}_{\mu_1} \mathcal{G}_{\mu_2} \dots \mathcal{G}_{\mu_{n-1}} \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (7.3.31)$$

**Доказательство.** Достаточно доказать, что мы можем перейти от некоторого множества последних координат  $(u_{ni})_1^n$  к любому другому такому множеству  $(v_{ni})_1^n$  посредством  $n-1$   $\mathcal{G}_\mu$ -преобразований. Уравнение (7.3.29) демонстрирует, что это эквивалентно выбору  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  таких, что

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{u_{ni}}{|\lambda_i - \mu_j|} \propto v_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это эквивалентно выбору многочлена

$$P(\lambda) = K \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \mu_j)$$

так, что

$$|P(\lambda_i)| = u_{ni}/v_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если мы рассмотрим такие  $(\mu_i)_1^{n-1}$ , что

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{n-1} < \lambda_n, \quad (7.3.32)$$

то

$$P(\lambda_i) = (-1)^{n-i} u_{ni}/v_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Однако такой полином  $P(\lambda)$  степени  $n - 1$ , принимающий значения противоположных знаков в  $n$  точках  $\lambda_i$ , определяется единственным образом и имеет  $n - 1$  корень  $\mu_i$ , все корни удовлетворяют соотношениям (7.3.32). ■

**Следствие 7.3.1.** Пусть  $\mathcal{G}_\mu \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , тогда существуют  $(\mu_i)_1^{n-1}$  такие, что  $\mathcal{G}_{\mu_1} \mathcal{G}_{\mu_2} \dots \mathcal{G}_{\mu_{n-1}} \mathbf{B} = \mathbf{A}$ , а значит, существуют  $\mathcal{G}_\mu^{-1}$ .

**Следствие 7.3.2.** Существуют такие  $(\mu_i)_1^{n-1}$ , что

$$\mathcal{G}_{\mu_1} \mathcal{G}_{\mu_2} \dots \mathcal{G}_{\mu_{n-1}} \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

### Упражнения 7.3

- 1) Рассмотрите случай (F), когда  $k_1 = 0 = k_{n+1}$ . Используйте лемму 7.3.1 для получения консоли, которая имеет те же собственные значения, что и первоначальная система, за исключением нулевого собственного значения, отвечающего случаю твердого тела.
- 2) Докажите методом математической индукции уравнение (7.3.24).

## 7.4. Изоспектральные осцилляционные системы

В параграфе 7.3 был рассмотрен оператор  $\mathcal{G}_\mu$ , определенный уравнениями (7.3.17) и (7.3.18). Нами было установлено, что если  $\mathbf{J}$  является трехдиагональной, то и  $\mathbf{J}'$  тоже является трехдиагональной; если  $a_{i+1,i} < 0$  ( $> 0$ ), то  $a'_{i+1,i} < 0$  ( $> 0$ ). Напомним, что согласно параграфу 6.6 положительно определенная (симметричная) трехдиагональная матрица с положительной кодиагональю является частным примером осцилляторной матрицы, см. начало параграфа 6.6 и характеристику из теоремы 6.7.3. Это означает, что если  $\mathbf{A}$  является симметричной трехдиагональной осцилляторной матрицей,  $\mu$  не является собственным значением  $\mathbf{A}$ , и диагональные элементы  $\mathbf{R}$  положительны, то операции

$$\mathbf{A} - \mu \mathbf{I} = \mathbf{QR}, \quad (7.4.1)$$

$$\mathbf{A}' - \mu \mathbf{I} = \mathbf{RQ} \quad (7.4.2)$$

дают новую матрицу  $\mathbf{A}'$ , которая является симметрической, трехдиагональной и осцилляторной. Следуя работе Глэдвелла [126], покажем, что этот факт является частным случаем общего результата:

**Теорема 7.4.1.** Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$ , через  $P$  обозначим одно из свойств NTN, O, TP, матрица  $\mathbf{A}'$  определяется уравнениями (7.4.1), (7.4.2). Тогда матрица  $\mathbf{A}'$  обладает свойством  $P$  в том и только том случае, если  $\mathbf{A}$  обладает свойством  $P$ .

Эта теорема утверждает, что  $\mathbf{A}'$  является NTN тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  обладает свойством NTN,  $\mathbf{A}'$  обладает свойством O тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  обладает свойством O, и  $\mathbf{A}'$  обладает свойством TP тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  является TP. В теореме подразумевается выполнение следующего условия: диагональные элементы  $\mathbf{R}$ , которые не равны нулю, так как  $\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}$  не вырождена, выбраны положительными.

Условие симметричности  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A} \in S_n$ ) и тот факт, что  $\mu$  не является собственным значением  $\mathbf{A}$ , существенны согласно следующим контрпримерам.

Рассмотрим  $\mu = 0$  и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (7.4.3)$$

тогда

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2a + 2 \\ 0 & 4 - a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 + 2a & 4a - 1 \\ 4 - a & 2(4 - a) \end{bmatrix}.$$

Если  $a = \frac{1}{5}$ , то  $\mathbf{A}$  обладает свойствами O и TP, а  $\mathbf{A}'$  не является даже TN; если  $a = 0$ , то  $\mathbf{A}$  обладает свойством NTN и  $\mathbf{A}'$  не обладает свойством TN.

Тот факт, что  $\mu$  не является собственным значением  $\mathbf{A}$ , существенен. Рассмотрим  $a = 1$ , тогда матрица  $\mathbf{A}$ , заданная формулой (7.4.3), обладает свойствами O и TP, а ее собственные значения  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$ . (Напомним, что при рассмотрении осцилляторных матриц собственные значения нумеруются в порядке убывания.) Рассмотрим  $\mu = 1$ , тогда

$$\mathbf{A} - \mu \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c & 2c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.4.4)$$

$$\mathbf{A}' - \mu \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2c & 2c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -c \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{A}'$ , определенная формулой (7.4.4), не является осцилляторной.

В общем случае, если  $\mathbf{A} \in S_n$  обладает свойством  $\mathbf{O}$ , то ее собственные значения различны (следствие к теореме 6.10.1). Последнее означает, что если  $\mu = \lambda_k$  для некоторого  $k$ , то  $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$  имеет ранг  $n - 1$  и  $r_{nn} = 0$ , а остальные  $r_{ii}$  являются ненулевыми. Следовательно, последняя строка матрицы  $\mathbf{A}' - \mu\mathbf{I}$  является нулевой, в частности,  $a'_{n,n-1} = 0$ , откуда по теореме 6.7.3  $\mathbf{A}'$  не обладает свойством  $\mathbf{O}$ .

Доказательство теоремы 7.4.1 требует тонкой работы с неравенствами. Оно может быть найдено в работе Глэдвелла [126] (1998) и не будет приведено здесь. Мы приведем лишь ряд вспомогательных соображений к ее доказательству. Во-первых, оно основывается на более раннем результате Криера (Cruer) [66] (1973) для случая  $\mu = 0$ . См. также работу Криера [67] (1976). Результат Криера можно использовать для того, чтобы установить, что если  $\mathbf{A}$  (не обязательно симметричная матрица) обладает свойством NTN,  $\mathbf{O}$  или TP и  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , где  $\mathbf{L}(\mathbf{U})$  является нижней (верхней) треугольной матрицей, то  $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{L}$  обладает свойством NTN,  $\mathbf{O}$  или TP соответственно. Так как  $\mathbf{A}$  обладает свойством PD-то QR-разложение в случае  $\mu = 0$  можно заменить последовательными  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ -разложениями Холецкого:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}_1^T\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{L}_2^T, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_2.$$

Запишем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^{-T} = \mathbf{L}_1^{-T}\mathbf{L}_2, \quad \mathbf{R} = \mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_1^T,$$

и заметим, что

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^{-T}(\mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_1^{-1}) = \mathbf{I},$$

так что  $\mathbf{Q}$  является ортогональной матрицей. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^T = (\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2^{-T})(\mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_1^T) = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_2 = (\mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_1^T)(\mathbf{L}_1^{-T}\mathbf{L}_2) = \mathbf{R}\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Если матрица  $\mathbf{A}$  обладает свойством  $P$ , то согласно результату Криера получаем, что  $\mathbf{B}$  обладает свойством  $P$ , а тогда и  $\mathbf{A}'$  обладает свойством  $P$ .

Доказательство также базируется на теореме Коши–Бине. Согласно уравнению (7.3.20)

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{R}, \quad (7.4.5)$$

поэтому из теоремы Коши–Бине (теорема 6.2.4) получаем

$$\mathcal{R}_p\mathbf{A}_p = \mathcal{A}'_p\mathcal{R}_p. \quad (7.4.6)$$

Перейдем к доказательству следующей леммы.

**Лемма 7.4.1.**

$$\mathcal{R}_p(\mathcal{A}^m)_p = (\mathcal{A}^m)_p \mathcal{R}_p, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.4.7)$$

**Доказательство.** По теореме Коши–Бине

$$(\mathcal{A}^m)_p = (\mathcal{A}_p)^m = \mathcal{A}_{p_p}^m,$$

аналогично  $(\mathcal{A}^m)_p = \mathcal{A}_p^m$ . Согласно уравнению (7.4.6), результат справедлив для  $m = 1$ . Пусть он выполнен для одного значения  $m$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_p{}^{(m+1)} \mathcal{R}_p &= \mathcal{A}'_p(\mathcal{A}'_p{}^m \mathcal{R}_p) \\ &= \mathcal{A}'_p(\mathcal{R}_p^m \mathcal{A}_p) = (\mathcal{A}'_p \mathcal{R}_p) \mathcal{A}_p^m \\ &= (\mathcal{R}_p \mathcal{A}_p) \mathcal{A}_p^m = \mathcal{R}_p \mathcal{A}_p^{m+1}, \end{aligned}$$

и результат верен для  $m + 1$ . ■

Уравнения (7.4.5) – (7.4.7) в общем случае дают сложные соотношения между элементами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathcal{A}_p$  и  $\mathcal{A}'_p$ , однако для ряда важных специальных случаев эти соотношения имеют простой вид. Рассмотрим уравнение (7.4.5) для коэффициентов:

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^j a'_{ik} r_{kj}. \quad (7.4.8)$$

Если  $i = n$  и  $j = 1$ , то есть только одно слагаемое в каждой сумме:

$$r_{nn} a_{n1} = a'_{n1} r_{11}. \quad (7.4.9)$$

Согласно предположениям теоремы 7.4.1 матрица  $\mathbf{A}$  по крайней мере обладает свойством NTN. Согласно примеру 6.6.1, если матрица  $\mathbf{A}$  является NTN и  $a_{n1} > 0$ , то  $\mathbf{A}$  является положительной (строгоположительной) матрицей, однако она не обладает свойством TP!). В самом деле  $a_{n1} > 0$  является первым из условий теоремы 6.8.2 для (симметричной) NTN-матрицы, гарантирующим свойство TP:  $a_{n1}$  является первым угловым минором для матрицы  $\mathbf{A}$  как обсуждалось в теореме 6.8.2. В общем случае угловой минор имеет вид  $\mathbf{A}(\phi; \theta)$ , где  $\theta = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $\phi = \{n - p + 1, \dots, n\}$ . Это угловой элемент  $N, 1$  в матрице  $\mathcal{A}_p$ . Поэтому из уравнения (7.4.6) следует

$$r_{n-p+1} \dots r_{nn} \mathbf{A}(\phi; \theta) = \mathbf{A}'(\phi; \theta) r_{11} \dots r_{pp}, \quad (7.4.10)$$

откуда  $A'(\phi; \theta) > 0$  тогда и только тогда, когда  $A(\phi; \theta) > 0$ . Этот результат позволяет доказать, что  $A'$  обладает свойством TP тогда и только тогда, когда  $A$  обладает свойством TP.

Чтобы показать, что  $A'$  обладает свойством TN тогда и только тогда, когда  $A$  обладает свойством TN, мы применим результат Андо (1987) [4] о том, что TN-матрица аппроксимируется с любой наперед заданной точностью, скажем, по  $L_1$ -норме, TP-матрицей. Теперь, чтобы показать, что  $A'$  обладает свойством O тогда и только тогда, когда  $A$  обладает свойством O, достаточно применить лемму 7.4.1. Эта лемма показывает, что угловые миноры  $A^m$  являются положительными тогда и только тогда, когда угловые миноры матрицы  $A^m$  являются положительными. Значит, если матрица  $A$  обладает свойством O, то она обладает свойством NTN, и, следовательно,  $A'$  обладает свойством NTN. Если  $A$  обладает свойством O и  $A^m$  обладает свойством TP для некоторого  $m \leq n-1$ , то ее угловые миноры положительны, тогда аналогичное справедливо для миноров матрицы  $A^m$ ;  $A^m$  обладает свойством TP;  $A'$  обладает свойством O.

По теореме 7.4.1 оператор  $\mathcal{G}_\mu$  сохраняет свойства NTN, O, TP (и SO также) при условии, что матрица  $A$  является симметричной,  $\mu$  не является собственным значением  $A$  и  $R$  имеет положительную диагональ.

В параграфе 6.6 нами было установлено (теорема 6.6.3), что NTN-матрица является лестничной. Докажем следующую теорему.

**Теорема 7.4.2.** Пусть  $A \in S_n$  обладает свойством NTN и является  $p$ -лестничной матрицей, тогда  $A' = \mathcal{G}_\mu A$  также является  $p$ -лестничной матрицей.

**Доказательство.** Так как  $A'$  обладает свойством NTN, то она является лестничной матрицей, скажем  $p'$ -лестничной.

Фундаментальное соотношение (7.3.21) позволяет получить равенство

$$\sum_{k=1}^{p_j} r_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^j a'_{ik} r_{kj}. \quad (7.4.11)$$

Докажем по индукции, что  $p'_j = p_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим  $j=1$ . Если  $i > p_1$ , то левая часть является нулевой, а следовательно,  $a'_{i1} r_{11} = 0$ ;  $p'_1 \leq p_1$ . Если  $i = p_1$ , то

$$r_{i1} a_{11} = a'_{i1} r_{11},$$

а следовательно,  $a'_{i1} > 0$ ;  $p'_1 = p_1$ . Пусть  $p'_j = p_j$  для  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .



Если  $j = m$  и  $i > p_m$  в равенстве (7.4.11), то

$$\sum_{k=1}^m a'_{ik} r_{kj} = 0. \quad (7.4.12)$$

Однако, так как матрица  $\mathbf{A}'$  является лестничной, то для  $i > p_m$  получаем  $i > p_k = p'_k$  при  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , таким образом, в сумме (7.4.12) остается только последнее слагаемое;  $a'_{im} = 0$ . Следовательно,  $p'_m \leq p_m$ . Рассмотрим,  $j = m$ ,  $i = p_m$ , тогда

$$r_{ii} a_{im} = \sum_{k=1}^m a'_{ik} r_{km}.$$

Если  $p_m > p_{m-1}$ , то в правой части остается тоже только последнее слагаемое и

$$r_{ii} a_{im} = a'_{im} r_{mm},$$

значит,  $p'_m = p_m$ . Если  $p_m = p_{m-1}$ , то неравенства  $p'_m \geq p'_{m-1}$ ,  $p'_m \leq p_m$  дают  $p'_m = p_m$ . Арбенз и Голуб (Arbenz, Golub) [12] (1995) установили, что лестничные схемы являются, по существу, единственными инвариантами симметричного QR-алгоритма. ■

В теореме 7.3.2 мы установили, что действие оператора  $\mathcal{G}_\mu$  коммутативно на множестве якобиевых матриц. Докажем более сильный результат.

**Теорема 7.4.3.** *Действие оператора  $\mathcal{G}_\mu$  коммутативно.*

**Доказательство.** Нам надо показать, что  $\mathcal{G}_{\mu_1} \mathcal{G}_{\mu_2} = \mathcal{G}_{\mu_2} \mathcal{G}_{\mu_1}$ . Рассмотрим операции  $\mathcal{G}_{\mu_1} \mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ ,  $\mathcal{G}_{\mu_2} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ ;  $\mathcal{G}_{\mu_2} \mathbf{A} = \mathbf{A}_3$ ,  $\mathcal{G}_{\mu_1} \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4$ :

$$\mathbf{A} - \mu_1 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{A}_1 - \mu_1 \mathbf{I} = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1,$$

$$\mathbf{A}_1 - \mu_2 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{A}_2 - \mu_2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_2;$$

$$\mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{A}_3 - \mu_2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_3 \mathbf{Q}_3,$$

$$\mathbf{A}_3 - \mu_1 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4, \quad \mathbf{A}_4 - \mu_1 \mathbf{I} = \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_4.$$

Из этих уравнений получаем

$$\mathbf{A}_1 - \mu_2 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{A} - \mu_2 \mathbf{I}) \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2,$$

т. е.

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_3 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2, \quad (7.4.13)$$

$$\mathbf{A}_3 - \mu_1 \mathbf{I} = \mathbf{Q}_3^T (\mathbf{A} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4,$$

т. е.

$$\mathbf{Q}_3^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4. \quad (7.4.14)$$

Уравнения (7.4.13), (7.4.14) позволяют получить

$$\mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_3 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_1^T,$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_3^T,$$

перемножая, получим

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_1^T)(\mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1) = (\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_3^T)(\mathbf{Q}_3 \mathbf{R}_3)$$

или

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_3.$$

Матрицы  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4$  являются ортогональными, а  $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_4 \mathbf{R}_3$  — верхнетреугольными с положительной диагональю. Однако невырожденная матрица имеет единственное  $\mathbf{QR}$  — разложение (с положительной диагональю). Следовательно,

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4, \quad \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_3,$$

значит, так как

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{Q}_4^T \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_4^T \mathbf{Q}_3^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_3,$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2,$$

получаем  $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_2$ . ■

## 7.5. Изоспектральные колебания балки

Мы сформулировали задачи собственных значений для (консольной) балки в параграфе 2.3:

$$\mathbf{K}y = \lambda \mathbf{M}y,$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T, \quad (7.5.1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n). \quad (7.5.2)$$

Как обычно, приведем задачу к стандартному виду:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}. \quad (7.5.3)$$

Сначала получим простую изоспектральную систему, используя лемму 7.3.1. Запишем

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^2, \quad \mathbf{F} = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n),$$

тогда  $\mathbf{A}$  может быть записана в виде

$$\mathbf{A} = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}).$$

Теперь применим лемму 7.3.1; собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  являются ненулевыми (на самом деле даже положительными), значит, если

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{F}\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{D}^{-1}) \cdot (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{F}),$$

то

$$\sigma(\mathbf{A}') = \sigma(\mathbf{A}).$$

Для построения дискретной балки, соответствующей матрице  $\mathbf{A}'$ , обратим редукцию к стандартному виду и запишем

$$\mathbf{A}'\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}'$$

как

$$\mathbf{K}'\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{M}'\mathbf{y}', \quad (7.5.4)$$

где

$$\mathbf{K}' = \mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\widehat{\mathbf{K}}'\mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}, \quad (7.5.5)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}' = \mathbf{M}^{-1}, \quad \mathbf{M}' = \widehat{\mathbf{K}}^{-1}. \quad (7.5.6)$$

Это уравнение на собственные значения для перевернутой консоли. Аналогично проверке для пружинно-массовых систем в параграфе 7.3 преобразуем (7.5.4), применяя матрицу  $\mathbf{T}$ . Следовательно,

$$\mathbf{TK}'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{TM}'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\mathbf{y}',$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{TK}'\mathbf{T} &= \mathbf{TE}^T\mathbf{T} \cdot \mathbf{TL}^{-1}\mathbf{T} \cdot \mathbf{TE}^T\mathbf{T} \cdot \widehat{\mathbf{TK}}'\mathbf{T} \cdot \mathbf{TET} \cdot \mathbf{TL}^{-1}\mathbf{T} \cdot \mathbf{TET} \\ &= \mathbf{EL}^{-0}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}^0\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-0}\mathbf{E}^T = \mathbf{K}^0. \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

Новая консоль связана со старой посредством равенств

$$k_i^0 = m_{n-i+1}^{-1}, \quad l_i^0 = l_{n-i+1}, \quad m_i^0 = k_{n-i+1}^{-1}. \quad (7.5.8)$$

Для построения семейства изоспектральных балок будем использовать оператор  $\mathcal{G}_\mu$ , определяемый уравнениями (7.4.1), (7.4.2). Нам предстоит сделать следующие шаги:

- i) рассмотреть балку, заданную  $\widehat{\mathbf{K}}, \mathbf{L}, \mathbf{M} = \mathbf{D}^2$ ;
- ii) построить матрицу  $\mathbf{A}$  как в уравнениях (7.5.1) — (7.5.3) так, чтобы она являлась симметрической, пятидиагональной и знаково-осцилляторной;
- iii) выбрать  $\mu$ , которое не является собственным значением матрицы  $\mathbf{A}$ , и рассмотреть матрицу  $\mathbf{A}' = \mathcal{G}_\mu\mathbf{A}$ , которая тоже оказывается симметричной, пятидиагональной и знаково-осцилляторной;
- iv) разложить  $\mathbf{A}' = (\mathbf{D}')^{-1}\mathbf{K}'(\mathbf{D}')^{-1}$  и рассмотреть  $\mathbf{M}' = (\mathbf{D}')^2$ ,  $\mathbf{K}' = \mathbf{E}(\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}'\mathbf{E}^T(\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{E}^T$ .

Осталось лишь завершить шаг iv). Нам надо показать, что для новой симметричной пятидиагональной знаково-осцилляторной матрицы  $\mathbf{A}'$  существует разложение, аналогичное формулам (7.5.1) — (7.5.3), для некоторых новых матриц с положительной диагональю  $\mathbf{D}', \widehat{\mathbf{K}}', \mathbf{L}'$ . Сначала мы приведем основную идею доказательства, а потом покажем, что она всегда применима.

Новая матрица  $\mathbf{A}'$  связана с новыми матрицами жесткостей и масс  $\mathbf{K}', \mathbf{M}' = \mathbf{D}'^2$  посредством уравнения (7.5.3). Как и в случае пружинно-массовой системы из параграфа 7.3, начнем с рассмотрения простого

статического отклонения балки, см. рисунок 7.5.1. Применим силы  $f_1$ ,  $-f_2$  к массам 1 и 2 так, что все массы имеют единичное смещение. Уравнением связи между силой и смещением является

$$\mathbf{K}'\{1, 1, \dots, 1\} = \{f_1, -f_2, 0, \dots, 0\}.$$

Однако  $\mathbf{A}' = \mathbf{D}'^{-1}\mathbf{K}'\mathbf{D}'^{-1}$ , значит  $\mathbf{K}' = \mathbf{D}'\mathbf{A}'\mathbf{D}'$  и, следовательно,

$$\mathbf{D}'\mathbf{A}'\{d'_1, d'_2, \dots, d'_n\} = \{f_1, -f_2, 0, \dots, 0\},$$

откуда

$$\mathbf{A}'\{d'_1, d'_2, \dots, d'_n\} = \{g_1, -g_2, 0, \dots, 0\}, \quad (7.5.9)$$

где  $g_i = f_i/d'_i$ ,  $i = 1, 2$ .

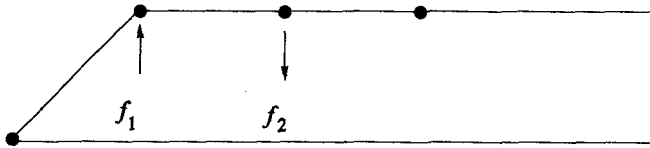


Рис. 7.5.1. Обе силы  $f_1, -f_2$  должны задавать единичные отклонения

Матрица  $\mathbf{A}'$  обладает свойством SO, значит, по теореме 6.7.5,  $\mathbf{B}' \equiv (\mathbf{A}')^{-1}$  обладает свойством O. Решением уравнения (7.5.9) является

$$d'_i = b'_{i1}g_1 - b'_{i2}g_2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.5.10)$$

Рассмотрим  $g_1 = 1$ ; покажем, что если сила  $g_2$  настолько мала, что значение  $d'_n$  является положительным, то все значения  $d'_i$  окажутся положительными. Иначе, если  $0 < g_2 < b'_{n1}/b'_{n2}$ , то

$$\begin{aligned} d'_i &> b'_{i1} - b'_{i2}b'_{n1}/b'_{n2} \\ &= (b'_{i1}b'_{n2} - b'_{i2}b'_{n1})/b'_{n2} \geq 0, \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{B}'$  обладает свойством O. В дальнейшем мы покажем, что  $b'_{i1}, b'_{i2}$  являются строго положительными для  $i = 1, 2, \dots, n$ , а значит,  $d'_i$  являются строго положительными. Предполагая, что это справедливо, мы нашли  $\mathbf{d}'$ , удовлетворяющее уравнению (7.5.9) для некоторых  $g_1 = 1, g_2 > 0$ . Вектор  $\mathbf{d}'$  является первым столбцом матрицы  $\mathbf{D}'\mathbf{E}^{-T}$ ; где матрица  $\mathbf{E}^{-1}$  определена уравнением (2.2.10).

Покажем теперь, что матрица

$$\mathbf{C}' = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{A}'\mathbf{D}'\mathbf{E}^{-T} \quad (7.5.11)$$

является якобиевой. Пусть

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a'_1 & -b'_1 & c'_1 & & \\ -b'_1 & a'_2 & -b'_2 & c'_2 & \\ c'_1 & -b'_2 & a'_3 & -b'_3 & c'_3 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c'_{n-2} & -b'_{n-1} & a'_n \end{bmatrix},$$

тогда  $\mathbf{A}'\mathbf{D}'\mathbf{E}^{-T}$  имеет только одну диагональ под главной диагональю, эта диагональ состоит из элементов  $-g_2, -c'_1 d'_1, -c'_2 d'_2, \dots, -c'_{n-2} d'_{n-2}$ . Матрица  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}'$  является верхнетреугольной, значит  $\mathbf{C}' \equiv \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}'(\mathbf{A}'\mathbf{D}'\mathbf{E}^{-T})$  также имеет только одну диагональ под главной диагональю. Однако матрица  $\mathbf{C}'$  является симметричной, а значит у нее есть только одна ненулевая диагональ под главной диагональю: эта матрица является симметричной трехдиагональной матрицей с кодиагональю

$$-d'_2 g_2, -c'_1 d'_1 d'_3, -c'_2 d'_2 d'_4, \dots, -c'_{n-2} d'_{n-2} d'_n. \quad (7.5.12)$$

Обозначим матрицу, полученную удалением строк и столбцов  $1, 2, \dots, i-1$  из  $\mathbf{A}'$ , через  $\mathbf{A}'_i$  и пусть  $\mathbf{d}'_i = \{0, 0, \dots, 0, d'_i, d'_{i+1}, \dots, d'_n\}$ , тогда диагональные элементы  $\mathbf{C}'$  могут быть записаны в виде

$$c'_{ii} = \mathbf{d}'_i{}^T \mathbf{A}'_i \mathbf{d}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.5.13)$$

Для доказательства того, что  $\mathbf{C}'$  является матрицей Якоби, необходимо установить, что она обладает свойством PSD. Действительно, так как первоначальная матрица  $\mathbf{A}$  обладала свойством PD, новая матрица  $\mathbf{A}'$  является PD и тем же свойством обладает  $\mathbf{C}'$ , так как

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}' \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D}') \mathbf{A}' (\mathbf{D}' \mathbf{E}^{-T} \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A}' \mathbf{y} > 0.$$

Мы построили матрицу Якоби  $\mathbf{C}'$  из  $\mathbf{A}'$ . Будем использовать результат, полученный в (4.4.7) для разложения матрицы Якоби. Во введенных обозначениях мы можем написать:

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{L}')^{-1} \mathbf{E} \widehat{\mathbf{K}}' \mathbf{E}^T (\mathbf{L}')^{-1}, \quad (7.5.14)$$

значит, в силу уравнений (7.5.11) и (7.5.14), получаем

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{D}')^{-1} \mathbf{E} (\mathbf{L}')^{-1} \mathbf{E} \widehat{\mathbf{K}}' \mathbf{E}^T (\mathbf{L}')^{-1} \mathbf{E}^T (\mathbf{D}')^{-1}, \quad (7.5.15)$$

как и требовалось.

Исследуем предложенную процедуру. Нам надо установить, что коэффициенты  $b'_{i1}, b'_{i2}$  являются строго положительными и коэффициенты  $c'_i$  в последней полосе матрицы  $\mathbf{A}'$ , которые находятся на кодиагонали матрицы  $\mathbf{C}'$ , являются положительными. Для проверки этих фактов надо вернуться к  $\mathcal{G}_\mu$ -алгоритму, более точно, к уравнениям (7.4.5)–(7.4.9). Компоненты  $b_{n1}, b'_{n1}$  являются элементами  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1}$  и  $\mathbf{B}' \equiv (\mathbf{A}')^{-1}$  соответственно.

Переходя к обратным матрицам с обеих сторон уравнения (7.4.5), получаем

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \quad (7.5.16)$$

и, приравнивая коэффициенты с индексами  $n$  и  $1$ , получим

$$r_{nn}^{-1}b'_{n1} = b_{n1}r_{11}^{-1}. \quad (7.5.17)$$

Первоначальная матрица  $\mathbf{A}$  задается формулами (7.5.1)–(7.5.3), значит

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\mathbf{E}^{-T}\widehat{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{E}^{-1},$$

т. е. для  $\mathbf{E}^{-1}$  получаем уравнение (2.2.10), легко видеть, что  $b_{n1} > 0$ , а следовательно, уравнение (7.5.17) позволяет получить  $b'_{n1} > 0$ .

Покажем, что  $b'_{n2} > 0$ . Матрица  $\mathbf{B}'$  является осцилляторной; следовательно, она обладает свойством TN, т. е. минор  $\mathbf{B}'(1, n; 1, 2) \geq 0$ ; следовательно, из условий

$$\begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{n1} & b'_{n2} \end{vmatrix} = b'_{11}b'_{n2} - b'_{n1}b'_{12} \geq 0, \quad (7.5.18)$$

и  $b'_{n1} > 0, b'_{12} > 0, b'_{11} > 0$  получаем  $b'_{n2} > 0$ . Применим подобный аргумент для доказательства того, что  $b'_{i1} > 0, b'_{i2} > 0$ : неравенства

$$\begin{vmatrix} b'_{i1} & b'_{ii} \\ b'_{n1} & b'_{ni} \end{vmatrix} \geq 0, \quad i \geq 2; \quad \begin{vmatrix} b'_{i2} & b'_{ii} \\ b'_{n2} & b'_{ni} \end{vmatrix} \geq 0, \quad i \geq 3, \quad (7.5.19)$$

позволяют получить  $b'_{i1} > 0, b'_{i2} > 0$  соответственно. Нами показано, что эта процедура всегда дает вектор  $\mathbf{d}'$ , который является строго положительным. Развитие этого сюжета изложено в (2002b) [130].

## Упражнение 7.5

- 1) Покажите, что существует 2-параметрическая система изоспектральных балок, соответствующая простому масштабированию, т. е. все массы домножаются на один и тот же множитель, все жесткости — на некоторый другой множитель, а все длины — на третий.

- 2) Рассуждения, применявшиеся для доказательства (7.5.17), (7.5.18), принадлежат Маркхаму (Markham) [221] (1970). Покажите, что если  $\mathbf{B}$  обладает свойством  $\mathbf{O}$  и элементы  $b_{ij}$  при  $i > j$ , т.е. элементы нижнего треугольника, являются нулевыми, то все элементы под коэффициентом  $b_{ij}$  и влево от него являются также нулевыми. Последнее означает, что если матрица  $\mathbf{B}$  обладает свойством  $\mathbf{O}$ , то она имеет, *лестничную структуру* как мы заметили в конце параграфа 7.4. Также, если  $b_{n1} > 0$  и  $b_{1n} > 0$ , то  $\mathbf{B}$  является строго положительной матрицей.

## 7.6. Конечные изоспектральные модели

В параграфе 2.4 мы показали, что конечная модель продольной вибрации стержня имеет трехдиагональные матрицы масс и жесткостей, первая — с положительной кодиагональю, а вторая — с отрицательной. Явный вид матрицы жесткости был приведен в упр. 2.4.2. В этом параграфе, следуя работам Глэдвелла [126] (1998) и [127] (1999), мы обсудим, как построить для стержня конечную систему  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$ , изоспектральную данной конечной системе  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ . Сперва мы рассмотрим простой способ построения изоспектрального семейства  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$ , а затем опишем процедуру, позволяющую находить большие семейства. См. работу Глэдвелла [125] (1997), где приводятся более ранние попытки решения этой задачи.

Для простоты рассмотрим консольный стержень, т.е. правый конец свободен, а левый зафиксирован. Уравнение на собственные значения имеет вид

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (7.6.1)$$

Вместо того чтобы работать с  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ , мы будем рассматривать  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Z}\mathbf{K}\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{M}$ ; обе эти матрицы являются трехдиагональными с положительной кодиагональю, т.е. осцилляторными ( $\mathbf{O}$ ). Разложим эти матрицы следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T, \quad (7.6.2)$$

согласно работе Криера [66] (1973), получаем, что обе матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  являются нижними двухдиагональными с положительными кодиагоналями. Приведем к нормальному виду уравнение (7.6.1)

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (7.6.3)$$



где  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^{-T}$ , т. е.  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{B}}^{-T}$  обладает свойством О:

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{B}}^{-T}. \quad (7.6.4)$$

Следовательно, один из способов получения изоспектральных систем  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$  состоит в нахождении нижних двухдиагональных матриц  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  с положительными кодиагоналями, таких что

$$\tilde{\mathbf{K}}' = \mathbf{C}\mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{D}\mathbf{D}^T \quad (7.6.5)$$

и

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\tilde{\mathbf{B}}^{-T} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{D}}^{-T}. \quad (7.6.6)$$

Это выполняется, если

$$\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}. \quad (7.6.7)$$

Непосредственные алгебраические вычисления показывают, что

$$c_{ii} = v_i a_{ii}, \quad d_{ii} = v_i b_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.6.8)$$

$$c_{i+1,i} = v_{i+1} a_{i+1,i}, \quad d_{i+1,i} = v_{i+1} b_{i+1,i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (7.6.9)$$

где  $(v_i)_1^n$  являются произвольными положительными связями и

$$a_{11}d_{21} + b_{11}c_{21} = v_2(a_{11}b_{21} + a_{21}b_{11}) = v_2p. \quad (7.6.10)$$

Общее положительное решение (7.6.10) имеет вид

$$c_{21} = v_2p \sin^2 \theta / b_{11}, \quad d_{21} = v_2p \cos^2 \theta / a_{11}, \quad (7.6.11)$$

где  $0 < \theta < \pi/2$ . Получаем  $(n+1)$ -параметрическое семейство матриц  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$ , задаваемое  $(n+1)$  параметрами  $(v_i)_1^n$  и  $\theta$ .

За исключением того случая, когда параметры  $v_i$  выбраны подходящим образом, новая матрица  $\mathbf{K}' = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T$  не имеет вид матрицы жесткости конечной консольной модели стержня. Такая матрица, для нее  $\mathbf{K}'$  задается как в упр. 2.4.2, должна быть определена условием

$$\mathbf{K}'\{1, 1, 1, \dots, 1\} = \{k'_1, 0, 0, \dots, 0\}. \quad (7.6.12)$$

Уравнения (7.6.8)–(7.6.11) показывают, что  $\mathbf{C}$  имеет вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{N}\mathbf{C}_0, \quad \mathbf{N} = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

и  $\mathbf{C}_0$  зависит только от  $\theta$ . Следовательно,

$$\mathbf{K}' = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}_0\tilde{\mathbf{C}}_0^T\mathbf{N}.$$

Тогда из уравнения (7.6.12) следует

$$\mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}_0\tilde{\mathbf{C}}_0^T\mathbf{N}\{1, 1, \dots, 1\} = \{k'_1, 0, \dots, 0\},$$

т. е.

$$\tilde{\mathbf{C}}_0\tilde{\mathbf{C}}_0^T\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{k'_1/v_1, 0, \dots, 0\}. \quad (7.6.13)$$

Так как  $\tilde{\mathbf{C}}_0\tilde{\mathbf{C}}_0^T$  является невырожденной матрицей Якоби, т. е. обладает свойством  $SO$ , ее обратная матрица является положительной. Следовательно, уравнение (7.6.13) дает положительное значение  $(v_i)_1^n$ , за исключением единственного положительного множителя.

Для получения более широкого семейства будем использовать общую теорию из параграфа 7.4: построим  $\mathbf{G}'$  согласно формулам

$$\mathbf{G} - \mu\mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad \mathbf{G}' - \mu\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{Q}, \quad (7.6.14)$$

значит,  $\mathbf{G}'$  обладает свойством  $O$ . Нам надо показать, что если  $\mathbf{G}$  можно разложить аналогично уравнению (7.6.4), то  $\mathbf{G}'$  можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{D}}^{-T}, \quad (7.6.15)$$

где  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  являются нижними двухдиагональными матрицами с положительными кодиагоналями.

Для получения ленточных форм вспомним, как была построена матрица  $\mathbf{G}$ , а именно  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^{-T}$  или  $\mathbf{K} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{B}^T$ . Последнее можно записать в виде  $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}$ . Уравнение  $\mathbf{B}\mathbf{H} = \mathbf{K}$  принимает вид

$$\sum_{k=1}^n b_{ik}h_{kj} = k_{ij}. \quad (7.6.16)$$

Однако матрица  $\mathbf{K}$  является трехдиагональной, а значит,  $k_{ij} = 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n-2$ ;  $j = i+2, \dots, n$ . Матрица  $\mathbf{B}$  является нижней двухдиагональной, а значит из формулы (7.6.16) получаем

$$b_{i,i-1}h_{i-1,j} + b_{i,i}h_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad j = i+2, \dots, n.$$

Рассматривая  $i = 1$ , получим

$$b_{11}h_{1j} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, n,$$

рассматривая  $i = 2$ , в (7.6.16) получим

$$b_{21}h_{1j} + b_{22}h_{2j} = 0, \quad j = 4, 5, \dots, n,$$

значит,

$$b_{22}h_{2j} = 0, \quad j = 4, 5, \dots, n,$$

в общем случае:

$$h_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad j = i+2, \dots, n. \quad (7.6.17)$$

Рассмотрим уравнение  $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{B}^T$ , которое эквивалентно равенству

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{g}_{ik}b_{jk},$$

применяя также (7.6.17), получим

$$\tilde{g}_{i,j-1}b_{j,j-1} + \tilde{g}_{ij}b_{jj} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad j = i+2, \dots, n.$$

Так как  $\tilde{g}_{ij} = (-1)^{i+j}g_{ij}$  и матрица  $\mathbf{G}$  является симметричной, запишем эти уравнения в виде

$$b_{j,j-1} \begin{bmatrix} g_{j-1,1} \\ g_{j-1,2} \\ \vdots \\ g_{j-1,j-2} \end{bmatrix} = b_{jj} \begin{bmatrix} g_{j1} \\ g_{j2} \\ \vdots \\ g_{j,j-2} \end{bmatrix}, \quad j = 3, 4, \dots, n. \quad (7.6.18)$$

Покажем, что из этих уравнений следует, что присоединенная матрица  $\mathcal{G}_2$ , состоящая из  $2 \times 2$  миноров матрицы  $\mathbf{G}$ , имеет схему расположения нулей, изображенную на рисунке 7.6.1. Первые  $n-3$  коэффициента, начиная с левого конца последней строки матрицы  $\mathcal{G}_2$ , имеют вид

$$G(n-1, n; 1, 2), G(n-1, n; 1, 3) \dots G(n-1, n; 1, n-2).$$

Все эти элементы равны нулю, так как в силу равенства (7.6.18) для  $j = n$

$$G(n-1, n; 1, k) = \begin{vmatrix} g_{n-1,1} & g_{n-1,k} \\ g_{n,1} & g_{n,k} \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, \dots, n-2,$$

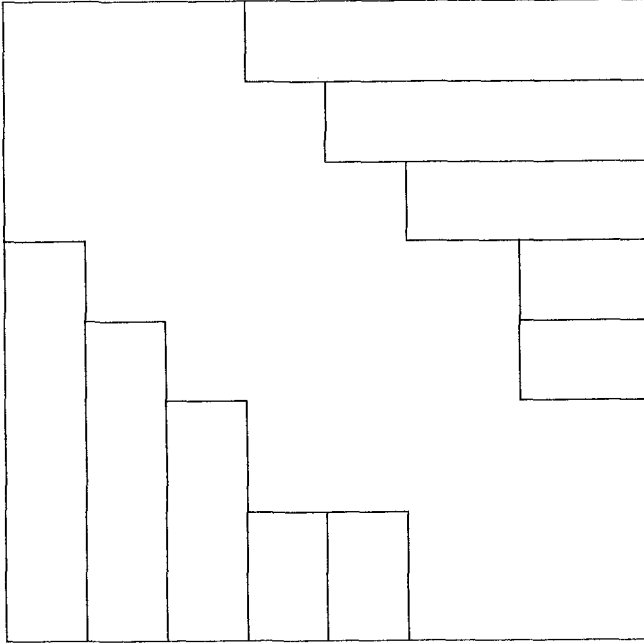


Рис. 7.6.1. Прямоугольники в левой нижней и правой верхней части матрицы состоят из нулей

поскольку строки этого определителя пропорциональны. Рассмотрим первые  $n - 4$  коэффициента предпоследней строки матрицы  $\mathcal{G}_2$ :

$$G(n - 2, n; 1, 2), G(n - 2, n; 1, 3) \dots G(n - 2, n; 1, n - 3).$$

Для доказательства того, что все они являются нулевыми, мы рассмотрим нулевой определитель

$$\begin{vmatrix} g_{n-2,1} & g_{n-2,1} & g_{n-2,k} \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,1} & g_{n-1,k} \\ g_{n1} & g_{n1} & g_{nk} \end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая его по первой строке, получим

$$g_{n-2,1}G(n - 1, n; 1, k) - g_{n-1,1}G(n - 2, n; 1, k) + g_{n1}G(n - 2, n - 1; 1, k) = 0. \quad (7.6.19)$$

Однако все элементы матрицы  $\mathbf{G}$  из уравнения (7.6.4) являются положительными, поэтому если какие-то два минора в выражении (7.6.19) являются нулевыми, то третий тоже нулевой. Однако если  $k = 2, 3, \dots, n-3$ , то первый минор равен нулю, и уравнение (7.6.19) при  $j = n-1$  показывает, что третий также равен нулю, следовательно, и второй минор равен нулю.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что  $G(i, j; 1, k) = 0$  для  $3 \leq i < j$ ,  $k = 2, \dots, i-1$ . Это дает невозрастающую конфигурацию нулей в столбцах нижнего треугольника матрицы  $\mathcal{G}_2$ . Теперь уравнение

$$\mathcal{R}_2 \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}'_2 \mathcal{R}_2 \quad (7.6.20)$$

показывает, что  $\mathcal{G}'_2$  имеет в точности аналогичную конфигурацию, откуда  $\mathbf{G}'$  может быть разложена аналогично  $\mathbf{G}$ .

Получим следующее разложение:

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{D}}_0^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T \tilde{\mathbf{D}}^{-T} \quad (7.6.21)$$

и заметим, что это эквивалентно равенству

$$\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{D}}^{-T},$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{N} \mathbf{C}_0 \quad \mathbf{D} = \mathbf{N} \mathbf{D}_0$$

и  $\mathbf{N}$  является произвольной диагональной матрицей. Выберем  $\mathbf{N}$ , как и ранее, для того чтобы  $\mathbf{K}' = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^T$  имело вид матрицы жесткости.

### Упражнения 7.6

- 1) Используя уравнение (7.6.19), проверьте, что  $\mathcal{G}_2$  и  $\mathcal{G}'_2$  имеют одинаковую лестничную структуру, а значит  $\mathbf{G}'$  раскладывается аналогично (7.6.21).

## 7.7. Изоспектральный поток: продолжение

В параграфе 7.2 нами было получено уравнение изоспектрального потока

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{A}, \quad (7.7.1)$$

которое определяет изоспектральную эволюцию симметрической матрицы  $\mathbf{A}$ ; здесь матрица  $\mathbf{S}$  является кососимметрической. В этом параграфе





Эти рассуждения приводят нас к следующему примеру, в котором  $\mathbf{A}$  является периодической матрицей Якоби. Рассмотрим

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & -b_n \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -b_{n-1} \\ & & & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & +1 \\ +1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & & +1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.7.6)$$

Легко проверить (упр. 7.7.2), что  $\mathbf{A}$  сохраняет свой вид при действии потока (7.7.1) с матрицей  $\mathbf{S} = \mathbf{A} \circ \mathbf{Y}$ , и, кроме того, все  $a_i$  и  $b_i$  сохраняют свои знаки.

Заметим, что, когда мы переходим к трехдиагональным матрицам, у нас есть два способа построения изоспектрального семейства: используя оператор  $\mathcal{G}_\mu$  из параграфа 7.3 или используя изоспектральное уравнение потока, где  $\mathbf{S}$  дается формулами (7.7.2). Периодическая форма Якоби не является инвариантной при  $\mathcal{G}_\mu$ , и остается неясным, существует ли разложение и обратная операция, относительно которых она является инвариантной. По-видимому, единственный *алгебраический* метод построения изоспектрального семейства состоит в использовании спектра  $(\lambda_i)_1^n$  и второго спектра  $(\mu_i)_1^{n-1}$  и восстановлении матрицы, аналогично тому, как это происходило в параграфе 5.4. В периодическом случае уравнение изоспектрального потока  $\mathbf{S}$  из формулы (7.7.6) дает принципиально более простой метод.

Еще одно замечание состоит в том, что, как мы показали в параграфе 7.3, от любой матрицы Якоби  $\mathbf{J}$  к *любой другой* изоспектральной матрице Якоби  $\mathbf{J}'$  можно перейти за  $n - 1$  операций  $\mathcal{G}_\mu$ . Однако сомнительно, что матрица  $\mathbf{S}$ , определяемая формулой (7.7.2), позволит нам перейти от матрицы  $\mathbf{J}$  к *любой другой* изоспектральной матрице  $\mathbf{J}'$  (см. упр. 7.7.7).

Следуя работе Глэдвелла [129] (2002), мы теперь покажем, что сохранение знаков трехдиагональной матрицы при действии потока Тода (7.7.1) является частным случаем сохранения свойств полной положительности NTN, TP, O, SO при действии потока Тода. Напомним, что в параграфе 6.8 было установлено, что положительность угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  важна при проверке того, что матрица, обладающая свойством TN, обладает также и свойством TP. Для начала докажем теорему относительно потока угловых миноров под действием потока Тоды (7.7.1).



**Теорема 7.7.1.** Пусть  $\mathbf{A} \in S_n$  удовлетворяет уравнению (7.7.1), где  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$ ,  $c_p = B(1, 2, \dots, p; n-p+1, \dots, n)$ , тогда  $c_p(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{c}_p = \left( \sum_{j=n-p+1}^n a_{jj} - \sum_{j=1}^p a_{jj} \right) c_p, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (7.7.7)$$

**Доказательство.** Обозначим угловую подматрицу  $p$ -го порядка матрицы  $\mathbf{B}$  посредством  $\mathbf{B}_p$ , и пусть ее столбцы это  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p$ . Тогда

$$\mathbf{b}_j = [b_{n-p+1,j}, b_{n-p+2,j}, \dots, b_{n,n}]^T.$$

Упр. 7.7.3 показывает, что  $\mathbf{B}$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B},$$

где  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$ , тогда

$$\dot{b}_{ij} = (a_{ii} - a_{jj})b_{ij} - 2 \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}b_{ik} + 2 \sum_{k=i+1}^n a_{ik}b_{kj}$$

и

$$\dot{\mathbf{b}}_j = a_{jj}\mathbf{b}_j - 2 \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\mathbf{b}_k + \mathbf{C}\mathbf{b}_j, \quad (7.7.8)$$

где  $\mathbf{C} \in M_p$  задается формулой

$$c_{ik} = \begin{cases} a_{ii}, & k = i, \\ 2a_{ik} & k = i+1, \dots, n \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

для  $i, k = n-p+1, \dots, n$ .

Справедливо равенство  $c_p = \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p)$ , а значит

$$\dot{c}_p = \sum_{j=1}^p \det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \dot{\mathbf{b}}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_p). \quad (7.7.9)$$

Рассмотрим суммы, полученные подстановкой каждого из трех коэффициентов  $\dot{\mathbf{b}}_j$  из (7.7.8) в (7.7.9). Первая сумма имеет вид

$$- \sum_{j=1}^p a_{jj} c_p.$$

Вторая сумма равна нулю, так как она, по существу, является комбинацией первых  $j - 1$  столбцов; третья сумма может быть записана в виде

$$\sum_{j=n-p+1}^n a_{jj} c_p.$$

Докажем следующий результат:

**Теорема 7.7.2.** Пусть  $P$  обозначает одно из свойств  $TN$ ,  $NTN$ ,  $TP$ ,  $O$ ,  $SO$ . Если  $\mathbf{A}(0) \in S_n$  обладает свойством  $P$ , то  $\mathbf{A}(t)$ , которая является решением уравнения (7.7.1) при условии  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$ , обладает тем же свойством  $P$ .

**Доказательство.** Пусть для начала матрица  $\mathbf{A}(0)$  обладает свойством  $TP$ . Следовательно, угловые миноры  $c_p$  матрицы  $\mathbf{A}(t)$  при  $t = 0$  являются положительными; они удовлетворяют уравнению

$$\dot{c}_p = f(t)c_p,$$

где функция

$$f(t) = \sum_{j=n-p+1}^n a_{jj} - \sum_{j=1}^p a_{jj}$$

ограничена:  $|f(t)| \leq \text{tr}(\mathbf{A}(t)) = \text{tr}(\mathbf{A}(0))$ .

Получаем, что эти угловые миноры остаются положительными.

При  $t = 0$  все миноры  $\mathbf{A}$  являются положительными. По непрерывности, все миноры являются положительными на некотором открытом интервале  $(a, b)$  вокруг  $t = 0$ . Предположим, что один или более минор обнуляется при  $t = b$ . В этом случае матрица  $\mathbf{A}(b)$  является  $NTN$  и ее угловые миноры положительны, а значит, по теореме 6.8.2, она обладает свойством  $TP$ . Это противоречие показывает, что  $\mathbf{A}(t)$  обладает свойством  $TP$  для всех  $t$ .

Теперь предположим, что  $\mathbf{A}(0)$  обладает свойством  $TN$ . Согласно результату Андо из упр. 6.8.3 матрица  $\mathbf{A}(0)$  может быть аппроксимирована с любой точностью по  $L_1$ -норме  $TP$ -матрицей

$$\mathbf{C}(0, k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{A}(0)\mathbf{P}(k),$$

где

$$\mathbf{P}(k) = (p_{ij}), \quad p_{ij} = \exp[-k(i-j)^2].$$

Пусть  $\mathbf{C}(t, k)$  является решением уравнения

$$\dot{\mathbf{C}}(t, k) = \mathbf{C}(t, k)\mathbf{S}(t, k) - \mathbf{S}(t, k)\mathbf{C}(t, k),$$

где

$$\mathbf{S}(t, k) = \mathbf{C}^{+T}(t, k) - \mathbf{C}^+(t, k).$$

Согласно предыдущим рассуждениям  $\mathbf{C}(t, k)$  обладает свойством ТР для всех  $t$  и всех  $k$ , а так как (упр. 7.7.3)

$$\|\dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{C}}(t, k)\| = O(\exp(-k)), \quad (7.7.10)$$

получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}(t, k) = \mathbf{A}(t) : \quad (7.7.11)$$

миноры  $\mathbf{A}(t)$  являются пределами при  $k \rightarrow \infty$  положительных миноров  $\mathbf{C}(t, k)$ ; все миноры  $\mathbf{A}(t)$  являются неотрицательными: матрица  $\mathbf{A}(t)$  обладает свойством NTN.

Пусть  $\mathbf{A}(0)$  обладает свойством О. Она обладает свойством NTN а значит, согласно предыдущим результатам,  $\mathbf{A}(t)$  обладает свойством NTN. Если  $t = 0$ , то миноры  $(\mathbf{A}(0))^m = \mathbf{B}(0)$  являются строго положительными при  $m \geq n - 1$ . Угловые миноры  $\mathbf{B}(t) = (\mathbf{A}(t))^m$  остаются положительными (упр. 7.7.3),  $\mathbf{B}(t)$  тогда будет обладать свойством NTN, при этом угловые миноры будут положительны;  $\mathbf{B}(t)$  обладает свойством ТР;  $\mathbf{A}(t) - \mathbf{O}$ .

Легко видеть, что если  $\mathbf{A}(0)$  обладает свойством SO, то и  $\mathbf{A}(t)$  обладает этим свойством. ■

Мы теперь можем применить этот результат для получения других изоспектральных безмассовых матриц жесткости для дискретной балки. Начиная с  $\mathbf{A}(0)$  в уравнении (7.5.3), рассмотрим  $\mathbf{A}(t)$ ; матрицы  $\mathbf{A}(t)$ , как и  $\mathbf{A}(0)$ , будут обладать свойством SO. Упр. 7.7.5 показывает, что угловые миноры матрицы  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}^{-1}(t)$  являются строго положительными, и упр. 7.7.6 показывает, что внедиагональные элементы  $\mathbf{A}(t)$  положительны. Эти результаты позволяют восстановить  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$ ,  $\mathbf{L}'$  по  $\mathbf{A}(t)$ .

Маркхам [221] (1970) показывает, что осцилляторная (или знаково-осцилляторная) матрица должна иметь лестничный вид. Можно проверить (см. упр. 7.7.4), что изоспектральный поток при  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$  сохраняет лестничный вид. В частности, можно показать, что крайние ненулевые элементы лестничной матрицы сохраняют свои знаки: если они строго положительные (отрицательные) при  $t = 0$ , то они останутся строго положительными (отрицательными).

**Упражнения 7.7**

- 1) Запишите матрицу  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$  в виде произведения Адамара  $\mathbf{S} = \mathbf{A} \circ \mathbf{Y}$ .
- 2) Проверьте, что если  $\mathbf{Y}$  задается уравнением (7.7.6), то  $\mathbf{A}$  в (7.7.6) сохраняет свой вид при потоке (7.7.1).
- 3) Обоснуйте результаты (7.7.10), (7.7.11).
- 4) Покажите, что изоспектральный поток (7.7.1) с матрицей  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{+T} - \mathbf{A}^+$  сохраняет лестничный вид; это распространяется на блочно-ленточные матрицы без пропусков.
- 5) Покажите, что  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$  удовлетворяет тому же изоспектральному уравнению (7.7.1), т. е.  $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}$  и угловые миноры  $\mathbf{B}$  удовлетворяют равенству (7.7.7).
- 6) Покажите, что если  $\mathbf{A}$  имеет ленточную ширину  $2r$ , т. е.  $a_{ij} = 0$  при  $|i - j| > r$ , то внедиагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  сохраняют свои знаки.
- 7) Найдите такие две изоспектральные матрицы  $\mathbf{J}, \mathbf{J}'$ , что не существует перехода от  $\mathbf{J}$  к  $\mathbf{J}'$  в потоке Тоды с матрицей  $\mathbf{S}$ , заданной формулой (7.7.2).

---

---

## ГЛАВА 8

# Дискретная колеблющаяся балка

Думающая тростинка — это не из пространства, где я могу обрести положение, но от высот моего мышления. Я не обрету ничего больше, если я владею мирами. Пространством Вселенная окружает и поглощает меня, как атом; мыслью я постигаю мир.

Блез Паскаль. *Мысли*, 348

### 8.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим в деталях решение обратной задачи для дискретной пружинно-массовой модели колеблющейся балки, обсуждавшейся в параграфе 2.3. Эта модель важна, так как является наиболее простой — на самом деле она является конечно-разностной аппроксимацией — для балки с непрерывно распределенной массой. См. работу Глэдвелла [116] (1991), где приводится качественное обсуждение количественного описания обычной конечной модели балки. Обратная задача для непрерывной балки будет рассматриваться в главе 13. Обратная задача для дискретной балки была впервые рассмотрена Барсилоном (Bacilop) в работах [18] (1976), [20] (1979) и [21] (1982). Он показал, что восстановление такой системы потребует наличия трех различных спектров, отвечающих трем различным конечным условиям. Необходимые и достаточные условия того, что эти спектры отвечают реализуемым системам, одна из которых имеет положительные массы, длины и жесткости, были получены Глэдвелом в [104] (1984).

Две статьи Свита (Sweet) [313] (1969) и [314] (1971) посвящены дискретным моделям балки, полученным с использованием так называемого метода прямых линий; он показывает, что матрица коэффициентов, полученная при помощи этой процедуры, подобна или даже равна осцилляторной матрице. См. также работу Глэдвелла [117] (1991b).

План этой главы имеет следующий вид. В параграфе 8.2 мы покажем, что (квадраты) собственных частот системы являются собственными

ми значениями осцилляторных матриц. Это означает, что собственные значения различны и собственные векторы  $\mathbf{u}_i$  обладают всеми свойствами установленными в параграфе 6.10. Также установлено, что не только  $\mathbf{u}_i$ , а также и  $\theta_i, \tau_i, \phi_i$ , наклоны, моменты и поперечные силы обладают теми же свойствами (теорема 8.2.2 и упр. 8.2.1). Теорема 8.2.2 позволяет получить дополнительный результат о том, что балка всегда отклоняется от оси на свободном конце. В параграфе 8.4 осцилляторные свойства собственных векторов используются для упорядочивания собственных частот системы, отвечающей различным конечным условиям. В параграфе 8.5 показано, что в то время как возможно рассмотреть три спектра в качестве информации для восстановления, лучше рассматривать один спектр, который соответствует свободному концу и конечным значениям  $u_{ni}, \theta_{ni}$  отнормированного собственного вектора, как основную информацию. В этом случае условия, которым подчиняются данные, могут быть записаны при помощи детерминантных неравенств. В параграфе 8.6 предлагается процедура обращения и показано, что условия (теоремы 8.5.1), выдвинутые ранее, по существу, достаточны для того, чтобы убедиться, что все физические параметры, массы, длины и жесткости, положительны. В параграфе 8.7 описан численный метод для явного вычисления физических параметров. Этот метод базируется на блочном алгоритме Ланцоша (Lanczos).

## 8.2. Анализ собственных колебаний консольной балки

Уравнения, управляющие откликом дискретной балки, получены в параграфе 2.3. Уравнение (2.3.6) показывает, что колебание с частотой  $\omega$  подчиняется уравнению

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \phi_n \mathbf{e}_n - l_n^{-1} \tau_n \mathbf{E} \mathbf{e}_n, \quad \lambda = \omega^2,$$

где  $\mathbf{E}$  удовлетворяет уравнению (2.2.10),  $\mathbf{e}_n = \{0, 0, \dots, 1\}$ , а  $\phi_n$  и  $\tau_n$  являются изгибающим моментом и поперечной силой, примененными к свободному концу. Это означает, что свободные колебания удовлетворяют уравнению

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (8.2.1)$$

которое редуцируется к стандартному виду

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (8.2.2)$$

подстановками

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}. \quad (8.2.3)$$

**Теорема 8.2.1.** *Матрица  $\mathbf{A}$  является знаково-осцилляторной.*

**Доказательство.** Уравнение (2.3.7) показывает, что

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T,$$

где  $\mathbf{L}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}}$  являются диагональными матрицами с положительными коэффициентами.

Заметим, что согласно параграфу 6.7 матрица  $\mathbf{A}$  является знаково-осцилляторной (SO), если  $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{Z} = \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$  является осцилляторной (O). Матрица

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

обладает свойством NTN (см. начало параграфа 6.6). Также упр. 6.7.6 утверждает, что  $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{L}^{-1}\widetilde{\mathbf{E}}$  обладает свойством NTN, как и транспонированная к ней матрица, а значит, матрицы  $\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{K}}\widetilde{\mathbf{B}}^T$  и  $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{D}^{-1}$  тоже обладают этими свойствами. Согласно теореме 6.7.3 для доказательства того, что  $\widetilde{\mathbf{A}}$  является осцилляторной, достаточно установить, что  $\widetilde{a}_{i+1,i} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Это было проверено ранее. Следовательно,  $\widetilde{\mathbf{A}}$  обладает свойством O, и матрица  $\mathbf{A}$  является знаково-осцилляторной. ■

Теорема 8.2.1 имеет важные следствия. Она означает, что собственные значения  $(\lambda_i)_1^n$  являются различными (следствие к теореме 6.10.1), что последний элемент,  $u_{ni}$  каждого собственного вектора  $\mathbf{u}_i$  в уравнении (8.2.1) может быть выбран (строго) положительным (следствие к теореме 6.10.2); заметим, что из уравнения (8.2.3) следует равенство  $v_j = d_j u_j$ , откуда, так как  $v_n > 0$ , получаем, что  $u_n > 0$ ; кроме того,  $u_{ji}$  удовлетворяют неравенствам (6.10.3). Мы докажем следующую теорему:

**Теорема 8.2.2.** Векторы  $(\theta_j)_1^n$  являются собственными векторами знаково-осцилляторной матрицы.

**Доказательство.** Так как  $\theta = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{u}$ , следовательно,  $\mathbf{u} = \mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\theta$ , получаем

$$\lambda\mathbf{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\theta = \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\theta),$$

откуда

$$\lambda(\mathbf{L}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L})\theta = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\theta$$

или

$$\lambda\mathbf{G}\theta = \mathbf{H}\theta, \quad \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\theta = \lambda\theta.$$

Матрица  $\mathbf{G}$  обладает свойством  $\mathbf{O}$ , а значит  $(\widetilde{\mathbf{G}}^{-1})$  тоже обладает свойством  $\mathbf{O}$  (теорема 6.7.5). Матрица  $\mathbf{H}$  обладает свойством  $\mathbf{SO}$ , а значит, и матрица  $\widetilde{\mathbf{H}}$  обладает свойством  $\mathbf{O}$ . Следовательно, согласно упр. 6.7.7, матрица  $(\widetilde{\mathbf{G}}^{-1}\widetilde{\mathbf{H}})$  обладает свойством  $\mathbf{O}$ , т.е.  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$  является  $\mathbf{SO}$ -матрицей. ■

Теорема 8.2.2 означает, что  $\theta_i$  должен удовлетворять ограничениям на собственные векторы матрицы, обладающей свойством  $\mathbf{SO}$ , например,  $\theta_{n,i} \neq 0$ . Покажем, что для данной  $\mathbf{SO}$ -матрицы, контролирующей балку, справедливо: если  $u_{n,i}$  выбраны так, что  $u_{n,i} > 0$ , т.е. все миноры  $u_{n,s}$  из теоремы 6.10.3 являются положительными, то  $\theta_{n,i}$ , а следовательно, и все соответствующие миноры

$$\mathcal{V}_{n,s} = \Theta(n-p+1, n-p+2, \dots, n; i_1, i_2, \dots, i_p)$$

являются положительными. Достаточно доказать следующую теорему:

**Теорема 8.2.3.** Каждый собственный вектор консольной балки удовлетворяет неравенству  $u_{n,j}\theta_{n,j} > 0$ .

**Доказательство.** Выберем  $u_j$  так, что  $u_{n,j} > 0$ . Существует такой индекс  $r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ), что

- i)  $u_{i,j} > 0, \quad i = r, r+1, \dots, n,$
- ii)  $u_{r-1,j} \leq 0.$

Заметим, что если  $j = 1$ , то  $r = 1$ ; и получаем  $u_{0,1} = 0$ .

Следовательно,  $\theta_{r,j} = (u_{r,j} - u_{r-1,j})/l_r > 0$ .

Так как

$$\phi_j = \lambda_j \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{u}_j,$$



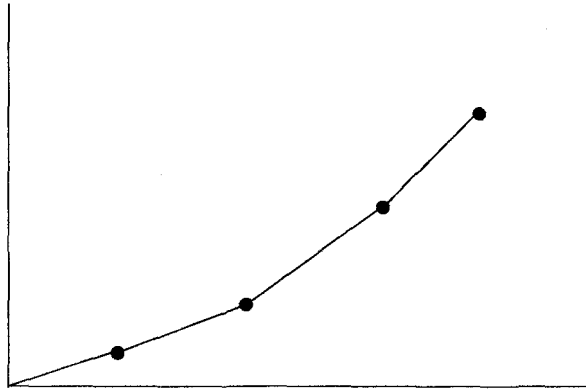


Рис. 8.2.1. Первая волна постоянно растет

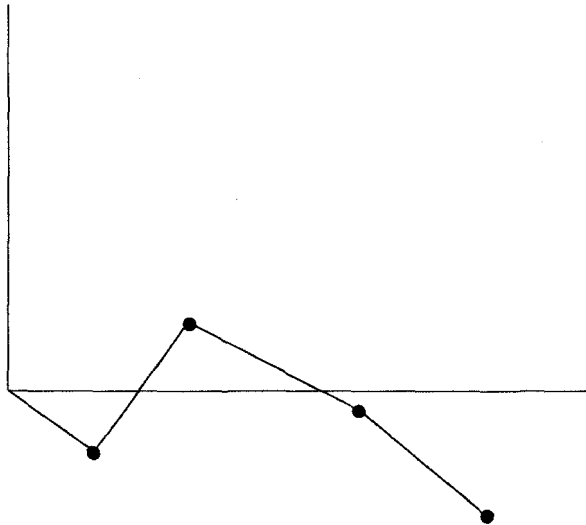


Рис. 8.2.2. Конец балки отгибается в сторону от оси

то из вида матрицы  $\mathbf{E}^{-1}$ , заданной уравнением (2.2.10), получаем

$$\phi_{i,j} > 0 \quad i = r - 1, \dots, n - 1.$$

Однако

$$\tau_j = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{L} \phi_j$$

а значит, снова

$$\tau_{i,j} > 0 \quad i = r - 1, \dots, n - 1.$$

Рассмотрим уравнение, связывающее  $\theta_i$  и  $\tau_i$ , а именно

$$\theta_{i+1} - \theta_i = k_{i+1}^{-1} \tau_i,$$

и сумму от  $r$  до  $n - 1$ , чтобы получить

$$\theta_{n,j} - \theta_{r,j} = \sum_{i=r}^{n-1} k_{i+1}^{-1} \tau_{i,j} > 0,$$

а значит,  $\theta_{n,j} > 0$ . ■

В теореме 8.2.2, показывая, что  $\theta_j$  являются собственными векторами знаково-осцилляторных матриц, мы установили, что  $\mathbf{u}_j$  и  $\theta_j$  должны иметь в точности  $j - 1$  перемену знака. Это означает, что первая волна  $\mathbf{u}_1$  постоянно возрастает, т. е.

$$0 < u_{1,1} < u_{2,1} < \dots < u_{n,1},$$

как показано на рисунке 8.2.1,  $j$ -я волна ( $j > 1$ ) имеет  $j - 1$  компоненту, которые выпуклы в направлении осей, и последнюю компоненту, которая отклоняется от осей, как показано на рисунке 8.2.2.

### Упражнения 8.2

- 1) Покажите, что  $\tau_j$  и  $\phi_j$  являются собственными векторами, отвечающими уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda \widehat{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\tau} \\ \lambda \mathbf{L} \mathbf{E}^{-T} \widehat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\phi}, \end{aligned}$$

и каждый из них является собственным вектором для знаково-осцилляторной матрицы.

## 8.3. Вынужденный отклик балки на внешнее воздействие

Отклик на поперечную силу и изгибающий момент подчиняются уравнению (2.3.6), которое для колебаний с частотой  $\omega$  имеет вид

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \phi_n \mathbf{e}_n - l_n^{-1} \tau_n \mathbf{E} \mathbf{e}_n. \quad (8.3.1)$$

Так как собственные векторы  $\mathbf{u}_j$  незакрепленной балки порождают пространство  $V_n$  и являются ортогональными относительно матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ , можно записать

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j$$

и найти

$$\alpha_j = (\phi_n u_{n,j} + \tau_n \theta_{n,j}) / (\lambda_j - \lambda),$$

где волны отнормированы таким образом, что

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k = \delta_{jk}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_n u_{n,j} + \tau_n \theta_{n,j}) \mathbf{u}_j}{\lambda_j - \lambda}, \quad (8.3.2)$$

и посредством домножения на  $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T$  мы получим

$$\theta = \sum_{j=1}^n \frac{(\phi_n u_{n,j} + \tau_n \theta_{n,j}) \theta_j}{\lambda_j - \lambda}. \quad (8.3.3)$$

Эти два уравнения полностью характеризуют вынужденный отклик балки. В терминологии Бишопа и Джонсона (Bishop, Johnson) [34] (1960) равенства (8.3.2), (8.3.3) определяют *концевые динамические характеристики* балки: смещение (наклон) по одной координате  $i$  под действием единичной поперечной силы и изгибающего момента на конце. В частности, для концевого смещения и наклона мы получаем

$$u_n = \alpha \phi_n + \alpha' \tau_n, \quad (8.3.4)$$

$$\theta_n = \alpha' \phi_n + \alpha'' \tau_n, \quad (8.3.5)$$

где

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{(u_{n,j})^2}{\lambda_j - \lambda}, \quad \alpha' = \sum_{j=1}^n \frac{u_{n,j} \theta_{n,j}}{\lambda_j - \lambda}, \quad (8.3.6)$$

$$\alpha'' = \sum_{j=1}^n \frac{(\theta_{n,j})^2}{\lambda_j - \lambda}. \quad (8.3.7)$$

### 8.4. Спектральные характеристики колебаний балки

Теперь предположим, что левый конец балки остается зажатым, тогда как условия на правом конце меняются. Возможные краевые условия и собственные значения (собственные частоты)<sup>2</sup> имеют вид:

свободные	$\phi_n = 0 = \tau_n (\lambda_i)_1^n$
скользящие	$\theta_n = 0 = \phi_n (\sigma_i)_1^{n-1}$
анти-резонансные	$u_n = 0 = \phi_n$ или $(\nu_i)_1^{n-1}$ $\theta_n = 0 = \tau_n$
шарнирные	$u_n = 0 = \tau_n (\mu_i)_1^{n-1}$
закрепленные	$u_n = 0 = \theta_n (\gamma_i)_1^{n-2}$

Заметим, что антирезонансные частоты — это те частоты, при которых применение конечных изгибающих моментов не приводит к смещению концов; мы покажем, что существует  $n - 1$  таких частот и что они также являются частотами, при которых применение концевой поперечной силы не приводит к вращению концов.

Установим связь между различными собственными значениями и динамическими характеристиками, полученными в параграфе 8.3. Сформулируем следующую теорему:

**Теорема 8.4.1.** Если  $(p_j)_1^n > 0$  и  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , то уравнение

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{x_j - x} = 0$$

имеет  $n - 1$  вещественных нулей  $\xi_j$ , которые удовлетворяют неравенству

$$x_j < \xi_j < x_{j+1}.$$

**Доказательство.** В каждом интервале  $(x_j, x_{j+1})$  функция  $f(x)$  строго возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$  и пересекает ось  $x$  один раз. ■

Подставим конечные условия в уравнения (8.3.6), (8.3.7), начиная с условия скользящих концов;

$$\sum_{j=1}^n \frac{(\theta_{n,j})^2}{\lambda_j - \lambda} = 0 \quad \text{имеет нули } (\sigma_i)_1^{n-1}. \quad (8.4.1)$$

Используя теорему 8.2.3, мы можем утверждать, что

$$\sum_{j=1}^n \frac{u_{n,j} \theta_{n,j}}{\lambda_j - \lambda} = 0 \quad \text{имеет нули } (\nu_i)_1^{n-1} \quad (8.4.2)$$

и

$$\sum_{j=1}^n \frac{(u_{n,j})^2}{\lambda_j - \lambda} = 0 \quad \text{имеет нули } (\mu_i)_1^{n-1}. \quad (8.4.3)$$

Для локализации собственных значений нам потребуется

**Теорема 8.4.2.** Пусть  $(p_j)_1^n > 0$ ,  $(q_j)_1^n > 0$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{x_j - x}, \quad g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{x_j - x}$$

и  $(\xi_i)_1^{n-1}$ ,  $(\eta_i)_1^{n-1}$  являются нулями  $f(x)$ ,  $g(x)$  соответственно. Если  $p_j q_i - p_i q_j > 0$  для  $i > j$ , то  $\xi_i > \eta_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Доказательство.**

$$p_i g(x) - q_i f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{p_i q_j - p_j q_i}{x_j - x}.$$

Возьмем  $x = \xi_i$ , так, что  $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ , и разделим сумму на две части, следовательно,

$$p_i g(\xi_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{p_j q_i - p_i q_j}{\xi_i - x_j} + \sum_{j=i+1}^n \frac{p_i q_j - p_j q_i}{x_j - \xi_i}.$$

В наших условиях каждый из числителей и знаменателей в правой части положителен, а значит  $g(\xi_i) > 0$ , т.е.  $g(x)$  станет положительной, как только  $f(x)$  станет равной нулю, т.е.  $\xi_i > \eta_i$ . ■

Заметим, что, как и при рассмотрении положительности в главе 6, достаточно рассмотреть  $p_j q_{j+1} - p_{j+1} q_j > 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , тогда  $p_j q_i - p_i q_j > 0$  для всех  $i > j$ . Утверждение, обратное теореме 8.4.2, является неверным, см. упр. 8.4.1.

Применим теперь эту теорему к  $\sigma_i$  и  $\nu_i$ . Рассмотрим  $p_j = u_{n,j} \theta_{n,j}$  и  $q_j = \theta_{n,j}^2$ , тогда

$$p_j q_i - p_i q_j = \theta_{n,i} \theta_{n,j} (u_{n,j} \theta_{n,i} - u_{n,i} \theta_{n,j}) = \theta_{n,i} \theta_{n,j} (u_{n,i} u_{n-1,j} - u_{n,j} u_{n-1,i}) / \ell_n.$$

Для доказательства положительности мы будем использовать теорему 6.10.3 при  $p = 2$ ,  $i_1 = j$ ,  $i_2 = i$ ; получаем

$$\begin{vmatrix} u_{n-1,j} & u_{n-1,i} \\ u_{n,j} & u_{n,i} \end{vmatrix} > 0$$

для  $i > j$ , и следовательно,  $\nu_i > \sigma_i$ . Полностью аналогично получим, что  $\mu_i > \nu_i$ . Так как условие закрепленности конца получается применением дополнительного ограничения  $\theta_n = 0$  к условию шарнирного конца, обычная теория колебаний при ограничениях позволяет заключить, что  $\gamma_i > \mu_i$ .

Это позволяет получить следующее упорядочивание:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 < \sigma_1 < \nu_1 < \mu_1 < (\gamma_1, \lambda_2) < \sigma_2 < \nu_2 < \\ < \mu_2 < (\gamma_2, \lambda_3) < \dots < (\gamma_{n-2}, \lambda_{n-1}) < \\ < \sigma_{n-1} < \nu_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Заметим, что относительное положение  $\gamma_j$  и  $\lambda_{j+1}$  пока еще не определено; в числовых примерах всегда получается, что  $\gamma_j > \lambda_{j+1}$ . См. работы Глэдвелла [105] (1985) и [117] (1991b).

#### Упражнения 8.4

- 1) Постройте контрпример, показывающий, что утверждение, обратное теореме 8.4.2, является неверным. Рассмотрите  $n = 3$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 4, 7)$ ,  $(p_1, p_2, p_3) = (4, 1, 4)$ ,  $(q_1, q_2, q_3) = (5, 1, 7)$ . И выберите  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ , покажите, что  $g(\xi_1) > 0$ ,  $g(\xi_2) > 0$ , а значит  $\xi_1 > \eta_1$ ,  $\xi_2 > \eta_2$ , однако  $p_1 q_2 - p_2 q_1 < 0$ ,  $p_2 q_3 - p_3 q_2 > 0$ .
- 2) Покажите, что если  $p_j > 0$ ,  $q_j > 0$ ,  $p_j q_{j+1} - p_{j+1} q_j > 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , то  $p_j q_i - p_i q_j > 0$  для всех  $i > j$ . Сравните этот результат с теоремой 6.8.1.

- 3) Используйте уравнения (8.4.2), (8.4.3) для доказательства формулы

$$\theta_{n,i}^2 = \frac{c_1 \prod_{j=1}^{n-1} (\sigma_j - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^{n'} (\lambda_j - \lambda_i)}; \quad u_{n,i}^2 = \frac{c_2 \prod_{j=1}^n (\mu_j - \lambda_i)}{\prod_{j=1}^{n'} (\lambda_j - \lambda_i)},$$

здесь ' обозначает, что в соответствующем произведении  $j \neq i$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  являются константами.

- 4) Разработайте интуитивные аргументы, показывающие, что  $\sigma_i < \mu_i$ , рассматривая балку с двумя закрепленными концами, получающуюся из двух одинаковых консолей длины  $\ell/2$ , свободные концы которых сварены друг с другом.
- 5) Собственные значения  $(\gamma_i)_1^{n-2}$  равняются (частотам)<sup>2</sup>, для которых применение силы и момента к свободному концу приводят к  $u_n = \theta_n = 0$ . Используйте уравнения (8.3.4)-(8.3.7) для доказательства того, что  $\gamma_i$  являются корнями

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{(u_{n,i}\theta_{n,j} - u_{n,j}\theta_{n,i})^2}{(\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} = 0.$$

## 8.5. Условия на начальные данные обратной задачи

Обратная задача собственных значений для балки заключается в построении балки с заданными собственными значениями. Барсилон показал (для своей модели), что балка не может быть однозначно восстановлена по двум спектрам, и сделал попытку доказательства того, что восстановить балку можно (с точностью до скалярного множителя) по трем подходящим образом выбранным спектрам. Эта процедура (в наших обозначениях) состояла в выборе  $(\lambda_i, \nu_i, \mu_i)_1^n$  (и замечании, что имеется  $n$  значений  $\nu_i$  и  $\mu_i$ , а не  $n - 1$ , как в модели на рисунке 2.3.1), удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 \dots \lambda_n < \nu_n < \mu_n,$$

далее вычислялись частоты  $(\sigma_i)_1^n$  и  $(\gamma_i)_1^{n-1}$  (снова заметим, что имеется  $n$  значений  $\sigma_i$  и  $n - 1$  значение  $\gamma_i$ ) на основе использования некоторых рекурсивных соотношений. Для этой модели было невозможно доказать, что собственные значения  $\sigma_i, \gamma_i$ , вычисленные таким образом,

удовлетворяют полной системе неравенств (аналогичной (8.4.4)). Для выполнения неравенств потребовалось наложить ряд вспомогательных условий на  $(\lambda_i, \nu_i, \mu_i)_1^n$ . Второй шаг, осуществленный Барсилоном, состоял в процедуре забывания для вычисления параметров последнего отрезка  $l_n, k_n, m_n$  и для вычисления соответствующих собственных значений  $(\lambda_i^*, \nu_i^*, \mu_i^*)_1^{n-1}$  усеченной системы, полученной посредством удаления последнего отрезка. Параметры  $l_n, k_n, m_n$  оказались все положительными, однако даже при дополнительном условии на  $(\lambda_i, \nu_i, \mu_i)_1^n$  не удалось доказать, что новые (помеченные \*) собственные значения удовлетворяют необходимому упорядочиванию. Это означает, что если продолжить процедуру, то отрицательные массы, жесткости или длины могут появиться на некотором шаге. Барсилон замечает, что надо рассмотреть дополнительные условия на данные, предпочтительно условия, которые могут применяться с самого начала, таким образом, исчезла бы необходимость проверок на каждом шаге процедуры. Мы собираемся сформулировать такие условия и построить новую процедуру забывания.

Спектры, из которых будет извлекаться информация для обратной задачи, могут быть поделены на три части:

- (i)  $(\lambda_i)_1^n$ ;
- (ii)  $(\sigma_i, \nu_i, \mu_i)_1^{n-1}$ ;
- (iii)  $(\gamma_i)_1^{n-2}$ .

Пусть дано условие (i). Каждый спектр, определяемый условием (ii), определяет с точностью до произвольного множителя множество коэффициентов  $(\theta_{n,i})^2, (u_{n,i}\theta_{n,i})$  или  $(u_{n,i})^2$  соответственно из уравнений на собственные значения (8.4.1)–(8.4.3); см. упр. 8.4.3 и аналогичный результат для  $u_{n,i}\theta_{n,i}$ . Если любые два спектра из условия (ii) заданы, тогда оба множества коэффициентов дают третье множество и, следовательно, третий спектр. (Заметим, что так как  $u_{n,i}\theta_{n,i} > 0$ , не существует неопределенности, связанной с извлечением квадратного корня из  $u_{n,i}^2\theta_{n,i}^2$ .) Однако если два заданных спектра, скажем  $(\nu_i)_1^{n-1}$  и  $(\mu_i)_1^{n-1}$ , удовлетворяют подходящему упорядочиванию,  $\nu_i < \mu_i$ , то третье множество  $(\sigma_i)_1^{n-1}$  все равно может не удовлетворять подходящему упорядочиванию  $\sigma_i < \nu_i$ . Два контрпримера предлагаются в упражнениях 8.5.1, 8.5.2, это наглядно демонстрирует, что требование упорядоченности для двух заданных спектров, например  $\nu_i < \mu_i$ , являются недостаточными для существования реалистичной модели с положительными  $l_i, k_i, m_i$ ; они даже не обеспечивают упорядочивание для оставшейся части спектра. Докажем теперь важную теорему:



**Теорема 8.5.1.** *Необходимым условием существования реалистичной (т. е. положительной) модели, отвечающей множествам данных  $(\lambda_i, u_{n,i}, \theta_{n,i})_1^n$ , является тот факт, что матрица  $\mathbf{P} \in M_{n+1,n}$  вида*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \\ \theta_{n,1} & \theta_{n,2} & \dots & \theta_{n,n} \\ \lambda_1 u_{n,1} & \lambda_2 u_{n,2} & \dots & \lambda_n u_{n,n} \\ \lambda_1 \theta_{n,1} & \lambda_2 \theta_{n,2} & \dots & \lambda_n \theta_{n,n} \\ \lambda_1^2 u_{n,1} & \lambda_2^2 u_{n,2} & \dots & \lambda_n^2 u_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

*имеет только положительные миноры. Заметим, что последняя строка  $\mathbf{P}$  имеет вид*

$$\lambda_1^r u_{n,1} \quad \lambda_2^r u_{n,2} \quad \dots \quad \lambda_n^r u_{n,n}$$

*или*

$$\lambda_1^r \theta_{n,1} \quad \lambda_2^r \theta_{n,2} \quad \dots \quad \lambda_n^r \theta_{n,n}$$

*в зависимости от того, является  $n$  четным или нечетным, здесь  $r = \lfloor n/2 \rfloor$ .*

**Доказательство.** В силу свойства строк матрицы  $\mathbf{P}$ , теорема 6.8.1 показывает, что все миноры положительны тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} P(1, 2, \dots, p; i, i+1, \dots, i+p-1) &> 0; \\ P(2, 3, \dots, p+1; i, i+1, \dots, i+p-1) &> 0 \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

для  $p = 1, 2, \dots, n$  и  $i = 1, 2, \dots, n-p+1$ .

Доказательство напрямую следует из теоремы 6.10.3 для

$$U(n-1, n; i, i+1) = \begin{vmatrix} u_{n-1,i} & u_{n-1,i+1} \\ u_{n,i} & u_{n,i+1} \end{vmatrix} > 0.$$

Однако рекуррентное соотношение  $u_{n-1} = u_n - l_n \theta_n$  дает равенство

$$\begin{aligned} U(n-1, n; i, i+1) &= \begin{vmatrix} u_{n,i} - l_n \theta_{n,i} & u_{n,i+1} - l_n \theta_{n,i+1} \\ u_{n,i} & u_{n,i+1} \end{vmatrix} \\ &= l_n \begin{vmatrix} u_{n,i} & u_{n,i+1} \\ \theta_{n,i} & \theta_{n,i+1} \end{vmatrix} = l_n P(1, 2; i, i+1) > 0, \end{aligned}$$

которое мы запишем в сокращенных обозначениях

$$[u_{n-1}, u_n] = [u_n - l_n \theta_n, u_n] = l_n [u_n, \theta_n] = l_n P(1, 2; i, i+1).$$

Аналогично соотношения между  $u_i, \theta_i, \tau_i, \phi_i$  из параграфа 2.3 и теоремы 6.10.3, примененные к  $\theta_i$  (заметим, что теорема 8.2.2 показывает, что  $\theta_j$  является собственным вектором для SO-матрицы), позволяют получить

$$\begin{aligned} 0 < [\theta_{n-1}, \theta_n] &= [\theta_n - k_n^{-1}\tau_{n-1}, \theta_n] = -k_n^{-1}[\tau_{n-1}, \theta_n] \\ &= -k_n^{-1}l_n[\theta_{n-1}, \theta_n] = -k_n^{-1}l_n m_n[\lambda u_n, \theta_n] \\ &= k_n^{-1}l_n m_n[\theta_n, \lambda u_n] = k_n^{-1}l_n m_n P(2, 3; i, i+1). \end{aligned}$$

Действуя аналогично, можно установить связь между минорами из теоремы 6.10.3, для  $U$  или  $\Theta$ , с минорами матрицы  $P$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} U(n-2, n-1, n; i, i+1, i+2) &= P_{n-2}P(1, 2, 3; i, i+1, i+2), \\ \Theta(n-2, n-1, n; i, i+1, i+2) &= Q_{n-2}P(2, 3, 4; i, i+1, i+2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_{n-2} &= k_n^{-1}l_n^2 l_{n-1} m_n, \\ Q_{n-2} &= k_n^{-1}k_{n-1}^{-1}l_n^2 l_{n-1} m_n m_{n-1} \end{aligned}$$

и более общо:

$$\begin{aligned} U(n-p+1, n-p+2, \dots, n; i, i+1, \dots, i+p-1) &= \\ &= P_{n-p+1}P(1, 2, \dots, p; i, i+1, i+p-1), \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

$$\begin{aligned} \Theta(n-p+1, n-p+2, \dots, n; i, i+1, \dots, i+p-1) &= \\ &= Q_{n-p+1}P(2, 3, \dots, p+1; i, i+1, \dots, i+p-1). \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

где, как нам будет важно в дальнейшем,  $P_{n-p+1}$  и  $Q_{n-p+1}$  являются произведениями  $m_i, l_i, k_i$  для  $i = n-p+2, \dots, n$ . ■

Далее мы покажем, что тот факт, что матрица  $\mathbf{P}$  обладает свойством ТР, является также *достаточным* условием существования реалистичной модели.

### Упражнения 8.5

- 1) Постройте контрпример для демонстрации того, что неравенства  $\lambda_i < \nu_i < \mu_i < \lambda_{i+1}$  не достаточно для выполнения  $\lambda_i < \sigma_i < \nu_i < \mu_i < \lambda_{i+1}$ . Рассмотрите  $n = 3$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 4, 7)$ ,  $(u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}) = (2, 1, 2)$  так, что  $(\mu_1, \mu_2) = (2, 5)$ . Возьмите  $\theta_{3,1} = 3/2$ ,  $\theta_{3,2} = 1$  и выберите  $\theta_{3,3}$  так, что  $\nu_1 < \mu_1$ ,  $\nu_2 < \mu_2$ ,  $\sigma_1 < \mu_1$ , однако  $\sigma_2 > \mu_2$ .

- 2) Для тех же  $\lambda_i$  и  $u_{3,i}$  при  $\theta_{3,1} = 1$  найдите  $\theta_{3,3}$  такое, что  $\sigma_1 < \mu_1$ ,  $\sigma_2 < \mu_2$ ,  $\nu_2 < \mu_2$ , однако  $\nu_1 > \mu_1$ .
- 3) Рассмотрите  $n = 3$ ,  $u_{n,i} = 1$ ,  $\theta_{n,1} = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$  и выберите два таких множества значений для  $\theta_{n,2}$  и  $\theta_{n,3}$ ,  $\lambda_2, \lambda_3$ , что условие положительности из теоремы 8.5.1 справедливо и  $\gamma_1 < \lambda_2$  в одном случае,  $\gamma_1 > \lambda_2$  в другом случае. Это доказывает тот факт, что относительные положения  $\gamma_i$  и  $\lambda_{i+1}$  не являются определенными.

## 8.6. Использование ортогональности в обратной задаче

В этом параграфе мы покажем, как найти систему параметров, по крайней мере теоретически, по данной информации о собственных значениях, и получим необходимые и достаточные условия на эти собственные значения, гарантирующие то, что система параметров является положительной.

Допустим, нам даны  $(\lambda_i, u_{n,i}, \theta_{n,i})_1^n$  для консольной балки, т.е.  $\tau_{n,i} = 0 = \phi_{n,i}$ . Мы покажем, что можно построить балку, и если данные удовлетворяют условиям из теоремы 8.5.1, то все параметры системы являются положительными.

Рассмотрим систему уравнений

$$\lambda_i \mathbf{M} \mathbf{u}_i = \mathbf{K} \mathbf{u}_i$$

и, как обычно, выберем  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Тогда

$$\mathbf{M} \mathbf{U} \Lambda = \mathbf{K} \mathbf{U}, \quad (8.6.1)$$

ортогональность  $\mathbf{u}_i$  относительно матриц  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  влечет равенство

$$\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \Lambda. \quad (8.6.2)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T, \quad (8.6.3)$$

откуда

$$\frac{1}{m_j} = \sum_{i=1}^n (u_{j,i})^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6.4)$$

Так как  $(u_{n,i})_1^n$  известны, мы нашли

$$\frac{1}{m_n} = \sum_{i=1}^n (u_{n,i})^2. \quad (8.6.5)$$

Матрица  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$  является диагональной; ее коэффициент  $j, j-1$  равен

$$\sum_{i=1}^n u_{j,i}u_{j-1,i} = 0,$$

что при условии  $u_{j-1} = u_j - l_j \theta_j$  позволяет получить

$$\sum_{i=1}^n (u_{j,i})^2 - l_j \sum_{i=1}^n u_{j,i} \theta_{j,i} = 0,$$

далее, используя (8.6.4), получим,

$$\frac{1}{m_j l_j} = \sum_{i=1}^n u_{j,i} \theta_{j,i}, \quad (8.6.6)$$

откуда при  $j = n$  получаем  $l_n$ .

Следующий шаг состоит в определении  $k_n$ . Для этого нам потребуется явное представление для  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\widehat{\mathbf{E}}\mathbf{K}\widehat{\mathbf{E}}^T \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T.$$

Откуда получаем

$$\widehat{\mathbf{K}}^{-1} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}. \quad (8.6.7)$$

Теперь используем второе из уравнений (8.6.2), чтобы установить, что

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^T,$$

при подстановке этой матрицы в уравнение (8.6.7) получим

$$\widehat{\mathbf{K}}^{-1} = \mathbf{E}^T (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{U}) \Lambda^{-1} (\mathbf{U}^T \mathbf{E} \mathbf{L}^{-1}) \mathbf{E}.$$

Однако

$$\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{U},$$

значит,

$$\widehat{\mathbf{K}}^{-1} = \mathbf{E}^T \mathbf{\Theta} \Lambda^{-1} \mathbf{\Theta}^T \mathbf{E},$$

откуда получим

$$\frac{1}{k_j} = \sum_{i=1}^n \frac{(\theta_{j,i} - \theta_{j-1,i})^2}{\lambda_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Однако  $\theta_{j,i} - \theta_{j-1,i} = k_j^{-1} \tau_{j-1,i}$ , т. е.

$$k_j = \sum_{i=1}^n \frac{(\tau_{j-1,i})^2}{\lambda_i}. \quad (8.6.8)$$

Теперь рассмотрим  $j = n$ , тогда  $\tau_{n-1,i} = l_n \phi_{n-1,i} = l_n m_n \lambda_i u_{n,i}$ , откуда

$$k_n = m_n^2 l_n^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_{n,i})^2. \quad (8.6.9)$$

Найдя  $m_n, l_n$  и  $k_n$ , сформулируем остальные шаги алгоритма восстановления системы:

- i) положим  $j = n$ ;
- ii)  $u_{n,i}, \theta_{n,i}, \tau_{n,i} \equiv 0 \equiv \phi_{n,i}$  известны из исходных данных;
- iii) вычислим  $m_j, l_j$  по уравнениям (8.6.5), (8.6.6);

$$\begin{aligned} u_{j-1,i} &= u_{j,i} - l_j \theta_{j,i}, \\ \text{iv) вычислим } \phi_{j-1,i} &= \phi_{j,i} + m_j \lambda_i u_{j,i}, \\ \tau_{j-1,i} &= \tau_{j,i} + l_j \phi_{j-1,i}; \end{aligned}$$

- v) вычислим  $k_j$  по формуле (8.6.8);
- vi) вычислим  $\theta_{j-1,i} = \theta_{j,i} - \tau_{j-1,i}/k_j$ ;
- vii) положим  $j = j - 1$ . Если  $j > 1$ , то перейдем к шагу iii), иначе остановимся.

Заметим, что величины  $(u_{n,i}, \theta_{n,i})_1^n$  могут быть найдены только с точностью до произвольного множителя. Если второе, штрихованное, множество связано с первым посредством уравнений

$$u'_{j,i} = \alpha u_{j,i}, \quad \theta'_{j,i} = \beta \theta_{j,i}, \quad (8.6.10)$$

то наш алгоритм дает уравнение

$$m'_j = m_j/\alpha^2, \quad k'_j = k_j/\beta^2, \quad l'_j = \alpha l_j/\beta \quad (8.6.11)$$

или

$$\frac{m'_j l_j^2}{k'_j} = \frac{m_j l_j^2}{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6.12)$$

Уравнения (8.6.11), (8.6.12) определяют класс эквивалентности для систем, соответствующих имеющимся данным. Справедливость процедуры обращения основывается на следующей теореме.

**Теорема 8.6.1.** *Полная положительность матрицы  $\mathbf{P}$  из теоремы 8.5.1 является необходимым и достаточным условием существования настоящей (положительной) модели, имеющей три заданных спектра, т. е.  $(\lambda_i)_1^n$  и два спектра  $(\sigma_i, \nu_i, \mu_i)_1^{n-1}$ .*

**Доказательство.** Необходимость была доказана в теореме 8.5.1. Докажем достаточность. Рассмотрим уравнения

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{\Theta} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{U}$$

и построим матрицу

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{\Theta}\mathbf{U}^T.$$

Теперь рассмотрим уравнение для присоединенной матрицы  $p$ -го порядка, основанное на формуле Коши–Бине:

$$\mathbf{B}_p = \mathcal{L}_p^{-1}\mathcal{E}_p^T\mathcal{M}_p^{-1} = \mathbf{\Theta}_p^T\mathbf{u}_p^T.$$

Так как  $\mathcal{L}_p^{-1}$  и  $\mathcal{M}_p^{-1}$  являются диагональными матрицами и все главные миноры матрицы  $\mathcal{E}_p^T$  являются единичными, правый нижний элемент матрицы  $\mathbf{B}_p$  равен

$$b_{NN} = \prod_{k=n-p+1}^n (m_k l_k)^{-1} = \sum_{s=1}^N \nu_{N,s} \mathcal{M}_{N,s}, \quad (8.6.13)$$

здесь обозначения такие же, как и в параграфе 6.2.

Будем рассуждать по индукции. Пусть условия (8.5.2) выполнены, и пусть все  $l_n, l_{n-1}, \dots, l_{n-p+2}$  являются положительными. Как  $\mathcal{M}_{N,s}$ ,

так и  $\mathcal{V}_{N,S}$  могут быть записаны в уравнениях (8.5.3), (8.5.4) в качестве произведения коэффициентов, содержащих  $m_j, k_j^{-1}$ , которые являются положительными, и коэффициентов, содержащих  $l_n, l_{n-1}, \dots, l_{n-p+2}$ , которые положительны по предположению. Все эти  $\mathcal{V}_{N,S}, \mathcal{U}_{N,S}$  являются положительными. Следовательно, уравнение (8.6.13) показывает, что  $l_{n-p+1} > 0$ . Однако  $l_n > 0$ , а значит  $l_j$  являются положительными. ■

## 8.7. Численный метод решения обратной задачи

Алгоритм, описанный в параграфе 8.6, имеет в первую очередь теоретическое значение. Он показывает, что если исходные данные удовлетворяют условиям теоремы 8.5.1, то система параметров, построенная согласно этому алгоритму, будет положительной. Однако, стартуя, как это предписано, со свободного конца и вычисляя последовательно параметры модели, алгоритм оказывается также плохо обусловлен, как обратная задача для стержня, встреченная нами в параграфе 4.3.

Для получения надежного вычислительного алгоритма мы будем использовать блочный алгоритм Ланцоша, описанный в параграфе 5.5. Чтобы применить этот алгоритм, мы приведем основное уравнение (8.2.1) к стандартному виду

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{u}.$$

Для применения блочного алгоритма Ланцоша к пятидиагональной матрице  $\mathbf{A}$  ( $p = 2$ ) будем выполнять алгоритм, начиная со свободного конца ( $n$ ), а не с закрепленного (1). Следовательно, нам потребуются векторы  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , содержащие  $n$ -ый и  $(n - 1)$ -ый коэффициенты отнормированных собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \{q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,n}\}, \\ \mathbf{x}_2 &= \{q_{n-1,1}, q_{n-1,2}, \dots, q_{n-1,n}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} q_{n,i} &= d_n u_{n,i}, \\ q_{n-1,i} &= d_{n-1} u_{n-1,i} = d_{n-1} \{u_{n,i} - l_n \theta_{n,i}\}. \end{aligned}$$

Уравнения (8.6.5) позволяют получить  $m_n$  и  $d_n = m_n^{\frac{1}{2}}$ . Уравнение (8.6.6) дает  $l_n$  и, следовательно,  $u_{n-1,i}$ . Тогда уравнение (8.6.4) при  $j = n - 1$  дает  $m_{n-1}$ . Следовательно, данные  $(\lambda_i, u_{n,i}, \theta_{n,i})_1^n$  позволяют построить векторы  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , которые необходимы для блочного алгоритма Ланцоша.

Предположим, что нами вычислена матрица

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}$$

из блочного алгоритма Ланцоша. Теперь нам необходимо разобраться с матрицей  $\mathbf{A}$  для получения матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ . Сделаем это аналогично тому, как это было нами осуществлено для стержня в параграфе 4.4: мы будем использовать статическое поведение систем, как это было сделано в параграфе 7.5.

Во-первых, мы применим внешние статические силы  $f_1, f_2$  к массам 1 и 2 и деформируем систему, как показано на рисунке 8.7.1.

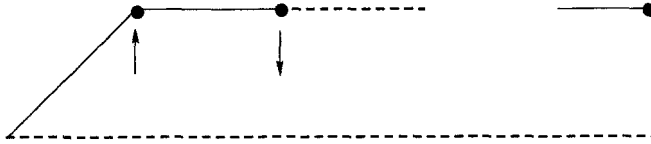


Рис. 8.7.1. Две статические силы необходимы для того, чтобы отклонить все массы на одинаковую величину

Для этой конфигурации  $\mathbf{u} = \{1, 1, \dots, 1\}$ , откуда  $\mathbf{q} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Статическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} = \{f_1, -f_2, 0, \dots, 0\},$$

т. е.

$$\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \{d_1^{-1}f_1, -d_2^{-1}f_2, 0, \dots, 0\}.$$

Рассмотрим это уравнение. Нам известна матрица  $\mathbf{A}$ , также нам известны последние две координаты  $d_{n-1}, d_n$ . Однако матрица  $\mathbf{A}$  является пяти-диагональной, а значит, зная  $d_{n-1}, d_n$ , мы можем вычислить  $d_{n-2}, \dots, d_1$  и найти  $d_1^{-1}f_1, d_2^{-1}f_2$ , а следовательно, и  $f_1, f_2$ .



Найдя массы ( $m_j = d_j^2$ ), мы найдем длины. Применим силу  $k_1 l_1^{-1}$  к  $m_1$  и найдем

$$\mathbf{u}^0 = \{l_1, l_1 + l_2, \dots, l_1 + l_2 + \dots + l_n\},$$

как показано на рисунке 8.7.2.

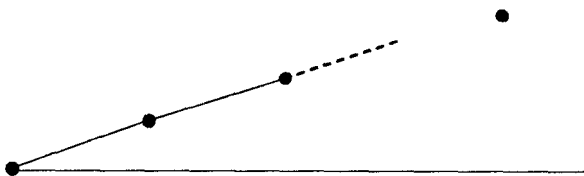


Рис. 8.7.2. Одна статическая сила отклоняет балку, как прямую линию

Уравнение

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^0 = \{k_1 l_1^{-1}, 0, \dots, 0\}$$

влечет

$$\mathbf{A}\{d_1 l_1, d_2(l_1 + l_2), \dots, d_n(l_1 + \dots + l_n)\} = \{d_1^{-1} k_1 l_1^{-1}, 0, \dots, 0\}. \quad (8.7.1)$$

Последнее означает, что если мы обратим уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \{1, 0, \dots, 0\},$$

то получим

$$d_i(l_1 + l_2 + \dots + l_i) = c x_i, \quad c = d_1^{-1} k_1 l_1^{-1}.$$

Отсюда найдем величины  $l_i$ , рассмотренные из параграфа 8.6 позволяют заключить, что все они положительны, если данные удовлетворяют условиям теоремы 8.6.1.

В качестве последнего шага, найдем  $k_i$ . Используя вид  $\mathbf{E}^{-1}$  в уравнении (2.2.10), запишем уравнение (8.7.1) следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\{1, 1, \dots, 1\} = \{d_1^{-1} k_1 l_1^{-1}, 0, \dots, 0\},$$

т. е.

$$\mathbf{L}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L}\{1, 1, \dots, 1\} = \{k_1, 0, \dots, 0\},$$

тогда, как и в параграфе 4.4, получим, что

$$\mathbf{L}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{L} = \mathbf{E}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T,$$

откуда найдем  $\hat{\mathbf{K}}$ . Восстановление завершено.

---

---

## ГЛАВА 9

# Дискретные колебания и узлы

Память необходима для всех действий рассудка.  
Блез Паскаль. *Мысли*.

### 9.1. Введение

В предыдущих главах основное внимание уделялось собственным значениям и восстановлению систем при помощи информации о собственных значениях. В настоящей главе мы будем изучать собственные векторы. В параграфах 9.2, 9.3 мы рассматриваем вопрос построения матрицы Якоби, имеющей два или более заданных собственных вектора, и затем переходим к построению пружинно-массовых систем по этим данным. В параграфе 9.4 мы разбираем более сложную задачу построения дискретной колеблющейся балки по данным о ее собственных колебаниях. До этого момента все рассматриваемые системы являлись в основном линейными, а значит соответствующие матрицы были ленточными и либо осцилляторами, либо знаково-осцилляторами. В последующих параграфах мы расширяем наши исследования и выясняем, что можно сказать о собственных векторах и их знаках, т. е. о форме и узлах колебания, для уравнения

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (9.1.1)$$

где  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  связаны с некоторыми простыми двумерными и трехмерными системами, особенно мембранами и акустическими резонаторами. У нас пока нет результатов о построении матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  по информации о собственных значениях в этом случае; однако в терминах собственных векторов можно сформулировать необходимые условия положительности масс и жесткостей рассматриваемых систем.

Заметим, что в двумерных и трехмерных задачах мы будем использовать  $N$  для обозначения порядка системы и  $n$  для обозначения конкретного собственного значения.

## 9.2. Обратная задача для якобиевой матрицы

В этом параграфе мы будем рассматривать задачу построения матрицы Якоби, имеющей один или более заданных собственных векторов. Следуя работам Виджи (Vijay) [329] (1972) и Глэдвелла [109] (1986с), докажем следующий результат:

**Теорема 9.2.1.** *Вектор  $\mathbf{u}$  является собственным вектором матрицы Якоби тогда и только тогда, когда  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^-$ .*

**Доказательство.** Напомним определения  $S_{\mathbf{u}}^+, S_{\mathbf{u}}^-$  из параграфа 6.9. Необходимость следует из теоремы 6.10.2. Для доказательства достаточности нам, во-первых, потребуется доказать, что  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^-$ , тогда можно найти такие  $(a_i)_1^n > 0$ ,  $(b_i)_1^{n-1} > 0$ , что

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda)u_1 - b_1u_2 &= 0, \\ -b_{i-1}u_{i-1} + (a_i - \lambda)u_i - b_iu_{i+1} &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ -b_{n-1}u_{n-1} + (a_n - \lambda)u_n &= 0. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Для начала предположим, что  $(u_i)_1^n \neq 0$ , тогда можно рассмотреть  $(b_i)_1^{n-1} = 1$ ,  $a_i = \lambda + c_i$ ,  $c_i = (u_{i-1} + u_{i+1})/u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $u_0 = 0 = u_{n+1}$ . Следовательно, матрица

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -1 & & & \\ -1 & c_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & c_n \end{bmatrix}$$

удовлетворяет условию  $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{C}$ . Матрица  $\mathbf{C}$  имеет строго отрицательную кодиагональ, а значит, ее собственные значения являются различными  $(\kappa_i)_1^n$ , причем одно из них нулевое, так как  $\mathbf{C}$  является вырожденной матрицей. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет собственные значения  $(\lambda + \kappa_i)_1^n$ , т. е. если  $\lambda$  выбрано так, что

$$\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} (-\kappa_i),$$

то матрица  $\mathbf{A}$ , имея неотрицательные собственные значения, будет обладать свойством PSD; матрица  $\mathbf{A}$  будет матрицей Якоби.

Что произойдет, если одна из координат  $u_i$  нулевая? Условие  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^-$  дает  $u_1 \neq 0$ ,  $u_n \neq 0$ . Пусть  $u_m = 0$  для  $m$ , удовлетворяющего условию  $1 < m < n$ , тогда  $u_{m-1}$ ,  $u_{m+1}$  являются ненулевыми и имеют противоположные знаки, а значит  $u_{m-1} u_{m+1} < 0$ . Следовательно,  $m$ -ая строка уравнения (9.2.1) имеет вид

$$b_{m-1}u_{m-1} + b_m u_{m+1} = 0,$$

т. е.  $a_m$ ,  $b_{m-1}$ ,  $b_m$  могут быть выбраны так, что

$$\begin{aligned} a_m &= \lambda, \quad b_{m-1} = 1, \\ b_m &= -u_{m-1}/u_{m+1}. \end{aligned}$$

Оставшиеся  $b_i$  выбираются так, что

$$(b_i)_1^{m-1} = 1, \quad (b_i)_m^n = b_m,$$

откуда

$$a_i = \lambda + c_i, \quad c_m = 0, \quad c_i = b_i(u_{i-1} + u_{i+1})/u_i, \quad i \neq m,$$

и снова  $u_0 = 0 = u_{n+1}$ . Построим матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -b_1 & & & & & \\ -b_1 & c_2 & -b_2 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & -b_{n-1} \\ & & & & & -b_{n-1} & c_n \end{bmatrix},$$

которая удовлетворяет условию  $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Имеем  $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{C}$ , где  $\lambda$  выбирается как и ранее. Эти рассуждения допускают прямое обобщение на случай, когда два или более (не обязательно последовательных) собственных значений  $u_i$  являются нулевыми. ■

**Теорема 9.2.2.** Пусть  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_n$ , определим  $s_i, t_i$  как в уравнении (3.3.6). Необходимыми и достаточными условиями того, что векторы  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  являются собственными векторами матрицы Якоби, отвечающими двум собственным значениям  $\lambda, \mu$ , связанным исключительно неравенством  $\lambda < \mu$ , являются

$$(a) \quad S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^-, \quad S_{\mathbf{v}}^+ = S_{\mathbf{v}}^-$$

$$(б) s_n = 0$$

$$(в) \text{ либо } s_i = 0 = t_i, \text{ либо } s_i t_i > 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n.$$

**Доказательство.** Необходимость этих условий непосредственно проверяется. Следствие 6.10.2 позволяет получить условие (а). Условие ортогональности дает равенство  $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$ , откуда следует (б), уравнение (3.3.8) приводит к условию (в). Заметим, что условие (а) позволяет получить, что  $u_1, v_1$  не являются нулевыми, а значит,  $s_1 = u_1 v_1 \neq 0$ . Следовательно,  $s_1 t_1 > 0$ . Кроме того, условие  $s_n = 0$  дает  $s_{n-1} = -u_n v_n$ ; наконец, (а) влечет, что  $u_n, v_n$  не являются нулевыми, т.е.  $s_{n-1} t_{n-1} > 0$ . Без ограничения общности рассмотрим  $u_1 > 0, v_1 > 0$ .

Эти условия представляют интерес, так как из них следует, что  $\mathbf{v}$  имеет больше перемен знака, чем  $\mathbf{u}$ , т.е.  $S_{\mathbf{v}} > S_{\mathbf{u}}$ . Для того чтобы это проверить, будем рассуждать как в теоремах 3.3.2, 3.3.3. Во-первых, предположим, что первый нулевой элемент в  $\mathbf{u}$ -строке равен  $\alpha_1(\lambda) = x$ , а в  $\mathbf{v}$ -строке равен  $\alpha_1(\mu)$ . Докажем, что  $\alpha_1(\mu) < \alpha_1(\lambda)$ . Пусть  $\alpha_1(\mu) \geq \alpha_1(\lambda) = x$  и  $q < \alpha_1(\lambda) \leq q+1$  ( $1 \leq q < n-1$ ), тогда все  $(u_i)_1^q$  и  $(v_i)_1^q$  положительны, в то время как

$$\begin{aligned} (q+1-x)u_q + (x-q)u_{q+1} &= 0, \\ (q+1-x)v_q + (x-q)v_{q+1} &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда получаем  $t_q \leq 0$ . С другой стороны,  $s_q > 0$ , что вместе с (3.3.8) дает противоречие.

Теперь покажем, что существует ноль в  $\mathbf{v}$ -последовательности между любыми двумя последовательными узлами  $\mathbf{u}$ -последовательности. Пусть  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) являются двумя соседними узлами  $\mathbf{u}$ -последовательности, и предположим, что

$$\begin{aligned} p-1 \leq \alpha < p, \\ q < \beta \leq q+1 \end{aligned} \quad (p \leq q),$$

откуда

$$(p-\alpha)u_{p-1} + (\alpha-p+1)u_p = 0, \quad (9.2.2)$$

$$(q+1-\beta)u_q + (\beta-q)u_{q+1} = 0, \quad (9.2.3)$$

и  $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$  имеют одинаковый знак, скажем, являются положительными. Предположим, что  $\mathbf{v}$ -последовательность не имеет нулей на

месте  $(\alpha, \beta)$ , и без ограничения общности на этом месте находится положительный коэффициент. Тогда  $v_p, v_{p+1}, \dots, v_q$  все являются положительными и

$$(p - \alpha)v_{p-1} + (\alpha - p + 1)v_p \geq 0 \quad (9.2.4)$$

$$(q + 1 - \beta)v_q + (\beta - q)v_{q+1} \geq 0. \quad (9.2.5)$$

Исключая  $\alpha$  из уравнений (9.2.2), (9.2.4) и  $\beta$  из (9.2.3), (9.2.5), получим  $t_{p-1} \geq 0$ ,  $t_q \leq 0$ , откуда в силу условия (в) получаем  $s_{p-1} \geq 0$ ,  $s_q \leq 0$ , а следовательно,  $s_q - s_{p-1} \leq 0$ . Однако  $s_q - s_{p-1} = \sum_{i=p}^q u_i v_i > 0$ , получено противоречие. Аналогично показывается (упр. 9.2.1), что  $\mathbf{v}$ -последовательность имеет узел справа от последнего узла  $\mathbf{u}$ -последовательности:  $\mathbf{v}$ -последовательность имеет больше узлов, чем  $\mathbf{u}$ -последовательность.

Теперь мы можем перейти к построению. Для начала предположим, что  $s_i t_i > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , тогда уравнения (3.3.1), (3.3.6), (3.3.8), показывают, что

$$a_i = \lambda + (\mu - \lambda) \left\{ \frac{v_i u_{i+1}}{t_i} + s_{i-1} \frac{(v_{i-1} u_{i+1} - u_{i-1} v_{i+1})}{t_{i-1} t_i} \right\}$$

$$b_i = (\mu - \lambda)(s_i / t_i).$$

Здесь  $i = 2, \dots, n-1$  в первой формуле и  $i = 1, \dots, n-1$  во второй. Две оставшиеся величины  $a_1, a_n$  задаются формулами

$$a_1 = \lambda + (\mu - \lambda) \frac{s_1 u_2}{t_1 u_1}, \quad a_n = \lambda - (\mu - \lambda) \frac{s_{n-1} u_{n-1}}{t_{n-1} u_n}.$$

Запишем эти уравнения в виде

$$a_i = \lambda + (\mu - \lambda)c_i, \quad b_i = (\mu - \lambda)d_i.$$

Заметим, что  $b_i$  являются положительными. Рассмотрим

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I} + (\mu - \lambda) \mathbf{C},$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -d_1 & & & \\ -d_1 & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & -d_{n-1} \\ & & & -d_{n-1} & c_n \end{bmatrix}.$$

Следовательно, имеющая ненулевую кодиагональ матрица  $\mathbf{C}$  обладает различными собственными значениями  $(\kappa_i)_1^n$ . Получается, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  имеют вид  $\lambda + (\mu - \lambda)\kappa_i$ , и матрица  $\mathbf{A}$  обладает свойством PSD, если  $\lambda + (\mu - \lambda)\min(\kappa_i) \geq 0$ . Незначительные изменения рассуждений, необходимые в случае если  $s_i$  равны нулю, предоставляются в качестве упражнения. ■

### Упражнения 9.2

- 1) Покажите, что условия (а), (б), (в) из теоремы 9.2.2 позволяют заключить, что  $\mathbf{v}$ -последовательность имеет узел справа от последнего узла  $\mathbf{u}$ -последовательности.
- 2) Покажите, что если два последовательных  $s_i$  являются нулевыми, т.е.  $s_{m-1} = 0 = s_m$  ( $2 \leq m \leq n - 2$ ), то  $u_m = 0 = v_m$ , установите, что *три* последовательных  $s_i$  не могут равняться нулю.
- 3) Покажите, что если  $s_m = 0$ , а  $s_{m-1} \neq 0$ , то  $b_m$  можно выбрать произвольно, например,  $b_m = \mu - \lambda$ . Найдите замену для  $a_m$ .
- 4) Модифицируйте рассуждения так, чтобы был рассмотрен случай  $s_{m-1} = 0 = s_m$ .

### 9.3. Обратная задача для одиночного колебания системы масс, соединенных пружинами

Напомним, что согласно параграфу 2.2 собственные колебания  $u_j$  системы, изображенной на рисунке 2.2.1, являются собственными векторами уравнения

$$\mathbf{E}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T \mathbf{u} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{u}. \quad (9.3.1)$$

Матрица  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{E}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T)$  является знако-осциллятором (SO), а значит рассуждения из параграфа 6.10 можно применить к собственным векторам  $\mathbf{u}_j$ . (Заметим, что матрица  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T$  не является симметричной, однако утверждения о матрицах, обладающих свойствами SO и O не зависят от свойства симметричности.)

Запишем  $w_i = u_i - u_{i-1}$ , а значит, при  $u_0 = 0$

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{E}^{-T} \mathbf{w}.$$

Уравнение (9.3.1) можно записать в виде

$$(\mathbf{E}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E}) \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w},$$

и матрица в левой части снова обладает свойством SO. Последнее означает, что векторы  $\mathbf{w}_j$  будут иметь свойства собственных векторов SO-матриц, перечисленные в параграфе 6.10.

Докажем две теоремы относительно размера вектора  $\mathbf{u}_j$ . Первая является простым аналогом принципа *максимума*, возникающего в эллиптических уравнениях.

**Теорема 9.3.1.** *Собственное колебание, описанное уравнением (9.3.1), не может иметь внутренний, отрицательный или положительный, максимум.*

**Доказательство.** Пусть  $2 \leq i \leq n-1$ ,  $i$ -я строка уравнения (9.3.1) имеет вид

$$k_i w_i - k_{i+1} w_{i+1} = \lambda t_i u_i.$$

Пусть  $u$  имеет относительный максимум в  $u_i$ . Тогда  $u_i \geq u_{i-1}$ ,  $u_i \geq u_{i+1}$ , а значит,  $w_i \geq 0$ ,  $w_{i+1} \leq 0$ , следовательно,  $u_i \geq 0$ . На самом деле, так как  $w_i, w_{i+1}$  не могут быть одновременно равными нулю, то  $u_i > 0$ . ■

**Теорема 9.3.2.** *Два соседних  $u_i$  могут совпадать только в относительных максимумах или минимумах.*

**Доказательство.** Пусть  $u_i = u_{i-1}$ , тогда  $w_i = 0$ , а значит  $w_{i-1}, w_{i+1}$  являются ненулевыми и имеют разные знаки, т. е.

$$(u_{i-1} - u_{i-2})(u_{i+1} - u_i) < 0,$$

последнее эквивалентно

$$(u_i - u_{i-2})(u_i - u_{i+1}) > 0.$$

Откуда получаем, что  $u_i (= u_{i-1})$  является либо строго большим, либо строго меньшим, чем соседи  $u_{i-2}$  и  $u_{i+1}$ : т. е. существует относительный максимум или минимум в  $u_i$ . ■

Эти теоремы показывают (упр. 9.3.1), что  $\mathbf{u}_j$  имеет  $j-1$  частей, которые согнуты к осям, и последнюю часть, отогнутую от осей, см. рисунок 9.3.1.



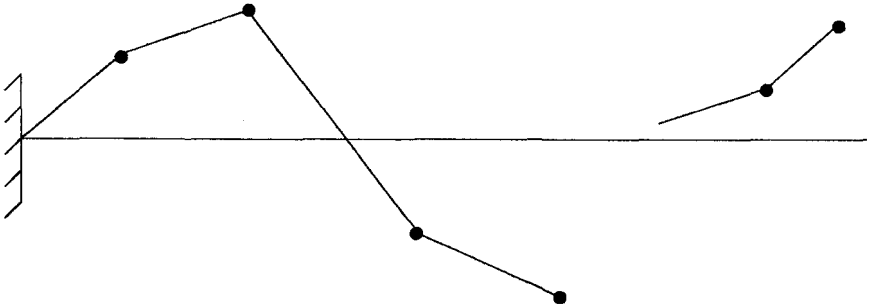


Рис. 9.3.1.  $j$ -е колебание пружинно-массовой системы

**Теорема 9.3.3.** *Необходимыми и достаточными условиями того, что  $\mathbf{u}$  является  $j$ -м собственным колебанием пружинно-массовой системы закрепленно-свободной конфигурации являются следующие*

- (а)  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^- = S_{\mathbf{w}}^+ = S_{\mathbf{w}}^- = j - 1$ ,  
 (б)  $u_1 w_1 > 0$ .

**Доказательство.** Необходимость этих условий уже проверена. Для доказательства достаточности заметим, что никакие две координаты среди  $u_i, u_{i-1}, w_i$  не могут быть одновременно равными нулю; построим следующую систему.

Волна имеет форму, изображенную на рисунке 9.3.1. Следовательно,  $u_i$  станут положительными и будут возрастать ( $u_i > 0, w_i > 0$ ) до индекса  $r$ , который является первым, удовлетворяющим условию

$$u_r > 0, w_r \geq 0, w_{r+1} < 0.$$

Тогда  $u_i$  будет убывать ( $u_i > 0, w_i < 0$ ) до индекса  $s$ , который является первым, удовлетворяющим условию

$$u_s \geq 0, u_{s+1} < 0, w_s < 0.$$

Координата  $u_i$  будет продолжать убывать ( $u_i < 0, w_i < 0$ ) до индекса  $t$ , при котором,

$$u_t < 0, w_t \leq 0, w_{t+1} > 0$$

и далее будет снова возрастать.

Определяющее уравнение (9.3.1) может быть записано в виде

$$\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{E}^{-1} \mathbf{M}\mathbf{u}.$$

Так как  $\mathbf{E}^{-1}$  задается уравнением (2.2.10), получаем

$$k_i w_i = \lambda \sum_{k=1}^n m_k u_k = \lambda \sigma_i. \quad (9.3.2)$$

Это показывает, что нам надо рассмотреть  $u_i$  и выбрать  $m_i$  так, что  $w_i$  и  $\sigma_i$  имеют одинаковые знаки.

Для построения нам надо выбрать  $(m_i)_1^n > 0$  так, чтобы были выполнены следующие условия:

(i)  $\sigma_r \geq 0$  при  $\sigma_r = 0$  тогда и только тогда, когда  $w_r = 0$ ; в этом случае  $\sigma_i = \sigma_r + \sum_{k=i}^{r-1} m_k u_k > 0$

(ii)  $\sigma_{r+1} < 0$ ; тогда  $\sigma_i < 0$  для  $i = r + 1, \dots, s$

(iii)  $\sigma_t \leq 0$  при  $\sigma_t = 0$  тогда и только тогда, когда  $w_t = 0$ ; в этом случае  $\sigma_i < 0$  при  $i = s + 1, \dots, t - 1$

(iv)  $\sigma_{t+1} > 0$

и так далее.

Найти  $(m_i)_1^n$  с этими свойствами составляет, по существу, задачу линейного программирования. Мы получаем множество элементов  $\sigma_i$ , имеющих тот же знак, что и  $w_i$ . Если  $w_i \neq 0$ , то  $k_i$  задается уравнением (9.3.2), однако, если некоторое  $w_i$  является нулевым, то  $k_i$  может иметь произвольное положительное значение. ■

Вопрос построения пружинно-массовой системы, имеющей заданные колебания, рассматривался Портером (Porter) в работах [267] (1970) и [268] (1971), однако он не исследует необходимые и достаточные условия на данные, гарантирующие положительность масс и жесткостей.

### Упражнения 9.3

- 1) Покажите, что  $j$ -тое колебание свободно-закрепленной пружинно-массовой системы имеет  $j - 1$  часть, согнутую к осям и последнюю часть, отогнутую от осей.
- 2) Постройте пружинно-массовую систему с семью массами, третье собственное колебание которой задано условием  $\mathbf{u} = \{1, 2, 1, -1, -2, -1, 1\}$ .

### 9.4. Восстановление системы масс, соединенных пружинами, по двум колебаниям

Конструкция из параграфа 9.3 является далеко не единственной. В этом параграфе, следуя работе Глэдвелла [109] (1986с), мы покажем, что при наличии дополнительных ограничений существует, по сути, одна система, для которой два заданные колебания являются собственными.

Построим контрпример, показывающий, что даже если  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  по отдельности удовлетворяют условиям теоремы 9.3.3, то может не существовать системы, для которой они являются собственными волнами, отвечающими собственным значениям  $\lambda, \mu$  соответственно при  $\lambda < \mu$ . Напишем

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{E}^T \mathbf{v}$$

и предположим, что

$$\mathbf{u} = \{1, 3, 6\}, \quad \mathbf{w} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathbf{v} = \{1, -1, 4\}, \quad \mathbf{z} = \{1, -2, 5\}.$$

Определяющими уравнениями являются следующие:

$$\begin{aligned} \lambda m_1 &= k_1 - 2k_2, & 3\lambda m_2 &= 2k_2 - 3k_3, & 6\lambda m_3 &= 3k_3, \\ \mu m_1 &= k_1 + 2k_2, & -\mu m_2 &= -2k_2 - 5k_3, & 4\mu m_3 &= 5k_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\mu}{3\lambda} = \frac{5}{6} = \frac{2k_2 + 5k_3}{2k_2 - 3k_3},$$

т. е.  $2k_2 = -45k_3$ , что нереализуемо.

Для формализации условий на колебания мы попытаемся формализовать процедуру упрощения из последнего контрпримера.

Рекурсивные соотношения имеют вид:

$$\lambda m_i u_i = k_i w_i - k_{i+1} w_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9.4.1)$$

$$\mu m_i v_i = k_i z_i - k_{i+1} z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9.4.2)$$

и

$$\lambda m_n u_n = k_n w_n, \quad \mu m_n v_n = k_n z_n. \quad (9.4.3)$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{w_n}{u_n} \cdot \frac{v_n}{z_n}. \quad (9.4.4)$$

Как мы знаем, одно из условий должно иметь вид  $S_{\mathbf{u}}^+ = S_{\mathbf{u}}^- = S_{\mathbf{w}}^+ = S_{\mathbf{w}}^-$  и соответственно  $S_{\mathbf{v}}^+ = S_{\mathbf{v}}^- = S_{\mathbf{z}}^+ = S_{\mathbf{z}}^-$ . Откуда следует, что каждый из  $u_n, v_n, w_n, z_n$  является ненулевым и может быть выбран так, чтобы у них у всех были одинаковые знаки, например, положительные. Условие  $\mu > \lambda$  дает

$$u_n z_n - v_n w_n > 0. \quad (9.4.5)$$

Исключая  $k_i, k_{i+1}$  из уравнений (9.4.1), (9.4.2), получим

$$\begin{aligned} m_i(\lambda u_i z_i - \mu v_i w_i) &= k_{i+1}(w_i z_{i+1} - w_{i+1} z_i), \\ m_i(\lambda u_i z_{i+1} - \mu v_i w_{i+1}) &= k_i(w_i z_{i+1} - w_{i+1} z_i), \end{aligned}$$

откуда, подставляя  $\lambda/\mu$  из уравнения (9.4.4), получим

$$\lambda m_i p_i = k_{i+1} w_n v_n r_i, \quad \lambda_i m_i q_i = k_i w_n v_n r_i, \quad (9.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} p_i &= u_i v_n w_n z_i - u_n v_i w_i z_n, \\ q_i &= u_i v_n w_n z_{i+1} - u_n v_i w_{i+1} z_n, \\ r_i &= w_i z_{i+1} - w_{i+1} z_i. \end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 9.4.1.** *Необходимыми и достаточными условиями того, что  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  — собственные колебания (закрепленно-свободной) пружинно-массовой системы для некоторых собственных значений  $\lambda, \mu$  ( $\lambda < \mu$ ), являются следующие условия:*

- а)  $S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{w}} < S_{\mathbf{v}} = S_{\mathbf{z}}$ ;
- б)  $v_n w_n > 0$ ;
- в)  $u_n z_n - v_n w_n > 0$ ;
- г) для каждого  $i, 1 \leq i \leq n-1$ , три величины  $p_i, q_i, r_i$  либо имеют одинаковый знак, либо одновременно равны нулю; этот знак не обязан быть одинаковым для всех  $i$ .

**Доказательство.** Необходимость этих условий уже проверена. Если условия справедливы и ни одна тройка не является нулевой, то уравнения (9.4.6) для  $i = 1, 2, \dots, n-1$  дают  $2(n-1)$  отношений:

$$m_1/k_1, m_1/k_2; m_2/k_2, m_2/k_3; \dots; m_{n-1}/k_{n-1}, m_{n-1}/k_n.$$

Последние уравнения (9.4.3), (9.4.4) отвечают отношениям  $m_n/k_n$  и  $\lambda/\mu$ . Следовательно, если мы выберем  $\lambda$  и  $m_n$ , то система будет определена однозначно. Если тройка  $p_k, q_k, r_k$  является тождественно нулевой, то  $m_k, k_k$  могут быть выбраны произвольными (положительными числами).

Заметим (упр. 9.4.1), что условия а)–в) препятствуют обнулению  $p_1, q_1, r_1$  или  $p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}$ . ■

В частном случае последовательных собственных значений можно усилить эти условия и получить следующее:

**Теорема 9.4.2.** *Необходимыми и достаточными условиями того, что  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  — собственные колебания, отвечающие последовательным собственным значениям пружинно-массовой системы, являются следующие условия:*

- а)  $v_n w_n > 0$
- б)  $u_n z_n - v_n w_n > 0$
- в)  $(p_i, q_i, r_i)_1^{n-1} > 0$ .

**Доказательство.** Необходимость условий а) и б) следует из равенств (9.4.4) и (9.4.5). Необходимость неравенства  $(r_i)_1^{n-1} > 0$  установлена в работе Глэдвелла [109] (1985а); тогда уравнение (9.4.6) показывает, что  $(p_i, q_i)_1^{n-1} > 0$ . Достаточность этих условий проверяется аналогично предыдущему. ■

#### Упражнения 9.4

- 1) Покажите, что условия а)–в) из теоремы 9.4.1 позволяют получить неравенство  $p_1 < 0$ . Покажите также, что предположение  $(p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}) = 0$  приводит к противоречию.
- 2) Постройте пружинно-массовую систему, первое и второе колебания которой заданы условиями  $\mathbf{u} = \{1, 3, 6, 10, 15\}$ ,  $\mathbf{v} = \{-1, -4, -2, 1, 5\}$ .

### 9.5. Обратная задача для колеблющейся балки

В этом параграфе мы будем рассматривать вопрос о том, когда и как можно построить дискретную модель балки, как было сделано в параграфе 2.3, при помощи одиночного колебания  $\mathbf{u}$ . Как и следует ожидать,

этот вопрос является на порядок более сложным, чем соответствующий вопрос для стержня. Так как этот вопрос был окончательно решен в работе Глэдвелла, Уиллмса, Хи и Уонга (Gladwell, Willms, He, Wang) [115] (1989), мы сформулируем лишь основные результаты, полученные там.

Напомним, что задача собственных значений для консольной балки может быть решена при помощи уравнения (2.3.6):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \equiv \mathbf{E}\mathbf{L}^{-1}\widehat{\mathbf{E}}\mathbf{K}\widehat{\mathbf{E}}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u}. \quad (9.5.1)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  является пятидиагональной SO-матрицей, а значит, собственные значения являются простыми и собственный вектор  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}$  обладает знаковым счетчиком  $S_{\mathbf{u}} = j - 1$ . Как и для стержня, легко показать (упр. 9.5.1), что

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{E}^T\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\tau} \quad (9.5.2)$$

являются также собственными значениями SO матриц, а значит  $S_{\boldsymbol{\theta}} = S_{\boldsymbol{\tau}} = S_{\boldsymbol{\phi}} = j - 1$ . Заметим, что хотя  $\boldsymbol{\theta}$  может быть построена, только если длины  $l_i$  известны, знаковые счетчики  $\boldsymbol{\theta}$  и разности  $\mathbf{E}^T\mathbf{u}$  одинаковы. Рассматривая вопрос построения, мы будем предполагать, что  $(l_i)_1^n$  заданы, и пытаться построить  $(k_i, m_i)_1^n$ .

Для того чтобы найти условия, которые должны быть выполнены для собственных колебаний, нам потребуется ряд предварительных результатов.

**Лемма 9.5.1.** *Если вектор  $\mathbf{u}$  не является тождественно нулевым и  $S_{\mathbf{u}}^- = j - 1$ , ( $j \geq 1$ ), то существует индекс  $k$  и индексы  $(q_i)_1^j$  такие, что  $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_j \leq n$  и  $(-1)^{k+i-1}u_{q_i} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, j$ . Обратно, если существуют  $k$  и  $(q_i)_1^j$  такие, что  $(-1)^{k+i-1}u_{q_i} > 0$  для  $i = 1, 2, \dots, j$ , то  $S_{\mathbf{u}}^- \geq j - 1$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим  $q_1$  — индекс первого ненулевого  $u_i$ , и пусть  $(-1)^k = \text{sign}(u_{q_1})$ ; тогда  $(-1)^k u_{q_1} > 0$ . Возьмем  $q_2$  — индекс первого  $u_i$  со знаком, противоположным  $u_{q_1}$ , тогда  $(-1)^{k+1} u_{q_2} > 0$ , и так далее. Например, в последовательности  $0, 1^*, 0, -4^*, 2^*, 0, 3, -5^*$ ,  $S_{\mathbf{u}}^- = 3$ , откуда  $j = 4$  и  $q_i$  являются индексами координат, помеченных  $*$ ; т. е.  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (2, 4, 5, 8)$ . Если  $S_{\mathbf{u}}^- = j - 1$ , тогда можно найти  $(q_i)_1^j$ . Обратно, если можно найти  $(q_i)_1^j$ , то  $S_{\mathbf{u}}^-$  должно быть равным по крайней мере  $j - 1$ . Может оказаться, что  $S_{\mathbf{u}}^-$  даже еще больше; в любом случае  $S_{\mathbf{u}}^- \geq j - 1$ . ■

**Лемма 9.5.2.** Если  $\mathbf{v} = \mathbf{E}^T \mathbf{u}$ , то  $S_{\mathbf{v}}^- \geq S_{\mathbf{u}}^-$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $v_1 = u_1$ ,  $v_2 = u_2 - u_1, \dots, v_n = u_n - u_{n-1}$ . Пусть  $S_{\mathbf{u}}^- = j - 1$ . Выберем  $k$  и  $(q_i)_1^j$  как в лемме 9.5.1. Тогда

$$(-1)^k v_{q_1} = (-1)^k u_{q_1} > 0,$$

$$(-1)^{k+i-1} v_{q_i} = (-1)^{k+1} (u_{q_i} - u_{q_{i-1}}) \geq (-1)^{k+i-1} u_{q_i} > 0, \quad i = 2, \dots, j,$$

а значит, по лемме 9.5.1,  $S_{\mathbf{v}}^- \geq j - 1$ . ■

**Лемма 9.5.3.** Если  $\mathbf{v} = \mathbf{E}^T \mathbf{u}$ , то  $S_{\mathbf{v}}^+ \geq S_{\mathbf{u}}^+$ . Доказательство, аналогичное доказательству леммы 9.5.2, приведено в работе Глэдвелла, Уиллмса, Хи и Уонга [115] (1989).

Указанные леммы можно использовать для доказательства следующей теоремы:

**Теорема 9.5.1.** Если  $l_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{u}$ , и  $S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{w}} = j - 1$ , то  $S_{\boldsymbol{\theta}} = j - 1$ . В дополнение, если  $m_i > 0$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $S_{\boldsymbol{\phi}} = S_{\boldsymbol{\tau}} = j - 1$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $\mathbf{w}$  имеет те же свойства знаков, что и  $\boldsymbol{\tau}$  (см. (9.5.2)).

Рассмотрим  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{u}$ , по лемме 9.5.2,  $S_{\boldsymbol{\theta}}^- \geq S_{\mathbf{u}}^- = j - 1$ . С другой стороны,  $\mathbf{w} = \mathbf{E}^T \boldsymbol{\theta}$ , значит, по лемме 9.5.3,  $S_{\boldsymbol{\theta}}^+ \leq S_{\mathbf{w}}^+ = j - 1$ . Следовательно,  $S_{\boldsymbol{\theta}}^+ \leq j - 1 \leq S_{\boldsymbol{\theta}}^-$ , откуда  $S_{\boldsymbol{\theta}}^- = S_{\boldsymbol{\theta}}^+ = S_{\boldsymbol{\theta}} = j - 1$ . Это доказывает первую часть утверждения. Рассмотрим обратное утверждение. Леммы 9.5.2, 9.5.3 остаются справедливыми, если заменить  $\mathbf{E}^T$  на  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}^T$  является прямым разностным оператором,  $\mathbf{E}$  — обратным). Так как  $\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{K}} \mathbf{w}$ , получаем  $S_{\boldsymbol{\tau}} = S_{\mathbf{w}}$ , если  $(k_i)_1^n > 0$ . Лемма 9.5.2, примененная к  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \boldsymbol{\tau}$ , показывает, что  $S_{\boldsymbol{\phi}}^- \geq S_{\boldsymbol{\tau}}^- = j - 1$ . Лемма 9.5.3, примененная к  $\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{E} \boldsymbol{\phi}$ , показывает, что  $S_{\boldsymbol{\phi}}^+ \leq S_{\mathbf{u}}^+ = j - 1$ . Следовательно,  $j - 1 \leq S_{\boldsymbol{\phi}}^- \leq S_{\boldsymbol{\phi}}^+ \leq j - 1$ , значит,  $S_{\boldsymbol{\phi}} = j - 1$ . ■

Пусть заданы два вектора  $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ . Необходимыми и достаточными условиями того, что они связаны условием вида  $\mathbf{w} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{u}$  для некоторой матрицы  $\mathbf{L}$  с положительной диагональю, является то, что векторы  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}^{-T} \mathbf{w}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{E}^T \mathbf{u}$  должны быть связаны условием  $\mathbf{v} = \mathbf{L} \boldsymbol{\theta}$ . Последнее означает, что  $\theta_i = \sum_{k=1}^i w_k$  и  $v_i = u_i - u_{i-1}$  должны

быть положительными, нулевыми или отрицательными одновременно, т. е.  $\theta_i v_i \geq 0$ , причем  $\theta_i = 0$  тогда и только тогда, когда  $v_i = 0$ . Если  $\theta_i \neq 0$ , то  $l_i = v_i/\theta_i$ ; если  $\theta_i = 0$ , то  $l_i$  является произвольным. Если  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}$  связаны таким образом, то теорема 9.5.1 показывает, что условие  $S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{w}} = j - 1$  позволяет получить  $S_{\boldsymbol{\theta}} = j - 1$ .

Сформулируем теперь следующую теорему.

**Теорема 9.5.2.** Пусть  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}$  соответствуют параметрам  $j$ -го колебания консольной балки. Предположим, что  $(q_i, r_i, s_i)_1^j$  являются множествами индексов для  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}$  соответственно, как в лемме 9.5.1. Тогда

- (i)  $q_{i-1} < r_i \leq q_i, \quad r_{i-1} < s_i \leq r_i, \quad i = 2, 3, \dots, j,$
- (ii)  $s_i \leq q_i, \quad i = 2, 3, \dots, j$  и  $s_i \geq q_{i-2} + 2, \quad i = 3, \dots, j,$
- (iii) если  $u_{q_{i-1}} = 0$ , то  $r_i < q_i$ ; если  $\theta_{r_{i-1}} = 0$ , то  $s_i < r_i$ ; в обоих случаях получаем,  $s_i < q_i$ ,
- (iv) если  $w_{s_{i-1}} = 0$ , то  $s_i > q_{i-2} + 2, \quad i = 3, \dots, j.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта теорема и леммы 9.5.2, 9.5.3 могут рассматриваться как расширения и уточнения дискретной версии теоремы Ролля. Они придают точную формулировку интуитивно ясному утверждению о том, что должна быть по крайней мере одна перемена знака в первых разностях  $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}$  (т. е. производных) между любыми переменными знака величин  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}$  соответственно. Формальное доказательство приводится в работе Глэдвелла, Уиллмса, Хи и Уонга [115] (1989). Сформулируем теперь следующую теорему:

**Теорема 9.5.3.** Пусть даны  $\mathbf{u}$  и положительные  $(l_i)_1^n$ . Необходимыми и достаточными условиями того, что они соответствуют  $j$ -му колебанию консольной балки, является равенство

$$S_{\mathbf{u}} = S_{\mathbf{w}} = j - 1, \quad \text{где } \mathbf{w} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{u}.$$

**Доказательство.** Необходимость этих условий была проверена ранее. Докажем достаточность, построив явным образом последовательность  $(k_i, m_i)_1^n$ , все элементы которой положительны.

Определяющее уравнение (9.5.1) может быть переписано в виде

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{E} \boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{L}^{-1} \widehat{\mathbf{E}} \mathbf{K} \mathbf{w}.$$



Перепишем это следующим образом:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{w} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L}\phi, \quad \phi = \lambda\mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{u},$$

так как  $\mathbf{E}^{-1}$  имеет вид (2.2.10), получаем

$$(a) \quad k_i w_i = \sum_{k=i}^n l_k \phi_k = \tau_i, \quad (b) \quad \phi_i = \lambda \sum_{k=i}^n m_k u_k, \quad (9.5.3)$$

откуда следует

$$\tau_i = \tau_{i+1} + l_i \phi_i, \quad \phi_i = \phi_{i+1} + \lambda m_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при  $\phi_{n+1} = 0 = \tau_{n+1}$ .

Опишем процедуру построения для простейшего случая:  $j = 1$ . Алгоритмы и примеры относительно общего случая могут быть найдены в работе Глэдвелла, Уиллмса, Хи и Уонга [115] (1989).

Если  $j = 1$ , то все  $(u_i, w_i)_1^n$  будут положительны. Величинам  $(m_i)_1^n$  и  $\lambda$  можно присвоить произвольные положительные значения; уравнение (9.5.3 б) задает величины  $(\phi_i)_1^n$ , которые при подстановке в (9.5.3 а) позволяют найти  $(\tau_i)_1^n$ . Тогда  $k_i = \tau_i/w_i$ , а значит,  $(k_i)_1^n$  определяются единственным способом. ■

### Упражнения 9.5

- 1) Покажите, что если  $\mathbf{u}$  является  $j$ -м собственным вектором из (9.5.1), то  $\theta, \tau, \phi$  являются также  $j$ -ми собственными векторами для SO-матриц.

## 9.6. Теорема Куранта об узловых линиях

Начнем рассмотрение свойств собственных векторов для класса систем, включающего дискретные модели мембран и акустических резонаторов. Так как наши результаты являются дискретными аналогами результатов о непрерывных системах, мы начнем их рассмотрение главным образом с теоремы Куранта об узловых линиях (CNLT), которая связывает рассматриваемые вопросы и собственные функции Дирихле  $u(\mathbf{x})$  для эллиптических уравнений. Хорошо известно, что в этих задачах собственные значения имеют одну предельную точку — бесконечность, мы занумеруем их следующим образом:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad (9.6.1)$$

Собственные числа не обязательно являются различными. Если  $\lambda_n$  имеет кратность  $r$ , то мы занумеруем собственные значения следующим образом:

$$\lambda_{n-1} < \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+r-1} < \lambda_{n+r}. \quad (9.6.2)$$

CNLT (Гильберт и Курант (1953) [64], глава VI, параграф 6) является теоремой с большой областью применимости и легким доказательством, основанным на свойстве минимакса для отношения Рэля. Она приводит к рассмотрению собственных функций Дирихле для эллиптических уравнений в частных производных, простейшим и наиболее важным из них является уравнение Гельмгольца (Helmholtz equation)

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (9.6.3)$$

Граничное условие Дирихле имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (9.6.4)$$

Здесь  $\Delta u$  является лапласианом, функция  $\rho(\mathbf{x})$  — положительна и ограничена, и  $D$  является областью в  $\mathbb{R}^m$  ( $m$ -мерном евклидовом пространстве). Уравнения (9.6.3), (9.6.4) управляют пространственными собственными волнами колеблющейся мембраны с зафиксированной границей в  $\mathbb{R}^2$ ; и акустическими стоячими волнами в  $\mathbb{R}^3$ .

*Узловое множество* для  $u(\mathbf{x})$  определяется как множество точек  $\mathbf{x}$  таких, что  $u(\mathbf{x}) = 0$ . Известно (Ченг (Cheng) [53] (1976)), что для  $D \subset \mathbb{R}^m$ , узловое множество собственной функции для (9.6.3), (9.6.4) локально состоит из гиперповерхностей размерности  $m - 1$ . Эти гиперповерхности не могут закончиться внутри  $D$ , что означает, что они либо являются замкнутыми, либо начинаются и заканчиваются на границе. В частности, для плоскости ( $m = 2$ ) узловое множество собственной функции  $u(\mathbf{x})$  для (9.6.3), (9.6.4) состоит из непрерывных кривых, называемых *узловыми линиями*, которые либо являются замкнутыми, либо начинаются и заканчиваются на границе.

CNLT утверждает, что каждая собственная функция  $u_n(\mathbf{x})$ , отвечающая  $\lambda_n$ , разделяет  $D$  по его узловому множеству на не более чем  $n$  подобластей, называемых *узловыми областями* или, более информативно, *областями знакопостоянства*, в которых  $u_n(\mathbf{x})$  имеет одинаковый знак. Мы приведем доказательства двух версий CNLT так, что впоследствии мы сможем различать насколько дискретная и непрерывная версии отличаются друг от друга. Запишем рассуждения в вариационной

форме. Определим

$$(u, v)_D = \int_D \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \quad [u, v]_D = \int_D \rho u v d\mathbf{x}.$$

Здесь  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$  является *градиентом* и

$$\int_D \cdot d\mathbf{x} = \int \int \int \dots \int \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Основная теорема для отношения Рэлея

$$\lambda_R = \frac{(u, u)_D}{[u, u]_D} \quad (9.6.5)$$

состоит в том, что если функция  $u$  является ортогональной ко всем первым  $n-1$  собственным колебаниям в уравнениях (9.6.3), (9.6.4), т. е.

$$[u, u_i]_D = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

тогда  $\lambda_R \geq \lambda_n$ , и равенство имеет место только в случае, когда  $u(\mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x})$ . Докажем сперва слабую версию CNLT:

**Теорема 9.6.1.** Пусть собственные числа  $\lambda_i$  для (9.6.3), (9.6.4) упорядочены согласно (9.6.5), и  $u_n(\mathbf{x})$  является собственной функцией, соответствующей  $\lambda_n$ . Если  $\lambda_n$  имеет кратность  $r \geq 1$ , т. е. условие (9.6.2) справедливо, то  $u_n(\mathbf{x})$  имеет не более  $n+r-1$  областей знакопостоянства.

**Доказательство.** Пусть  $u_n(\mathbf{x})$  имеет  $p$  областей знакопостоянства  $D_i$  таких, что  $\bigcup_{i=1}^p D_i = D$ . Определим

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \beta_i u_n(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и рассмотрим

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p c_i w_i(\mathbf{x}), \quad \sum_{i=1}^p c_i^2 = 1. \quad (9.6.6)$$

Так как  $D_i$  не пересекаются, то векторы  $(w_i(\mathbf{x}))_1^p$  ортогональны. Домножим  $w_i$ , т. е. выберем  $\beta_i$  так, что  $[w_i, w_i]_D = 1$ , тогда

$$[v, v]_D = \sum_{i=1}^p c_i^2 [w_i, w_i]_D = \sum_{i=1}^p c_i^2 = 1.$$

Так как  $w_i(\mathbf{x})$  удовлетворяет (9.6.3) при  $\lambda = \lambda_n$  на  $D_i$  и  $w_i(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial D_i$  теорема о дивергенции дает

$$\begin{aligned} (w_i, w_i)_{D_i} &= \int_D \nabla w_i \cdot \nabla w_i d\mathbf{x} \\ &= \int_D \{\operatorname{div}(w_i \nabla w_i) - w_i \Delta w_i\} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial D_i} w_i \frac{\partial w_i}{\partial n} d\mathbf{x} + \lambda_n \int_{D_i} \rho w_i^2 d\mathbf{x} = \lambda_n. \end{aligned}$$

Следовательно,  $(v, v)_D = \sum_{i=1}^p c_i^2 (w_i, w_i)_{D_i} = \sum c_i^2 \lambda_n = \lambda_n$ , значит  $\lambda_R = \lambda_n$ . Однако мы можем выбрать  $(c_i)_1^p$  так, что  $[v, w_i]_D = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ , и следовательно, для данного выбора, в силу принципа Рэля получаем, что  $\lambda_R \geq \lambda_p$ . Следовательно,  $\lambda_p \leq \lambda_n$ . Так как  $\lambda_n < \lambda_{n+r}$ , получаем, что  $\lambda_p < \lambda_{n+r}$ , а значит,  $p < n+r$ ,  $p \leq n+r-1$ . ■

Заметим, что в этом доказательстве мы не предполагали связности  $D$ . Заметим также, что если  $\lambda_n$  является простым, т. е.  $r = 1$ , то теорема утверждает, что  $u_n(\mathbf{x})$  имеет не более  $n$  областей знакопостоянства. Нам потребуется усилить результат для случая кратных собственных значений, уменьшая верхнюю границу  $n+r-1$  до  $n$ .

Для такого уменьшения верхней границы нам потребуется *теорема об однозначном продолжении*. Выражаясь неточно, эта теорема утверждает, что если решение уравнения (9.6.3) является тождественно нулевым на конечной области в  $D$ , то оно является нулевым на  $D$ ; единственный способ *продолжить* его с нулевого участка — взять его тождественно равным нулю. (Более точно, для тех, кто знаком с функциональным анализом, Джерисон и Кениг (Jerison, Kenig) в 1985 в работе [188] доказали, что если произвольное решение  $u \in H_0^1(D)$  ослабленной версии уравнения (9.6.3) является нулевым на непустом открытом подмножестве *связной области*  $D$ , то  $u \equiv 0$  на  $D$ .) Используя этот результат, мы можем доказать:

**Теорема 9.6.2.** Пусть  $D$  — связная область и собственные значения (9.6.3), (9.6.4) упорядочены как в (9.6.5), а  $u_n(\mathbf{x})$  является собственной функцией, отвечающей  $\lambda_n$ , тогда  $u_n(\mathbf{x})$  имеет не более  $n$  областей знакопостоянства.

**Доказательство.** Пусть  $u_n(\mathbf{x})$  имеет  $p > n$  областей знакопостоянства. Определим  $w_i(\mathbf{x})$  как и ранее и зададим  $v(\mathbf{x})$  посредством (9.6.6) при  $c_{n+1} = 0 = \dots = c_p$ , значит  $v(\mathbf{x}) \equiv 0$  на  $D_{n+1}, \dots, D_p$ . Имеем снова  $\lambda_R = \lambda_n$ , и можно выбрать  $(c_i)_1^n$  так, что  $[v, u_i]_D = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Следовательно,  $v(\mathbf{x})$  является собственной функцией для (9.6.3), (9.6.4), однако она является тождественно нулевой на  $D_{n+1}$  и, следовательно, по теореме об однозначном продолжении, она является тождественно нулевой на  $D$ . Это противоречие дает неравенство  $p \leq n$ . ■

Заметим, что согласно результатам Херрманна (Hergmann), см. [171] (1935) и Плейела (Pleijel) [266] (1956), мы получаем, что если область  $D$  является связной, то  $\lambda_1$  — простое собственное значение, т. е.  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Любая собственная функция  $u_1(\mathbf{x})$  может иметь не более одной области знакопостоянства, т. е. она имеет постоянный знак на  $D$ . Не существуют функции  $u, v$ , имеющие одинаковый знак на связной области  $D$  и ортогональные друг другу.

**Теорема 9.6.3.** Теорема 9.6.2 справедлива, даже если область  $D$  не является связной.

**Доказательство.** Пусть  $D$  состоит из  $q$  связных компонент  $(D_k)_1^q$ . Проиндексируем собственные числа  $\lambda_i^{(k)}$  для каждой области  $D_k$  по возрастанию, и предположим, что собственные функции — это  $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$ . Теперь перенормируем последовательности собственных значений  $\{\lambda_i^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , в неубывающую последовательность  $\{\lambda_j\}$  для получения собственных значений для  $D$ . Соответствующие собственные функции на  $D$  имеют вид

$$u_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^{(k)}(\mathbf{x}) & \text{на } D_k \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Порядковый номер  $j$  данного  $\lambda_i^{(k)}$  в этой последовательности удовлетворяет неравенству  $j \geq i$ . Теорема 9.6.2 для  $D_k$  утверждает, что  $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$  имеет не более  $i$  областей знакопостоянства  $D_k$  так, что  $u_j(\mathbf{x})$  имеет не более  $j$  областей знакопостоянства на  $D_k$ , и будет равна нулю в остальных точках. ■

## 9.7. Свойства собственных векторов систем с конечным числом элементов

Нашей целью в следующих нескольких секциях являются дискретные версии теорем 9.6.1–9.6.3. Сначала для достижения этой цели мы обсудим свойства собственных векторов в моделях конечных элементов. Мы возвращаемся к рассуждениям из параграфа 2.5 и предполагаем, что имеем дело с конечно-элементной моделью мембраны с фиксированной границей, используя интерполяцию *остроугольными* треугольниками, или соответственно акустического резонатора, используя линейную интерполяцию тетраэдрами с *тупыми* углами между нормальными к граням. В каждой из этих моделей сеть элементов модели заставляет множество вершин, связанных ребрами, образовывать граф. Существует два типа вершин, *граничные вершины*, где  $u = 0$  в силу граничных условий, и остальные вершины. Эти *неграничные вершины* оказываются именно теми, которые возникают в наших рассуждениях; они образуют граф  $\mathcal{G}$  на  $N$  вершинах  $P_i \in \mathcal{V}$  со множеством ребер  $\mathcal{E}$ . Анализ конечно-элементной модели определяет две матрицы  $\mathbf{K}, \mathbf{M}$  на  $\mathcal{G}$  со свойствами, если  $i \neq j$ , то

$$\left. \begin{aligned} k_{ij} < 0, \quad m_{ij} > 0, \quad \text{если } (P_i, P_j) \in \mathcal{E} \\ k_{ij} = 0, \quad m_{ij} = 0 \quad \text{иначе.} \end{aligned} \right\} \quad (9.7.1)$$

Заметим, что если  $(P_i, P_j) \in \mathcal{E}$ , мы будем говорить, что  $P_i, P_j$  являются *присоединенными* вершинами, в этом случае мы будем писать  $P_i \sim P_j$ . Наши рассуждения будут сосредоточены на *узловых* вершинах, т. е. вершинах  $P_i$ , в которых  $u_i = 0$ . Докажем для начала

**Теорема 9.7.1.** *В предположениях (9.7.1) неграничная узловая вершина собственного вектора для (9.1.1) не может иметь соседей, знак которых постоянен.*

**Доказательство.** Пусть  $P_i$  является неграничной узловой вершиной, т. е.  $u_i = 0$ .  $i$ -я строка (9.1.1) имеет вид

$$\sum (k_{ij} - \lambda m_{ij}) u_j = 0, \quad (9.7.2)$$

где суммирование берется по таким  $j (\neq i)$ , для которых  $P_i \sim P_j$ ; для этих  $j$ ,  $k_{ij} - \lambda m_{ij} < 0$ . Если  $u_j \geq 0 (\leq 0)$  для всех таких  $j$ , для которых по крайней мере одно неравенство является строгим, тогда левая часть уравнения (9.7.2) будет строго отрицательной (положительной), полученно противоречие. ■

Следствием этой теоремы является то, что у неограниченной узловой вершины либо есть как положительные, так и отрицательные соседи, либо все ее соседи являются узловыми вершинами. Усилением указанного утверждения является утверждение, что множество узловых вершин для данного собственного вектора должно иметь как положительных, так и отрицательных соседей: оно должно разделять положительные и отрицательные множества вершин. Если граф  $\mathcal{G}$  является связным, т. е.  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  являются неразложимыми матрицами (см. работу Бузакера и Саати (Busacker, Saaty) 1965 г. [46]), тогда можно утверждать большее: если собственный вектор  $\mathbf{u}$  является неотрицательным, то он должен быть строго положительным. Такой собственный вектор должен соответствовать наименьшему собственному значению, которое, следовательно, является простым: не существует двух положительных собственных векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , которые ортогональны относительно  $\mathbf{M}$ :  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Имеет место важный *принцип максимума* для уравнения в частных производных (9.6.3): решение  $u(\mathbf{x})$  не может обладать внутренним положительным минимумом или внутренним положительным максимумом (Проттер и Вейнбургер (Protter, Weinburger) [271] (1984)). Для того чтобы сформулировать дискретную версию этого принципа, нам необходимо разделить неограниченные вершины конечно-элементной модели на два множества: вершины, соединенные с граничными вершинами, которые мы будем называть *приграничными вершинами*; и оставшиеся, которые мы будем называть *внутренними вершинами*.

**Теорема 9.7.2.** *Если  $\mathcal{G}$  является связным и условия (9.7.1) справедливы, то собственный вектор для (9.1.1) не может иметь локальный положительный минимум или локальный отрицательный максимум во внутренней вершине.*

**Доказательство.** По определению, внутренняя вершина соединена только с неограниченными вершинами. Следовательно, она является вершиной для *внутреннего элемента*, т. е. элемента, не имеющего вершин на границе. Согласно способу ее построения по формуле (2.5.6), матрица жесткости  $\mathbf{K}_e$  внутреннего элемента допускает колебания в форме твердого тела,  $\{1, 1, 1\}$  для треугольной сети и  $\{1, 1, 1, 1\}$  тетраэдральной сети. Если  $P_i$  является внутренней вершиной, то элементы, которым принадлежит  $P_i$ , являются внутренними элементами. Последнее означает, что после преобразования  $\mathbf{K}_e$  к виду  $\mathbf{K}$  мы получаем, что если  $P_i$  является внутренней вершиной, то  $\sum k_{ij} = 0$ , где суммирование рассматривается по всем  $j$  таким, что  $P_j \sim P_i$ . Тогда  $i$ -я строка (9.1.1)

имеет вид

$$\mathbf{0} = \sum k_{ij}u_j - \lambda m_{ij}u_j,$$

а значит,

$$\sum k_{ij}(u_j - u_i) + \left(\sum k_{ij}\right)u_i = \lambda \sum m_{ij}u_j. \quad (9.7.3)$$

Пусть существует локальный положительный минимум во внутренней вершине  $P_i$  так, что  $u_i \geq 0$  и  $u_j - u_i \geq 0$  для всех  $j$  таких, что  $P_j \sim P_i$ , и либо первое неравенство является строгим, либо второе неравенство является строгим, для по крайней мере одного  $j$  такого, что  $P_j \sim P_i$ . (Связность графа  $\mathcal{G}$  нам необходима для того, чтобы каждая вершина  $P_i$  обладала соседней вершиной.) Первая сумма в левой части является неположительной, тогда как вторая сумма является нулевой; сумма справа неотрицательна; одна из двух частей, левая или правая, — ненулевая. Последнее невозможно. ■

Эта теорема относится к собственным *векторам* из (9.1.1), однако легко ее переформулировать для применения к собственным *функциям* конечно-элементной модели, полученным при помощи линейной интерполяции из значений на вершинах. Собственные функции, полученные при линейной интерполяции, могут обладать локальными максимумами и минимумами только на вершинах сети. Отсюда следует, что собственные функции не могут иметь локальный положительный минимум или локальный отрицательный максимум на внутренней вершине. Проще говоря, можно утверждать, что колебание может иметь волны, но не впадины.

Одним из краеугольных камней теории, относящейся к уравнению (9.6.3), является теорема об однозначном продолжении. Посредством ее мы понизили верхнюю границу на число областей знакопостоянства для собственных функций из (9.6.3), (9.6.4) с  $n + r - 1$  до  $n$ . Не существует *прямого* дискретного аналога для однозначного продолжения; существует аналог из леммы 9.9.2, однако он не является простым. Рисунок 9.7.1 дает пример собственной волны конечно-элементной модели, имеющей нулевые части. Если матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  симметричны относительно осей  $x$  и  $y$ , то существует колебание, которое является антисимметричным относительно обеих осей так, что значения в вершинах должны иметь указанные знаки. Имеется четыре полностью нулевых треугольника в центре и четыре другие пары нулевых треугольников, однако собственные колебания не являются тождественно нулевыми.

Даже при отсутствии прямого дискретного аналога для однозначного продолжения мы все-таки можем получить дискретные аналоги



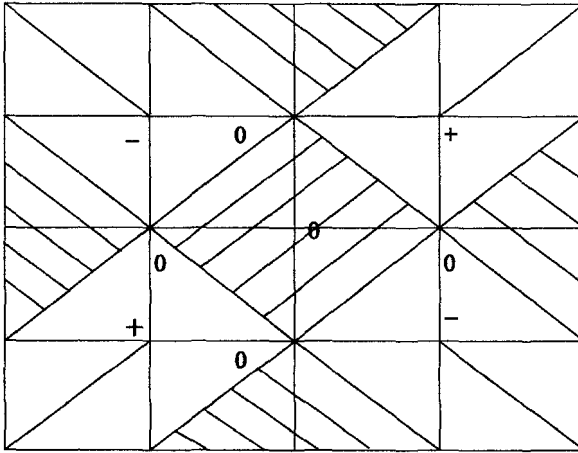


Рис. 9.7.1. Собственный вектор может иметь один нулевой (штрихованный) многоугольник или более одного такого многоугольника

теорем 9.6.1, 9.6.2. Для начала нам надо найти дискретные аналоги *областей знакопостоянства* из непрерывных теорем. Имеются два различных способа рассмотрения кусочно-линейной функции  $u$ , полученной из собственного вектора для (9.1.1): исследование значений  $u_i$  и, в частности, знаков  $u_i$  на вершинах  $P_i$  графа  $\mathcal{G}$ ; исследование подобластей с кусочно-прямыми границами, на которых линейные интерполяции  $u(\mathbf{x})$  имеют один знак: или нестрогий,  $u(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $\leq 0$ ), или строгий,  $u(\mathbf{x}) > 0$  ( $< 0$ ).

Рассмотрим первый способ. Сеть конечно-элементной модели определяет граф  $\mathcal{G}$  с  $N$  вершинами  $P_i$ . А вектор  $\mathbf{u} \in V_N$  сопоставляет значение  $u_i$  и, в частности, знак  $+$ ,  $0$  или  $-$  каждой вершине  $P_i$  графа  $\mathcal{G}$ . Мы можем связать строго положительные вершины посредством ребер из  $\mathcal{E}$  для получения максимальных связных подграфов графа  $\mathcal{G}$ , называемых *сильно положительными графами знака* (*сильно положительными подграфами*). То же самое можно сделать с отрицательными вершинами, для получения *сильно отрицательных графов знака* (*сильно отрицательных подграфов*). Таким образом, мы можем разбить граф  $\mathcal{G}$  на непересекающиеся сильно положительные подграфы, сильно отрицательные подграфы и множество нулевых вершин. На рисунке 9.7.2 показан граф с двумя сильно положительными и двумя сильно отрицательными подграфами, каждый из которых состоит только из одной вершины. С другой стороны, мы можем разбить граф  $\mathcal{G}$  на *слабо поло-*

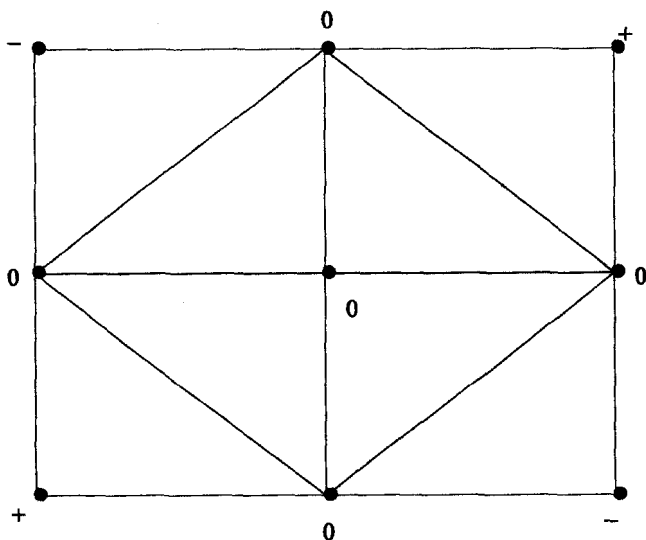


Рис. 9.7.2. Граф имеет два сильно положительных и два сильно отрицательных подграфа; он имеет только один слабо положительный и один слабо отрицательный подграфы

*жительные* и *слабо отрицательные* графы (знака) путем рассмотрения максимальных связных подграфов для неотрицательных и неположительных вершин соответственно. Граф на рисунке 9.7.2 имеет только один слабо положительный граф знака и один слабо отрицательный граф знака; эти графы пересекаются.

Два графа знака,  $S_1, S_2$ , сильного или слабого, называются *присоединенными*, если существуют вершины  $P_1 \in S_1, P_2 \in S_2$  такие, что  $P_1 \sim P_2$ . Нам потребуется следующее простое, но важное свойство:

**Лемма 9.7.1.** *Если два различных графа знака являются присоединенными, то они имеют различные знаки.*

**Доказательство.** Если знаки одинаковы, то по крайней мере один не будет максимален. ■

Заметим, что если два присоединенных графа сильного знака являются непересекающимися, то два присоединенных графа слабого знака могут и пересечься.

Перейдем к рассмотрению второго способа; рассмотрим знаки кусочно-линейной «собственной функции», полученной посредством ин-

терполяции по значениям на вершинах  $u_i$  собственного вектора  $\mathbf{u}$ . Эта «собственная функция» определена на области с кусочно-прямой (в  $\mathbb{R}^2$ ) или кусочно-плоской (в  $\mathbb{R}^3$ ) границей, которая является некоторой аппроксимацией на первоначальной области  $D$ . Мы не исследуем вопрос о том, насколько хороша данная аппроксимация, мы также не рассматриваем вопросы сходимости или выбора достаточно хорошей сети. В силу этого, мы будем просто говорить о конечно-элементной модели области  $D$ , забывая о том, что могут быть некоторые другие исходные области, возможно, с кривой линией границы. Область  $D$  разделяется, как и граф  $\mathcal{G}$ , на подобласти сильного знакопостоянства,  $D_i$ , на которых  $u(\mathbf{x})$  строго больше или строго меньше нуля, и на границах которых  $u(\mathbf{x}) = 0$ . Каждая из этих областей будет многоугольником в  $\mathbb{R}^2$  и полиэдром в  $\mathbb{R}^3$ . В частности, узловые точки  $u$  в  $\mathbb{R}^2$  будут кусочно-прямыми линиями, либо замкнутыми, либо начинающимися и кончающимися на границе, или узловыми многоугольниками, как на рисунке 9.7.1. В  $\mathbb{R}^3$  они будут являться кусочно-плоскими поверхностями, которые либо являются замкнутыми, либо начинаются и кончаются на границе, либо являются полиэдрами. Вместо использования областей *сильного* знакопостоянства, мы можем воспользоваться областями *слабого* знакопостоянства; они также будут иметь кусочно-линейную или кусочно-плоскую границу. Слабоотрицательные и слаболожительные области знакопостоянства могут пересекаться.

Для сетей из треугольников или тетраэдров, отвечающих линейной интерполяции, существует явное соответствие между графами знака, с одной стороны, и областями знакопостоянства, с другой. Для каждой, положительной или отрицательной, области знакопостоянства, сильного или слабого, существует в точности один, положительный или отрицательный, граф знака, сильного или слабого. Это означает, что мы можем посчитать число областей знакопостоянства при помощи подсчета графов знака.

Однако заметим, что конечно-элементная модель с прямоугольной сетью, которая иногда используется в  $\mathbb{R}^2$ , не обладает такими простыми свойствами. Внутри прямоугольника  $u(x, y)$  имеет билинейную интерполяцию

$$u(x, y) = p + qx + ry + sxy.$$

Все вершины прямоугольника являются соседями друг друга в том смысле, что все внедиагональные коэффициенты матриц являются ненулевыми. Поэтому мы изображаем, что вершины прямоугольника соеди-

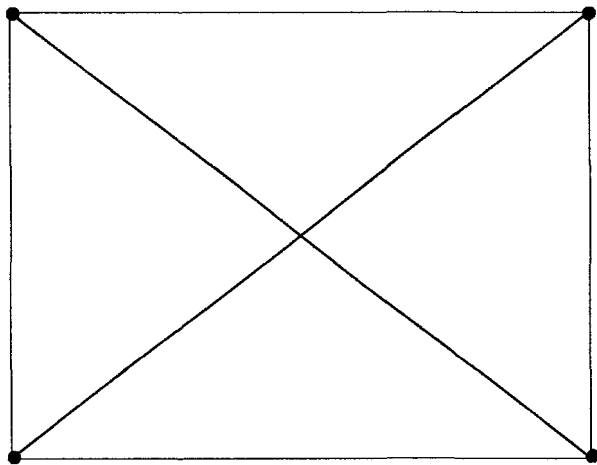


Рис. 9.7.3. Прямоугольный конечный элемент; каждая вершина соединена со всеми другими

нены диагоналями так же, как и сторонами, см. рис. 9.7.3. (Однако пересечение диагоналей не является вершиной графа.)

Для этой сети можно показать, что матрица масс элементов является строго положительной и внедиагональные элементы матрицы жесткости являются строго отрицательными тогда и только тогда, когда стороны  $a, b$  нашего прямоугольника удовлетворяют неравенствам  $1/\sqrt{2} < a/b < \sqrt{2}$ , т. е. если прямоугольник не является слишком тонким. Существует аналогичный результат (упр. 9.7.1) для сети с прямоугольными ячейками в  $\mathbb{R}^3$ . Следовательно, при этих условиях матрицы  $\mathbf{K}, \mathbf{M}$  для всей сети будут удовлетворять неравенствам (9.7.1). Это означает, что мы можем применить результаты приведенных ниже рассуждений к *графам* знака прямоугольной решетки, однако, как показывает пример на рисунке 9.7.4, мы не можем расширить эти результаты на *области* знакопостоянства. Рисунок 9.7.4 изображает сеть, состоящую из девяти квадратных элементов. Вершины  $A$  и  $B$  соединены и имеют одинаковый знак, значит, они принадлежат одному и тому же графу знака. Однако, так как узловые линии на элементе теперь являются гиперболическими и не являются прямыми,  $A$  и  $B$  принадлежат различным *областям* знакопостоянства; существует промежуточная отрицательная область между ними.

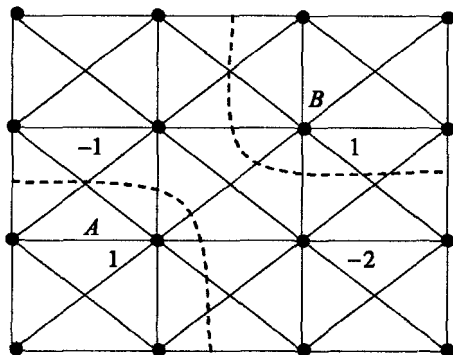


Рис. 9.7.4. Вершины  $A$  и  $B$  являются соседними, хотя принадлежат различным областям знакопостоянства

### Упражнения 9.7

- 1) Найдите условия на частные размерностей прямоугольника, так что матрица жесткости, построенная при помощи линейной интерполяции волн

$$1, x, y, z, yz, zx, xy, xyz,$$

обладает свойством знаков из (9.7.1).

## 9.8. Графы сильного знака

Согласно рассмотрению параграфа 9.7 должно стать понятным, что мы можем изучать знаковые свойства собственных векторов по графу  $\mathcal{G}$  как вопросы, касающиеся его самого, т. е. не рассматривая эти вопросы, как возникающие из конечно-элементной модели. Мы будем поступать именно так и, чтобы упростить исследование, рассмотрим собственные числа в каноническом виде, а именно

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \quad (9.8.1)$$

при следующем предположении: если  $i \neq j$ , то

$$a_{ij} = 0 \quad \text{если } (P_i, P_j) \notin \mathcal{E}, \quad a_{ij} < 0, \quad \text{если } (P_i, P_j) \in \mathcal{E}. \quad (9.8.2)$$

Теперь мы покажем, что все результаты справедливы для уравнения (9.1.1) при условиях (9.7.1). В этом параграфе мы будем называть *графом знака* граф *сильного знака*. Теорема, которую мы собираемся доказать, относительно числа графов знака является дискретным аналогом

теоремы 9.6.1. Для ее доказательства нам потребуется повторить метод, использованный в теореме 9.6.1, и доказать лемму, следуя работе Дэвиса, Глэдвелла, Лэйдолда и Стадлера (Davies, Gladwell, Leydold, Stadler) [71] (2001).

Пусть  $\mathbf{u}$  является собственным вектором для (9.8.1) в собственном пространстве  $\lambda_n$ . Предположим, что  $\mathbf{u}$  имеет  $m$  графов знака  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Определим  $m$  векторов  $\mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , таких, что

$$\mathbf{w}_i = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{на } S_i \\ \mathbf{0} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Конкретизируем, пусть  $\mathbf{w}_i = \{w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,N}\}$ . Тогда  $w_{i,j} = u_j$ , если  $P_j \in S_i$ , и  $w_{i,j} = 0$  иначе. Следовательно,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{w}_i. \quad (9.8.3)$$

Применяя непосредственные вычисления, можно проверить (упр. 9.8.1) лемму Дюваля и Рейнера (Duval, Reiner) (Дюваль, Рейнер (1999) [82]).

### Лемма 9.8.1.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m c_i^2 \mathbf{w}_i^T (\mathbf{A} \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (c_i - c_j)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j.$$

Это позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 9.8.1.** *Любой собственный вектор, соответствующий  $\lambda_n$ , имеет не более  $n + r - 1$  графов знака.*

В этом случае определяющим уравнением является уравнение (9.8.1),  $\mathbf{A}$  удовлетворяет (9.8.2), собственные значения  $(\lambda_n)_1^N$  упорядочены согласно (9.6.1), и  $\lambda_n$  имеет кратность  $r$ , а значит, равенство (9.6.2) остается справедливым.

**Доказательство.** Так как ничто из  $\mathbf{w}_i$  не является тождественно нулевым и они разъединены, их линейная оболочка имеет размерность  $m$ . Следовательно, существуют такие вещественные константы  $(c_i)_i^m$ , не все равные нулю, что вектор  $\mathbf{v}$  отличен от нуля и ортогонален первым  $(m - 1)$  собственным векторам  $(\mathbf{u}_j)_1^{m-1}$  матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Без ограничения общности можно рассмотреть  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$ . Следовательно, по теореме о минимаксе (параграф 2.10) получим

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \geq \lambda_m. \quad (9.8.4)$$

Теперь применим лемму 9.8.1 при  $\lambda = \lambda_n$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$ . Найдем

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda_n = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (c_i - c_j)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j. \quad (9.8.5)$$

Покажем, что сумма в правой части является неотрицательной. Коэффициент  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j$  является ненулевым, только если  $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$  соответствуют присоединенным графам знака; присоединенные графы знака имеют противоположные знаки (лемма 9.7.1); присоединенные графы знака не пересекаются. Последнее означает, что любое ненулевое произведение  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j$  включает только отрицательные внедиагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$ ; следовательно,

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = (\pm)(-)(\mp) = +.$$

Поэтому уравнение (9.8.5) позволяет получить

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda_n \leq 0. \quad (9.8.6)$$

Комбинируя эти результаты с (9.8.4), получаем  $\lambda_m \leq \lambda_n$ . Так как  $\lambda_n < \lambda_{n+r}$ , то  $\lambda_m < \lambda_{n+r}$ , т. е.  $m \leq n + r - 1$ . ■

Заметим, что невозможно сделать вывод о том, что неравенство (9.8.6) является строгим, так как  $c_i - c_j$  может обнулиться на всех парах индексов  $i, j$ , для которых  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j$  строго положительны.

Как мы утверждали ранее, теорема 9.8.1 является дискретным дополнением к CNLT в виде теоремы 9.6.1. Многие исследователи пытались уменьшить границу  $n + r - 1$ . Фридман (Friedman) в работе [96]

(1993) построил пример звезды на  $N$  вершинах для того, чтобы показать, что оценка точна и не может быть редуцирована как в теореме 9.6.2 к  $n$ . Для звезды второе собственное значение матрицы Лапласа (упр. 9.8.2) имеет кратность  $N - 2$ , и соответствующий собственный вектор имеет  $N - 1$  граф знака. Следовательно, если  $N - 1 > 2$ , т.е.  $N \geq 4$ , то второй собственный вектор имеет более двух графов знака. Несмотря на этот контрпример, Дюваль и Рейнер в работе [82] (1999) попытались редуцировать оценку к  $n$ ; ошибка в их доказательстве обсуждается в работе Жу (Zhu) [342] (2000). По существу их ошибка состояла в предположении, что неравенство (9.8.6) может быть строгим. Обсуждение частично ошибочных результатов из работ Фридмана [96] (1993) и ван дер Хольста (van der Holst) [326] (1996) может быть найдено в работе Дэвиса, Глэдвелла, Лэйдолла и Стадлера [71] (2001).

Заметим, что различия между оценками  $n + r - 1$  и  $n$  возникают только тогда, когда  $r > 1$ , т.е.  $\lambda_n$  является кратным. Следуя работе Глэдвелла и Жу [131] (2002), мы покажем, что невозможно редуцировать оценку  $n + r - 1$ , если  $\lambda_n$  является кратным собственным числом. В этом случае возможно построить  $r$  ортогональных векторов  $(\mathbf{u}_j)_{n+r-1}^{n+r-1}$ , порождающих собственное пространство, соответствующее  $\lambda_n$ , так, что  $\mathbf{u}_j$  имеет не более  $j$  графов знака,  $j = n, n + 1, \dots, n + r - 1$ . На самом деле возможно продвинуться далее и построить  $r$  линейно независимых (но не обязательно ортогональных) векторов, порождающих собственное пространство, соответствующее  $\lambda_n$ , так что каждый из них имеет не более  $n$  графов знака. Обозначим число графов знака для  $\mathbf{u}$  через  $SG(\mathbf{u})$ .

**Теорема 9.8.2.** *По условиям теоремы 9.8.1, если  $\mathbf{u}$  является собственным вектором, отвечающим  $\lambda_n$ , и  $SG(\mathbf{u}) = m > n$ , то в обозначениях формулы (9.8.3) мы можем найти*

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{w}_j,$$

тогда  $\mathbf{v}$  является собственным вектором, отвечающим  $\lambda_n$ , и  $SG(\mathbf{v}) \leq n$ .

**Доказательство.** Мы можем выбрать  $c_j$ , не все равные нулю, так, что  $\mathbf{v}$  ортогонален  $(\mathbf{u}_i)_1^{n-1}$ . По теореме о минимаксе  $\lambda_R \geq \lambda_n$ . По лемме 9.8.1,  $\lambda_R \leq \lambda_n$ . Следовательно,  $\lambda_R = \lambda_n$ , и  $\mathbf{v}$  является собственным вектором, отвечающим  $\lambda_n$ . По построению  $SG(\mathbf{v}) \leq n$ . ■

Мы будем обозначать отнормированный вектор  $\mathbf{v}$ , построенный таким образом, через  $\mathbf{v} = T((\mathbf{w}_j)_1^n, (\mathbf{u}_i)_1^{n-1})$ . Вектор  $\mathbf{v}$  определен не един-



ственным образом; всегда существует нетривиальное множество  $(c_j)_1^n$ , однако оно не обязательно единственно.

Заметим, что в теореме 9.6.2, непрерывной версии CNLT, мы предполагаем, что собственная функция  $u_n(\mathbf{x})$  имеет более чем  $n$  областей знакопостоянства, и строим соответствующую собственную функцию  $v(\mathbf{x})$  ортогональной к  $(u_i(\mathbf{x}))_1^{n-1}$ , однако равной нулю на  $D_{n+1}$ ; далее мы пользуемся теоремой об однозначном продолжении для собственной функции на связной области  $D$  для доказательства того, что  $v(\mathbf{x}) \equiv 0$  на  $D$ ; это противоречит предположению о том, что  $v(\mathbf{x})$  — собственная функция, т. е. не является тривиальной. В дискретном случае мы рассматриваем собственный вектор  $\mathbf{u}_n$ , удовлетворяющий  $SG(\mathbf{u}_n) = m > n$ , и строим новый вектор  $\mathbf{v}$  таким образом, что  $SG(\mathbf{v}) \leq n$ ; новый собственный вектор имеет не менее одного нулевого графа знака, однако он является собственным вектором, и противоречия нет.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

**Теорема 9.8.3.** Пусть справедливы условия теоремы 9.8.1. Если  $\lambda_n$  является собственным значением кратности  $r$ , то можно найти  $r$  ортонормальных собственных векторов  $(\mathbf{u}_j)_n^{n+r-1}$ , соответствующих  $\lambda_n$ , таких, что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq j$ ,  $j = n, n+1, \dots, n+r-1$ .

**Доказательство.**  $r$ -мерное собственное пространство  $V$ , соответствующее  $\lambda_n$ , имеет ортонормальный базис  $(\mathbf{v}_j)_n^{n+r-1}$ . Теорема 9.8.1 утверждает, что  $SG(\mathbf{v}_j) \leq n+r-1$  для  $j = n, n+1, \dots, n+r-1$ . Если  $SG(\mathbf{v}_n) \leq n$ , рассмотрим  $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$ ; иначе  $SG(\mathbf{v}_n) > n$ . В этом случае, если  $(\mathbf{w}_j)_1^m$  ( $m > n$ ) являются собственными векторами графа знака для  $\mathbf{v}_n$ , то рассмотрим  $\mathbf{u}_n = T((\mathbf{w}_j)_1^n; (\mathbf{u}_j)_1^{n-1})$ , так что  $SG(\mathbf{u}_n) \leq n$ . Будем доказывать по индукции. Пусть мы уже построили ортонормированные векторы  $\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \dots, \mathbf{u}_{n+s-1}$  ( $1 < s < r$ ) такие, что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq j$  для  $j = n, n+1, \dots, n+s-1$ . Покажем, как построить  $\mathbf{u}_{n+s}$ . Сперва найдем новый ортонормированный базис  $(\mathbf{u}_j)_n^{n+s-1}, (\mathbf{x}_j)_{n+s}^{n+r-1}$  для пространства  $V$ . Если  $SG(\mathbf{x}_{n+s}) \leq n+s$ , то рассмотрим  $\mathbf{u}_{n+s} = \mathbf{x}_{n+s}$ ; иначе  $SG(\mathbf{x}_{n+s}) > n+s$ ; в этом случае, если  $(\mathbf{w}_j)_1^m$  ( $m > n+s$ ) являются векторами графа знака для  $\mathbf{x}_{n+s}$ , рассмотрим  $\mathbf{u}_{n+s} = T((\mathbf{w}_j)_1^{n+s}; (\mathbf{u}_j)_1^{n+s-1})$ . Продолжим действовать тем же способом для того, чтобы найти такие  $(\mathbf{u}_j)_1^{n+r-1}$ , что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq j$ . ■

Теперь мы усилим этот результат.

□

**Теорема 9.8.4.** Пусть справедливы условия из теоремы 9.8.1 и  $\lambda_n$  является собственным значением кратности  $r$ , с собственным про-

пространством  $V$ . Тогда существует базис  $(\mathbf{u}_j)_1^{n+r-1}$  пространства  $V$  такой, что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq n$ .

**Доказательство.** Будем действовать, по сути, аналогично теореме 9.8.3. Построим  $\mathbf{u}_n$  как и ранее и будем рассуждать по индукции: пусть мы уже нашли базис  $(\mathbf{u}_j)_1^{n+s-1}$ ,  $(\mathbf{x}_j)_{n+s}^{n+r-1}$  пространства  $V$  такой, что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq n$  для  $j = n, n+1, \dots, n+s-1$ , покажем, как построить  $\mathbf{u}_{n+s}$ . Если  $SG(\mathbf{x}_{n+s}) \leq n$ , то  $\mathbf{u}_{n+s} = \mathbf{x}_{n+s}$ ; иначе  $SG(\mathbf{x}_{n+s}) = n+t$ ,  $1 \leq t \leq r-1$ . В этом случае пусть  $W$  является пространством, порожденным векторами графа знака  $(\mathbf{w}_j)_1^{n+t}$  для  $\mathbf{x}_{n+s}$ : если  $\mathbf{w} \in W$ , то  $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n+t} c_j \mathbf{w}_j = \mathbf{Wc}$ . Пусть  $Y$  является подпространством в  $W$ , ортогональным к  $(\mathbf{u}_j)_1^{n-1}$ ;  $Y$  не является пустым, так как  $\mathbf{x}_{n+s} = \sum_{j=1}^{n+t} \mathbf{w}_j \in Y$ . Если  $\mathbf{y} \in Y$ , то  $\mathbf{y} = \mathbf{Wc}$  и  $\mathbf{u}_j^T \mathbf{y} = \mathbf{u}_j^T \mathbf{Wc} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Из этих  $n-1$  условий на  $c_j$   $m \leq n-1$  являются независимыми; они могут быть записаны в виде  $\mathbf{Bc} = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{B} \in M_{m, n+t}$ . Тогда матрица  $\mathbf{B}$  имеет  $m$  линейно зависимых столбцов, которые после подходящей перенумерации  $\mathbf{w}_j$  могут рассматриваться как первые  $m$ . Следовательно,  $\mathbf{Bc} = \mathbf{0}$  записывается в виде

$$[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (9.8.7)$$

где  $\mathbf{B}_1 \in M_m$  является невырожденной,  $\mathbf{B}_2 \in M_{m, n+t-m}$ ,

$$\mathbf{c}_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}, \quad \mathbf{c}_2 = \{c_{m+1}, \dots, c_{n+t}\}.$$

Пространство решений для уравнения (9.8.7) порождается  $n+t-m$  решениями, полученными при рассмотрении уравнений  $c_{2,k}^{(i)} = \delta_{ik}$ ,  $i = m+1, \dots, n+t$ , и их решении относительно  $\mathbf{c}_1^{(i)}$ . Каждый такой выбор задает вектор  $\mathbf{y}_i = \mathbf{Wc}^{(i)}$ ; все эти векторы линейно независимы и порождают  $Y$ ; по построению  $SG(\mathbf{y}_i) \leq m+1 \leq n$ . По крайней мере один из векторов  $\mathbf{y}_i$ , скажем  $\mathbf{y}_p$ , должен быть линейно независим с  $(\mathbf{u}_j)_n^{n+s-1}$ , так как  $\mathbf{x}_{n+s} \in Y$  по построению линейно независим с  $(\mathbf{u}_j)_n^{n+s-1}$ . Рассмотрим  $\mathbf{u}_{n+s} = \mathbf{y}_p$ , тогда  $SG(\mathbf{u}_{n+s}) \leq n$ . Можно продолжать таким образом, пока мы не найдем такой вектор  $(\mathbf{u}_j)_n^{n+r-1}$ , что  $SG(\mathbf{u}_j) \leq n$ . ■

Мы завершим этот параграф обсуждением некоторых других следствий леммы 9.8.1.

Пусть  $\mathbf{u}$  является собственным вектором, отвечающим кратному собственному значению  $\lambda_n$ , т. е.  $\mathbf{Au} = \lambda_n \mathbf{u}$ . Предположим, что  $SG(\mathbf{u}) =$

$= m > n$  и  $\mathbf{v}$  из (9.8.3) были вычислены так, что они являются ортогональными к  $(\mathbf{u}_j)_1^{n-1}$ . Тогда, как было показано ранее,  $\mathbf{v}$  является собственным вектором, отвечающим  $\lambda_n$ , т. е.  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_n\mathbf{v}$ . Тогда по лемме 9.8.1 для  $\lambda = \lambda_n$  получим

$$\sum_{i,j=1}^m (c_i - c_j)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = 0. \quad (9.8.8)$$

Однако, как было показано ранее,  $\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j \geq 0$ , строгое неравенство справедливо тогда и только тогда, когда графы  $S_i, S_j$  являются смежными. Уравнение (9.8.8) позволяет заключить, что если  $S_i, S_j$  являются смежными, то  $c_i = c_j$ . Это означает, что если пропустить один граф знака, например  $S_i$ , при построении  $\mathbf{v}$  по графам знака для  $\mathbf{u}$  (т. е.  $c_i = 0$ ), то любой граф знаков  $S_j$ , являющийся смежным к  $S_i$ , должен быть также пропущен ( $c_j = c_i = 0$ ). С другой стороны, если граф  $S_i$  включен в  $\mathbf{v}$ , то любой другой граф знака  $S_j$ , являющийся смежным к графу  $S_i$ , должен быть включен, причем он должен быть включен с тем же весом, что и  $S_i$ :  $c_j = c_i$ . Это означает, что при построении  $\mathbf{v}$  из графов знака для  $\mathbf{u}$  любой связный граф, составленный из графов знаков для  $\mathbf{u}$ , должен быть либо включенным, либо исключенным целиком. Это позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 9.8.5.** Пусть условия, сформулированные в теореме 9.8.1, справедливы. Предположим, что  $\mathbf{u}$  — собственный вектор, отвечающий  $\lambda_n$ , — имеет более чем  $n$  графов знака, т. е.  $SG(\mathbf{u}) = n + g$ ,  $g \geq 1$ . Эти графы знаков можно сгруппировать в  $g + s$  попарно не пересекающихся связных графа  $(C_j)_{1}^{g+s}$ ,  $s \geq 1$ .

**Доказательство.** Если  $s < 1$ , т. е.  $s \leq 0$ , то существуют по крайней мере не более  $g$  связных графов  $C_j$ . Если построить нетривиальный собственный вектор из  $n + g$  графов знака для  $\mathbf{u}$ , удаляя  $g$  из них таким образом, что по крайней мере одно  $S_j$  для каждого  $C_j$  окажется удаленным, то никто из  $C_j$  не появится; т. е.  $\mathbf{v}$  будет тождественно нулевым. Полученное противоречие дает  $s \geq 1$ . ■

Эта теорема обладает рядом следствий:

- (i) Если  $\mathbf{u}$  имеет  $m = n + g$  графов знака, то связная компонента  $C_j$  может содержать не более  $n$  графов знака. Если окажется, что есть компонента, содержащая  $n + 1$  графов знака, то тогда будет не более  $1 + (n + g - n - 1) = g$  связных компонент. Это дает несколько ограниченное дополнение к теореме 9.6.2.

- (ii) Если существуют  $n$  графов знака в одной компоненте  $C_j$  и  $n \geq 2$ , то  $g \geq 2$ . Иначе, если  $n$  графов знака находятся в одной компоненте  $C_j$ , то они должны образовывать собственный вектор; тогда аналогичное будет выполнено для оставшихся  $n + g - n = g$  графов знака. Если  $n \geq 2$ , то собственный вектор, ортогональный к  $\mathbf{u}_1$ , должен иметь по крайней мере два графа знака;  $g \geq 2$ .
- (iii) Если  $\mathcal{G}$  является связным графом и  $\mathbf{u}_n$  не имеет нулей, то, для простого или кратного  $\lambda_n e$ ,  $SG(\mathbf{u}_n) \leq n$ . Иначе, если не существует нулевых вершин, то все графы знака окажутся в одной компоненте.

### Упражнения 9.8

- 1) Докажите лемму 9.8.1, принадлежащую Дювалю и Рейнеру.
- 2) Рассмотрите звезду на  $N$  вершинах с условием  $a_{11} = N - 1$ ,  $a_{ii} = 1$ ,  $a_{1i} = -1$ ,  $i = 2, \dots, N$ . Покажите, что собственные значения равны  $0, 1, N$ .  
Покажите, что второе собственное значение имеет кратность  $N - 2$  и что существует собственный вектор, отвечающий  $\lambda_2$  с  $N - 1$  графом знака.
- 3) Постройте  $N - 2$  ортогональных собственных вектора, отвечающих  $\lambda_2$  для звезды из упр. 9.8.2, с условием:  $\mathbf{u}_j$  имеет только  $j$  графов знака,  $j = 2, 3, \dots, N - 1$ .
- 4) Для той же звезды построьте  $N - 2$  линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{u}_j$  таких, что каждый имеет только 2 графа знаков.

## 9.9. Графы слабого знака

Для получения дискретного аналога теоремы 9.6.2 мы должны рассмотреть графы слабого знака.

**Лемма 9.9.1.** Пусть  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  являются присоединенными графами слабого знака. Существует пара вершин  $P_1, P_2$  такая, что  $P_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$  (т.е.  $P_2$  принадлежит  $\mathcal{S}_2$ , однако не лежит в  $\mathcal{S}_1$ ) и  $P_1 \sim P_2$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности мы будем предполагать, что  $\mathcal{S}_1$  является слабо положительным и  $\mathcal{S}_2$  является слабо отрицательным графами. Если  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  не пересекаются, то по определению присоединенных графов существуют  $P_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{S}_2$  такие, что

$P_1 \sim P_2$ ; так как  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  не пересекаются,  $P_2 \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ . В противном случае  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  имеют непустое пересечение  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ .  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  является сильным подграфом в  $\mathcal{G}$ , поэтому все вершины  $P_1 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  могут являться *внутренними* вершинами в смысле, описанном в параграфе 9.7. Любая граничная вершина  $P_1$  будет обладать требуемым свойством: для указанной  $P_1$  существует вершина  $P_2$  такая, что  $P_2 \sim P_1$  и  $u_2 < 0$ , т. е.  $P_2 \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ . ■

Будем предполагать, что  $\mathbf{u}$  — собственный вектор, отвечающий  $\lambda_n$ , — имеет  $m \geq n$  графов слабого знака  $\mathcal{S}_i$ . Определим  $\mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , как и ранее и выберем  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , не все равные нулю и удовлетворяющие условию:  $\mathbf{v}$ , заданный формулой (9.8.3), ортогонален  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ . Докажем результат о продолжении для коэффициентов  $c_i$ , последнее будет дискретным аналогом теоремы об однозначном продолжении для собственных функций.

**Лемма 9.9.2.** Пусть  $m \geq n$  и два графа слабого знака  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$  для  $\mathbf{u}$  являются смежными, тогда  $c_2 = c_1$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности мы можем предполагать, что граф  $\mathcal{S}_1$  является слабо-положительным и  $\mathcal{S}_2$  является слабо-отрицательным. Будем действовать так же, как и при выводе уравнения (9.8.8). По теореме о минимаксе  $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \geq \lambda_m$ , из леммы 9.8.1 имеем  $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \leq \lambda_n$ , и

$$\sum_{i,j=1}^m (c_i - c_j)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = 0. \quad (9.9.1)$$

Применим лемму 9.9.1. Если  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$  не пересекаются, то существует пара  $P_1, P_2$  такая, что  $P_1 \in \mathcal{S}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{S}_2$  и  $P_1 \sim P_2$ ; следовательно,  $u_1 > 0$ ,  $u_2 < 0$ ,  $a_{12} < 0$ . Получим  $\mathbf{w}_1^T \mathbf{A} \mathbf{w}_2 \geq u_1 a_{12} u_2 > 0$ , и равенство (9.9.1) дает  $c_1 = c_2$ .

Иначе,  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  пересекаются. Так как  $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \leq \lambda_n$ ,  $\mathbf{v}$ , как и  $\mathbf{u}$ , принадлежит собственному пространству, соответствующему  $\lambda_n$ , а значит это же справедливо для

$$\mathbf{z} = c_1 \mathbf{u} - \mathbf{v} = \sum_{j=1}^m (c_1 - c_j) \mathbf{w}_j.$$

По определению,  $w_{j,i} = 0$ , иначе  $P_i \in \mathcal{S}_j$ . Выберем  $P_1$  и  $P_2$  как в лемме 9.9.1:  $P_1 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  дает  $u_1 = 0$ , т. е.  $w_{j,1} = 0$  для всех  $j$ , таких, что  $z_1 = 0$ .

Так как  $\mathbf{z}$  принадлежит собственному пространству для  $\lambda_n$ , получаем

$$\lambda_n \mathbf{z} = \mathbf{Az} = \sum_{j=1}^m (c_1 - c_j) \mathbf{Aw}_j,$$

а значит

$$\begin{aligned} \lambda_n z_1 = 0 &= \sum_{j=1}^m (c_1 - c_j) (\mathbf{Aw}_j)_1, = \\ &= \sum_{j=1}^m (c_1 - c_j) \sum_{i=2}^N a_{1i} w_{j,i}, \end{aligned} \quad (9.9.2)$$

где мы воспользовались тем, что  $w_{j,1} = 0$ . Коэффициент  $a_{1i}$  при  $i \geq 2$  равен нулю, за исключением случая  $P_i \sim P_1$ . Так как  $u_1 = 0$ , все такие  $P_i$  принадлежат  $\mathcal{S}_1$  или  $\mathcal{S}_2$ . Следовательно, сумма в равенстве (9.9.2) берется только при  $j = 2$ :

$$0 = (c_1 - c_2) \sum_{i=2}^N a_{1i} w_{2,i}.$$

Так как  $\mathcal{S}_2$  является слабо отрицательным графом,  $a_{1i} w_{2,i} \geq 0$  для  $i = 2, \dots, N$ : каждый коэффициент в сумме является неотрицательным. В силу  $P_1 \sim P_2$ , получаем  $a_{12} < 0$ ; так как  $P_2 \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ ,  $w_{2,2} = u_2 < 0$  и

$$\sum_{i=2}^N a_{1i} w_{2,i} \geq a_{12} u_2 > 0,$$

следовательно,  $c_1 = c_2$ . ■

Теперь мы можем доказать следующий результат.

**Теорема 9.9.1.** *Если  $\mathcal{G}$  является связным, то любой собственный вектор, соответствующий  $\lambda_n$ , имеет не более  $n$  графов слабого знака.*

**Доказательство.** Пусть, если это возможно,  $\mathbf{u}$  содержит  $m$  графов слабого знака  $\mathcal{S}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и  $m > n$ . По крайней мере один из коэффициентов  $c_i$ , скажем  $c_1$ , является ненулевым. Так как  $n \geq 1$ , получаем  $m \geq 2$ . Так как  $\mathcal{G}$  является связным графом, то  $\mathcal{S}_1$  является присоединенным к, как минимум, одному графу слабого знака, который мы обозначим как  $\mathcal{S}_2$ . Лемма 9.9.2 утверждает, что  $c_2 = c_1$ . Если  $m \geq 3$ ,

то один из графов  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  является присоединенным к одному из оставшихся графов знака  $\mathcal{S}_i$ ,  $i = 3, \dots, m$ , например  $\mathcal{S}_3$ , иначе  $\mathcal{G}$  не будет связным. Следовательно,  $c_3 = c_2 = c_1$  по лемме 9.9.2. За  $m - 1$  шагов мы можем заключить, что  $c_m = c_{m-1} = \dots = c_2 = c_1$ . Следовательно,  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}$ . Однако  $\mathbf{v}$  был построен так, чтобы являться ортогональным к  $\mathbf{u}_i$  для  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ; если  $m > n$ ,  $\mathbf{v}$  является ортогональным к  $\mathbf{u}$ , что противоречит  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}$ . Следовательно,  $m \leq n$ . ■

## 9.10. Обобщение М-, К-задач

Доказательство теоремы 9.8.1 о графах сильного знака базируется на двух фундаментальных результатах: теореме Куранта о минимаксе и лемме 9.8.1 (лемме Дюваля и Рейнера). Теорема 9.9.1 о графах слабого знака использует эти два результата и леммы 9.9.1, 9.9.2.

Все эти промежуточные шаги допускают обобщение для получения результатов о задаче (9.1.1), где матрица  $\mathbf{K}$  обладает свойством PSD,  $\mathbf{M}$  обладает свойством PD, а  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  удовлетворяют уравнению (9.7.1).

Следовательно, так как матрица  $\mathbf{M}$  обладает свойством PD, то теорема о минимаксе справедлива для отношения Рэля  $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} / \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$ . Лемма Дюваля и Рейнера (лемма 9.8.1) обобщается следующим образом:

### Лемма 9.10.1.

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m c_i^2 \mathbf{w}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (c_i - c_j)^2 \mathbf{w}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{w}_j.$$

Так как  $\mathbf{K}$  обладает свойством PSD и  $\mathbf{M}$  обладает свойством PD, собственные значения  $\lambda_i$  являются неотрицательными. Последнее означает, что когда  $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$  отвечают присоединенным графам знака, справедливо

$$\mathbf{w}_i^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{w}_j = (\pm) \{ (-) - (+) \} (\mp) = +.$$

Все рассуждения, использованные для доказательства теорем 9.8.1, 9.9.1, пройдут как и раньше с заменой  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$ .

### Упражнения 9.10

- 1) Докажите лемму 9.10.1.

---

## ГЛАВА 10

# Функции Грина и интегральные уравнения

Стало быть, ум сугубо математический будет правильно работать, только если ему заранее известны все определения и начала, в противном случае он сбивается с толку и становится невыносим, ибо правильно работает лишь на основе совершенно ясных ему начал.

Блез Паскаль «Мысли»

### 10.1. Введение

В этой и последующих двух главах мы будем рассматривать обратные задачи теории колебаний для тройных систем с непрерывно распределенной массой: упругая колеблющаяся струна и стержень с продольной вибрацией или вибрацией вращения. В этом параграфе мы формулируем определяющее дифференциальное уравнение. В параграфе 10.2 мы вводим функции Грина и переформулируем проблему собственных значений таким образом, чтобы она задавала собственные частоты в виде интегрального уравнения. Параграф 10.3 посвящен спектральной теории компактных самосопряженных операторов на гильбертовом пространстве, и в параграфе 10.4 мы применяем их к интегральным уравнениям для функции Грина. Эта глава является вспомогательной для исследований обратных задач из главы 11 и содержит в основном вводный материал.

Уравнение, задающее свободные (бесконечно малые, невозмущенные) колебания упругой струны, имеющей единичное напряжение, распределение массы на единицу длины  $\rho^2(x)$  и вибрирующей с частотой  $\omega$ , записывается следующим образом:

$$v''(x) + \lambda \rho^2(x)v(x) = 0, \quad (10.1.1)$$



где  $\lambda = \omega^2$  и  $' \equiv d/dx$ . Будем обозначать массу на единицу длины через  $\rho^2(x)$ , а не  $\rho(x)$ , для того чтобы подчеркнуть ее положительность и чтобы обойтись без постоянных повторений величины  $\rho^{1/2}(x)$ . Пусть краевые условия имеют следующий вид:

$$v'(0) - hv(0) = 0 = v'(1) + Hv(1), \quad (10.1.2)$$

где  $h, H \geq 0$  и  $h, H$  оба являются нулевыми. Это означает, что концы  $x = 0$ ,  $x = 1$  прикреплены к жестким носителям с помощью пружин, имеющих жесткости  $h, H$  соответственно. Конечно, настоящая (физическая) струна не может иметь «свободный» конец в прямом смысле. Однако свободный конец можно смоделировать, прикрепляя к концам устройство, движущееся трансверсально, таким образом, что наклон струны в конечных точках остается нулевым.

Свободные продольные колебания тонкого прямого стержня с площадью поперечного сечения  $A(x)$ , плотностью  $\rho$  и модулем Юнга  $E$  описываются уравнением

$$(A(x)w'(x))' + \lambda A(x)w(x) = 0, \quad (10.1.3)$$

где  $\lambda = \rho\omega^2/E$ . Краевые условия имеют следующий вид:

$$w'(0) - hw(0) = 0 = w'(1) + Hw(1), \quad (10.1.4)$$

где снова  $h, H \geq 0$  и  $h, H$  не являются оба нулевыми.

Свободные колебания вращения тонкого прямого стержня под действием второго момента площади  $J(x)$ , где плотность стержня равняется  $\rho$ , а модуль сдвига —  $G$ , связаны уравнением

$$(J(x)\theta'(x))' + \lambda J(x)\theta(x) = 0, \quad (10.1.5)$$

где  $\lambda = \rho\omega^2/G$ . Краевые условия имеют вид:

$$\theta'(0) - h\theta(0) = 0 = \theta'(1) + H\theta(1). \quad (10.1.6)$$

Очевидно, существует взаимно-однозначное соответствие

$$(E, A, \rho, v) \rightarrow (G, J, \rho, \theta)$$

между продольными и вращательными системами, однако мы теперь покажем, что посредством преобразования переменных все эти системы могут быть редуцированы к некоторому основному уравнению.

В уравнении (10.1.3) введем новую переменную  $\xi$ , где

$$\xi'(x) = 1/A(x), \quad w(x) = v(\xi). \quad (10.1.7)$$

Тогда  $A(x)w'(x) = A(x)\dot{v}(\xi)\xi'(x) = \dot{v}(\xi)$ , где  $\dot{\phantom{v}} \equiv d/d\xi$ . Следовательно,  $A(Aw')' = \ddot{v}$ , и уравнение (10.1.3) принимает вид

$$\ddot{v}(\xi) + \lambda\rho^2(\xi)v(\xi) = 0, \quad (10.1.8)$$

где  $\rho(\xi) = A(x)$ . Если

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{dt}{A(t)}, \quad 1 = \int_0^1 \frac{dt}{A(t)}, \quad (10.1.9)$$

то условия (10.1.4) имеют вид

$$\dot{v}(0) - hA(0)v(0) = 0 = \dot{v}(1) + HA(1)v(1). \quad (10.1.10)$$

Так как  $A(x)$  является положительным и ограниченным, уравнение (10.1.8) имеет тот же вид, что и (10.1.1), и уравнение (10.1.10) имеет тот же вид, что и (10.1.2). Последнее означает, что мы можем сконцентрировать наше внимание на уравнениях (10.1.1), (10.1.2).

Мы показали, что уравнение (10.1.3) может быть преобразовано в (10.1.1) посредством простой замены переменной. Если мы еще предположим гладкость функции  $A(x)$ , т.е. что  $A(x)$  имеет вторую производную, тогда мы можем преобразовать (10.1.3) в другое уравнение, которое часто рассматривается как стандартная форма, так называемое уравнение *Штурма-Лиувилля*.

В уравнении (10.1.3) рассмотрим

$$y(x) = f(x)w(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} (Aw')' &= [A(f^{-1}y' - f'f^{-2}y)]' \\ &= Af^{-1}y'' + \{(Af^{-1})' - Af'f^{-2}\}y' - (Af'f^{-2})'y. \end{aligned}$$

Выберем функцию  $f$  для того, чтобы коэффициенты в  $y'$  обнулились:

$$(Af^{-1})' - Af'f^{-2} = A'f^{-1} - 2Af'f^{-2}, \quad \text{т.е., } (Af^{-2})' = 0 \text{ или } f = A^{1/2}.$$

Тогда

$$(Aw')' + \lambda Aw \equiv fy'' - f''y + \lambda fy = 0$$

или

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0, \quad (10.1.11)$$

где

$$q(x) = f''(x)/f(x). \quad (10.1.12)$$

Заметим, что, так как (10.1.3) может быть преобразовано в (10.1.1), последнее равенство может быть также преобразовано в (10.1.11). На самом деле, если

$$v(x) = y(\xi)/f(\xi), \quad f(\xi) = \rho^{1/2}(x), \quad \xi'(x) = f^2(x) \quad (10.1.13)$$

то

$$v' = \dot{v}f^2 = f\dot{y} - \dot{f}y, \quad v'' = f^2(f\ddot{y} - \ddot{f}y)$$

и

$$v'' + \lambda\rho^2v \equiv f^2(f\ddot{y} - \ddot{f}y) + \lambda f^4 f^{-1}y = 0,$$

откуда

$$\ddot{y}(\xi) + [\lambda - q(\xi)]y(\xi) = 0, \quad (10.1.14)$$

где

$$q(\xi) = \ddot{f}(\xi)/f(\xi). \quad (10.1.15)$$

Если  $\rho(x)$  непрерывна на  $[0,1]$ , то уравнение (10.1.1) показывает, что  $v(x)$  имеет непрерывную вторую производную. Если  $\rho(x)$  имеет разрыв первого рода в точке  $x = \xi$ , то  $v'(x)$  является непрерывной, тогда как  $v''(x)$  имеет точку разрыва в  $x = \xi$ :

$$v''(x) \Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+} = -\lambda v(\xi)\rho^2(x) \Big|_{x=\xi-}^{x=\xi+}. \quad (10.1.16)$$

Тогда, если  $\rho(x)$  является кусочно-непрерывной на  $(0,1)$ , то  $v''(x)$  также является кусочно-непрерывной.

Для того чтобы показать, что все собственные значения для (10.1.1), (10.1.2) должны быть вещественными и положительными, проведем следующие рассуждения: пусть, возможно, комплексное число  $\lambda$  является собственным значением и  $v(x)$  — собственная функция. Домножим (10.1.1) на  $\overline{v(x)}$  и проинтегрируем вдоль интервала  $(0,1)$ :

$$\int_0^1 v''\overline{v}dx + \lambda \int_0^1 \rho^2 v\overline{v}dx = 0.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям и подставим конечные условия (10.1.2):

$$\int_0^1 v' \bar{v}' dx + hv(0)\overline{v(0)} + Hv(1)\overline{v(1)} = \lambda \int_0^1 \rho^2 v \bar{v} dx. \quad (10.1.17)$$

Слагаемые в левой части являются вещественными; интеграл в правой части является положительным вещественным числом;  $\lambda$  — вещественное число. Сумма в левой части является нулевой только в случае, если  $hv(0) = 0 = Hv(1)$ . Необходимо рассмотреть два случая i)  $h, H > 0$ , в этом случае  $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1)$ , так что  $v(x) \equiv 0$ , и не существует собственной функции  $v(x)$ ; ii)  $h = 0 = H$ , в этом случае носители не имеют жесткости и существует собственное значение  $\lambda = 0$  с соответствующей собственной функцией  $v(x) = \text{constant}$ . Это называется *колебанием твердого тела*. Не считая этого случая, любое собственное значение является строго положительным.

Все собственные числа должны являться *простыми*, иначе  $u(x), v(x)$  окажутся двумя различными собственными функциями, отвечающими одному собственному числу  $\lambda$ , тогда

$$u''(x)v(x) - u(x)v''(x) = 0,$$

т. е.

$$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = \text{const.}$$

Однако, при  $x = 0$ , краевое условие (10.1.2) позволяет получить

$$u'(0)v(0) - u(0)v'(0) = 0.$$

Следовательно,

$$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = 0,$$

и  $u(x), v(x)$  являются пропорциональными.

Предположим, что  $v_1(x), v_2(x)$  являются собственными функциями для (10.1.1), (10.1.2), отвечающими различным собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2$ . Тогда

$$v_1'' + \lambda_1 \rho^2 v_1 = 0 = v_2'' + \lambda_2 \rho^2 v_2$$

и

$$\int_0^1 (v_1'' v_2 - v_2'' v_1) dx + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 \rho^2 v_1 v_2 dx = 0.$$

Однако

$$\int_0^1 (v_1'' v_2 - v_2'' v_1) dx = [v_1' v_2 - v_2' v_1]_0^1 = 0$$

в силу условий на концах и, следовательно, так как  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , а  $v_1$  и  $v_2$  являются ортогональными в том смысле, что

$$\int_0^1 \rho^2 v_1 v_2 dx = 0.$$

Мы показали, что *если* уравнения (10.1.1), (10.1.2) имеют собственные значения, то они будут удовлетворять условиям

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad (10.1.18)$$

Случай равенства был отделен ранее. Соответствующие собственные функции  $v_i(x)$  будут ортогональными; они могут быть ортонормированы так, что

$$\int_0^1 \rho^2 v_i v_j dx = \delta_{ij}. \quad (10.1.19)$$

Мы показали, что изучаемое дифференциальное уравнение может быть записано в трех различных формах: (10.1.1), (10.1.3) или (10.1.11). Основными уравнениями теории колебаний являются следующие два: (10.1.1) для упругой струны; (10.1.3) для стержня. Уравнение (10.1.11), называемое уравнением Штурма–Лиувилля, было введено как некоторая стандартная форма, для которой проще изучать асимптотический вид собственных значений и обратную задачу. Уравнение (10.1.11) изучалось в основном абстрактными математиками, однако в нашем изучении задач теории колебаний необходимо постоянно помнить, что это второстепенное уравнение.

В этой главе мы будем изучать некоторые основные свойства этих уравнений, в частности, их спектральную теорию. В главе 11 мы будем изучать некоторые обратные задачи: как восстановить функции  $\rho(x)$ ,  $A(x)$  или  $q(x)$ , возникающие в каждой из трех форм нашего уравнения.

Спектральная теория содержит следующие шесть основных направлений.

- i) Существование бесконечной последовательности различных вещественных собственных значений с одной предельной точкой,  $+\infty$ . Для уравнений (10.1.1) и (10.1.3) они все являются положительными, в отличие от первого, который равен нулю, если  $h = 0 = H$ .
- ii) Полнота собственных функций на  $[0, 1]$ .
- iii) Асимптотическая форма собственных значений и так называемые нормировочные константы.
- iv) Чередование собственных значений, отвечающих различным конечным константам  $h, H$ .
- v) Осцилляторные свойства собственных функций: как много узлов они содержат.
- vi) Чередование узлов соседних собственных функций.

Каждое из этих направлений может изучаться в различных плоскостях, однако существует, по сути, два основных способа: на основе дифференциального уравнения, как такового; путем преобразования дифференциального уравнения в интегральное уравнение и дальнейшего его исследования.

Среди этих шести направлений, несомненно, одним из самых сложных является ii), полнота собственных функций. В своей недавней монографии [212] (1991) Левитан и Саргсян (Levitan, Sargsjan) изучают полноту, редуцируя (10.1.11) к интегральному уравнению, и в дальнейшем используют разнообразные методы для получения полноты. Мы будем исследовать направления i) и ii) по-разному на самом деле, это напоминает чем-то матричный подход к дискретным задачам, рассматривается уравнение (10.1.1), оно конвертируется в задачу о собственных значениях интегральных операторов, и далее рассматриваются соответствующие задачи функционального анализа. Этот метод потребует больше страниц, нежели метод Левитана и Саргсяна, однако мы считаем, что у него есть ряд достоинств.

Для установления асимптотического вида собственных значений рассматривается уравнение (10.1.11).

Направления v) и vi), узлы и чередования были исследованы Штурмом в его работе. Классический, красиво изложенный подход может быть найден в работе Инка (Ince) [185] (1927). Левитан и Саргсян следуют подходу Штурма. Мы будем использовать полную положительность интегральных уравнений, следуя Гантмахеру и Крейну [98] (1950).

Существуют два способа нормализовать определяющее уравнение и занумеровать собственные значения; каждый из этих способов имеет свои собственные преимущества и недостатки, мы будем использовать каждый из этих способов в подходящей ситуации, будем обозначать их  $V$  в напоминание о колебаниях (vibration) и  $S$ , напоминая об уравнении Штурма–Лиувилля.

**V:** определяющим уравнением является (10.1.1) или (10.1.3), уравнение справедливо для  $x \in [0, 1]$ ; краевые условия имеют вид (10.1.2) или (10.1.4); собственные числа нумеруются как  $(\lambda_i)_1^\infty$ , собственные функции  $(v_i(x))_1^\infty$ .

**S:** определяющим уравнением является (10.1.11), уравнение справедливо для  $x \in [0, \pi]$ ; краевые условия имеют вид

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi);$$

собственные числа обозначаются:  $(\lambda_i)_0^\infty$  и собственные векторы  $(y_i(x))_0^\infty$ .

Следовательно, мы будем использовать  $V$  в рассмотрении параграфов 10.2–10.8, основанных на методе функций Грина для уравнения (10.1.11). Мы будем использовать метод  $S$  для исследования асимптотического вида собственных значений из параграфа 10.9 и для изучения обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля (10.1.11) в главе 11.

### Упражнения 10.1

- 1) Покажите, что собственные значения и собственные функции для уравнения (10.1.1) при  $\rho = 1$  и краевых условиях (10.1.2) имеют вид:

$$\lambda = \omega_n^2, \quad \omega_n = \alpha_n + \beta_n + (n-1)\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha_n = \arctan(h/\omega_n), \quad \beta_n = \arctan(H/\omega_n)$$

и

$$y_n = \cos(\omega_n x - \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее, покажите, что  $\omega_n$  является возрастающей функцией от  $h$  и  $H$ , а значит, когда  $h, H$  являются положительными, то существует только одно собственное значение  $\omega_n$  в каждом из интервалов  $((n-1)\pi, n\pi)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

2) Рассмотрите различные специальные случаи упр. 10.1.1. Тогда

- а)  $h = 0 = H$ , то  $\omega_n = (n - 1)\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , заметим: в этом случае, который рассматривался ранее, найдется нулевое собственное число с собственной функцией  $y_1 = 1$ .
- б)  $h = 0$ ,  $H = \infty$ , тогда  $\omega_n = (n - 1/2)\pi$ ,  $y_n = \cos \omega_n x$
- в)  $h = \infty$ ,  $H = \infty$ , тогда  $\omega_n = n\pi$ ,  $y_n = \sin \omega_n x$
- д)  $h, H$  — конечны, тогда для больших  $n$

$$\omega_n = (n - 1)\pi + \frac{(h + H)}{(n - 1)\pi} + 0 \left( \frac{1}{n^3} \right).$$

Заметим, что это представление показывает, что лучше обозначить собственные значения  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ , а не  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ .

3) Разберитесь, как меняются краевые условия (10.1.1), если одно из уравнений (10.1.3), (10.1.11) заменить на другое. Заметим, что основные уравнения для теории колебаний имеют вид (10.1.1), (10.1.2) и (10.1.3), (10.1.4), где  $h, H$  являются неотрицательными. Заметим, в частности, что если (10.1.3) заменить на (10.1.1), т.е. на (10.1.8), то вид краевых условий не меняется; сравните (10.1.10) и (10.1.2). Однако, если (10.1.1) или (10.1.3) заменить на стандартный вид (10.1.11), то краевые условия изменятся:  $v'(0) - hv(0) = 0$  будет иметь вид  $\dot{y}(0) - ky(0) = 0$  и  $h > 0$  не дает  $k > 0$ .

## 10.2. Функции Грина

Функцию Грина, возможно, наиболее просто ввести путем рассмотрения статических отклонений струны с закрепленными концами, посредством распределенной нагрузки  $f(x)$ . Определяющее уравнение имеет вид

$$-v''(x) = f(x), \quad (10.2.1)$$

а краевые условия  $v(0) = 0 = v(1)$ . Если вместо распределенной нагрузки мы рассмотрим одноточечную нагрузку, сконцентрированную в точке  $x = s$ , то струна будет прямой с каждой стороны от прямой  $x = s$ , но ее наклон будет иметь разрыв при  $x = s$ , как показано на рисунке 10.2.1.

Следовательно,

$$v(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq s, \\ B(1 - x), & s < x \leq 1. \end{cases} \quad (10.2.2)$$



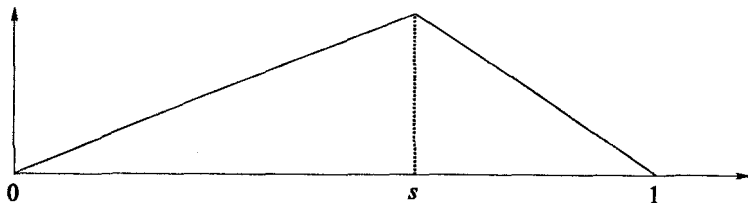


Рис. 10.2.1. Натянутая струна

Равновесие двух частей позволяет получить

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=s+} - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=s-} = -1,$$

откуда, применяя (10.2.2), получим  $A + B = 1$ . В силу непрерывности  $As = B(1 - s)$ , значит

$$A = (1 - s), \quad B = s.$$

Обозначим итоговое отклонение  $G(x, s)$ ; следовательно,

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1 - s), & 0 \leq x \leq s, \\ s(1 - x), & s \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10.2.3)$$

Для получения отклонения струны при действии распределенной нагрузки  $f(x)$  мы одновременно применим точечные силы  $f(s)ds$  в точках  $s$ ; следовательно,

$$v(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds. \quad (10.2.4)$$

Очевидно, эта процедура допускает обобщение, и функция Грина, может быть определена для краевых условий общего вида (10.1.2). Введем решения уравнения  $v''(x) = 0$ :  $\phi(x)$ , удовлетворяющие условию  $\phi'(0) - h\phi(0) = 0$ ;  $\psi(x)$ , удовлетворяющие условию  $\psi'(1) + H\psi(1) = 0$ . Так как

$$\phi''(x) = 0 = \psi''(x),$$

получим  $\phi(x)\psi''(x) - \phi''(x)\psi(x) = 0$ , откуда, после интегрирования, получаем  $\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x) = \text{const}$ . Выберем эту константу равной  $-1$ , так что

$$\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x) = -1, \quad (10.2.5)$$

и определим

$$G(x, s) = \begin{cases} \phi(x)\psi(s), & 0 \leq x \leq s, \\ \phi(s)\psi(x), & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10.2.6)$$

тогда функция  $G(x, s)$  является непрерывной при  $x = s$ , тогда как

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=s+} - \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \Big|_{x=s-} = -1.$$

Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) &= A(1 + hx) \\ \psi(x) &= B(1 + H(1 - x)) \end{aligned} \right\}, \quad (10.2.7)$$

где

$$AB = 1/(h + H + hH),$$

и условия  $h \geq 0$ ,  $H \geq 0$ ,  $h + H > 0$  позволяют заключить, что знаменатель в (10.2.7) является положительным.

Заметим, что функция Грина является симметричной, т. е.

$$G(x, s) = G(s, x), \quad (10.2.8)$$

и что функции  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  являются положительными,  $\phi(x)$  возрастает, тогда как  $\psi(x)$  убывает. На самом деле уравнение (10.2.5) показывает, что  $\phi(x)/\psi(x)$  является возрастающей функцией по  $x$ . Следовательно, существует прозрачная аналогия между функцией Грина и *матрицей* Грина, введенной в параграфе 10.5.

Для наших целей наиболее важное приложение функций Грина состоит в возможности редуцировать задачу о свободных колебаниях (10.1.1), (10.1.2) к проблеме собственных значений для интегрального уравнения:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \rho^2(s)G(x, s)v(s)ds. \quad (10.2.9)$$

Посредством замены переменной

$$u(x) = \rho(x)v(x), \quad K(x, s) = \rho(x)\rho(s)G(x, s), \quad (10.2.10)$$

уравнение (10.2.9) может быть преобразовано в симметрическое уравнение

$$\int_0^1 K(x, s)u(s)ds = \mu u(x), \quad (10.2.11)$$

в котором  $K(x, s) = K(s, x)$  и  $\mu = 1/\lambda$ .

Существует развитая теория таких интегральных уравнений, которую мы здесь затронем. Эта теория связана с компактными самосопряженными линейными операторами, действующими на сепарабельном гильбертовом пространстве. В параграфе 10.3 мы даем обзор спектральной теории таких операторов, и в параграфе 10.4 мы применяем ее к операторным уравнениям (10.2.11).

### Упражнения 10.2

- 1) Найдите решения уравнения  $(Aw')' = 0$ ,  $\phi(x)$ , удовлетворяющие условию (10.1.4 а), и  $\psi(x)$ , удовлетворяющие условию (10.1.4 б), постройте

$$A(x)\{\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x)\} = -1$$

и запишите уравнение (10.1.3) как интегральное уравнение

$$w(x) = \lambda \int_0^x A(s)G(x, s)w(s)ds.$$

- 2) Покажите, что если  $v(x)$  удовлетворяет

$$v'' + \lambda\rho^2v = 0 \quad v(0) = 0 = v'(1)$$

и  $\rho(x)$  обладает непрерывной первой производной, то  $u = v'$  удовлетворяет  $(\rho^{-2}u')' + \lambda u = 0$ ,  $u'(0) = 0 = u(1)$ . Покажите, что, следовательно,  $u(x)$  удовлетворяет условию

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)u(s)ds,$$

где

$$K(x, s) = \int_{x^+}^1 \rho^2(t)dt, \quad x^+ = \max(x, s).$$

- 3) Покажите, что если  $w(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(Aw')' + \lambda Aw = 0, \quad w(0) = 0 = w'(1), \quad A > 1,$$

то  $v = Aw'$  удовлетворяет  $(Bv)' + \lambda Bv = 0$ , где  $B = 1/A$ ,  $v'(0) = 0 = v(1)$ . Следовательно,

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) B(s) v(s) ds,$$

где

$$G(x, s) = \int_{x^+}^1 A(t) dt, \quad x^+ = \max(x, s).$$

### 10.3. Элементы функционального анализа

В первом издании этой книги для доказательства существования собственных значений и собственных функций для интегрального уравнения, т. е. операторного уравнения (10.2.11), мы рекомендовали читателю обратиться к классическому изложению теории интегральных уравнений (см. книгу Гильберта и Куранта [64] (1953)). Однако в настоящем издании мы обсуждаем методы функционального анализа для доказательства существования, предлагая читателю развернутый обзор книги Лебедева, Воровича (Vogovich) и Глэдвелла «Функциональный анализ» [205] (1996). Ссылаясь на определения и теоремы из этой книги, мы будем использовать аббревиатуры опр. и теор. соответственно.

Обзор начинается с определения *метрического пространства*  $X$ , см. опр. 2.1.4, как множества элементов, подчиненных *метрике расстояния*  $d(x, y)$ , удовлетворяющей некоторым аксиомам расстояния. После определения *открытого шара* или  $\epsilon$ -*окрестности* точки  $x_0 \in X$ , опр. 2.2.1, мы определяем *открытое множество* в  $X$  как такое множество, в котором любая точка является внутренней. Тогда, после определения *предельных точек*, опр. 2.2.3, мы определим *замкнутое* множество как множество, содержащее все свои предельные точки, опр. 2.2.6. Определим *замыкание*  $\bar{S}$  множества  $S$  как множество, полученное из  $S$  посредством добавления всех его предельных точек, и скажем, опр. 2.2.7, что  $S$  является *плотным* подмножеством множества  $T$ , если  $\bar{S} \supset T$ .

Путешествие продолжается в метрические пространства для получения метрической версии понятий *предела* последовательности, опр. 2.4.1, *последовательность Коши*, опр. 2.4.2; и *полного* метрического пространства, опр. 2.5.1: метрического пространства, в котором

любая последовательность Коши имеет предел. Опр. 2.6.1, 2.6.2 и теорема о дополнении, теор. 2.6.1 показывают, как дополнить произвольное метрическое пространство.

Ниже приводится определение оператора

**Определение 10.3.1.** Пусть  $X$  и  $Y$  являются метрическими пространствами. Соответствие  $Ax = y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , называется **оператором** из  $X$  в  $Y$ , если каждому  $x \in X$  отвечает не более одного  $y \in Y$ . Множество всех таких  $x \in X$ , для которых существует соответствующий  $y \in Y$ , называется **областью** для  $A$  и обозначается  $D(A)$ ; множество всех  $y$ , являющихся образами элементов  $x \in X$ , называется **образом**  $A$  и обозначается  $R(A)$ . Следовательно,

$$R(A) = \{y \in Y; y = Ax, x \in X\}.$$

Будем говорить, что  $A$  является оператором на  $D(A)$  в  $Y$  или на  $D(A)$  на  $R(A)$ . Будем говорить, что  $R(A)$  является **образом** или **отображением**  $D(A)$  посредством  $A$ . **Ядро** оператора  $A$ , обозначаемое  $N(A)$ , является множеством всех  $x \in X$  таких, что  $Ax = 0$ .

Функционал, опр. 2.7.2, определяется как оператор из  $X$  в поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$  или комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Определение *непрерывных* операторов, опр. 2.7.3, является прямым аналогом непрерывности для обычной функции.

Наше изложение теперь подходит к *линейным* пространствам (параграф 2.8) над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , т. е. пространствам со свойством:  $x, y \in X$  влечет  $\lambda x + \mu y \in X$ ; если на них задана норма  $\|\cdot\|$ , они превращаются в *нормированные линейные пространства*, опр. 2.8.1. После определения *подпространства*, опр. 2.8.4, мы определим *замкнутое* подпространство, опр. 2.8.5, *линейную зависимость* и *независимость*, опр. 2.8.6; и *размерность*, опр. 2.8.8.

Мы переносим понятие оператора в метрическое пространство и определяем *линейный оператор*, опр. 2.9.2, в нормированном линейном пространстве, как оператор, удовлетворяющий условию  $A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$ ; определим *непрерывный* линейный оператор и *норму* непрерывного линейного оператора из  $X$  в  $Y$  согласно (теор. 2.9.1):

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A)} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (10.3.1)$$

$A$  является *непрерывным*, или *ограниченным*, тогда и только тогда, когда  $\|A\|$  является конечной.

Понятия метрики,  $d(x, y)$ , и нормы,  $\|x\|$ , обобщают понятия расстояния и высоты в  $\mathbb{R}^3$  соответственно. Перейдем теперь к пространствам со скалярным произведением или евклидовым (эрмитовым) пространствам  $X$ , в которых скалярное произведение  $(x, y)$  определено для произвольной пары  $x, y \in X$ . Скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам:

**P1:**  $(x, x) \geq 0$ , и  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;

**P2:**  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ;

**P3:**  $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ .

Здесь  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  и верхняя черта в P2 обозначает комплексное сопряжение. В вещественном евклидовом пространстве аксиома P2 заменяется на

**P2':**  $(x, y) = (y, x)$ .

В евклидовом пространстве можно определить норму следующим образом:

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}.$$

То, что это на самом деле является нормой, в обычном смысле следует из неравенства Коши–Шварца (теор. 2.12.1)

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (10.3.2)$$

где равенство достигается при  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $x = \lambda y$ .

В евклидовом (эрмитовом) пространстве  $X$  мы можем определить понятия ортогональности и ортонормированности:  $x$  и  $y$  являются ортогональными, если  $(x, y) = 0$ ; а система  $\{g_k\} \subset X$  является ортонормированной, если

$$(g_m, g_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (10.3.3)$$

Мы можем легко обобщить понятия замкнутости и полноты на евклидовы пространства, мы будем называть полное евклидово (эрмитово) пространство гильбертовым пространством  $H$ , опр. 2.12.5.

Понятие ортогональности приводит нас к ортогональному разложению гильбертова пространства в сумму замкнутого пространства  $M$

и его ортогонального дополнения  $N = M^\perp$ ; если  $x \in H$ , то  $x$  может быть записан в виде суммы

$$x = m + n, \quad m \in M, \quad n \in N. \quad (10.3.4)$$

Очевидно, что замкнутое подпространство гильбертова пространства тоже является гильбертовым пространством.

Это приводит нас к *теореме Рисса о представлении*, теор. 4.3.3, которая утверждает, что любой непрерывный (т. е. ограниченный) линейный функционал  $F(x)$  на  $H$  может быть представлен как скалярное произведение:

$$F(x) = (x, f) \text{ для любого } x \in H, \quad (10.3.5)$$

и  $\|F\| = \|f\|$ .

Определим теперь *сепарабельное* гильбертово пространство  $H$ , опр. 4.1.3, как содержащее некоторое *счетное всюду плотное подмножество*  $\{f_n\}$ . Из этой последовательности, используя обычный метод Грама–Шмидта, можно построить ортонормированное множество  $\{g_k\}$ , которое плотно в  $H$ ; это будет *полная* ортонормированная система в том смысле, что если  $x \in H$  и  $\epsilon > 0$  заданы, то существует конечная линейная комбинация  $g_k$  такая, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k \right\| \leq \epsilon. \quad (10.3.6)$$

В этом случае любой  $x \in X$  имеет единственное представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k, \quad \alpha_k = (x, g_k), \quad (10.3.7)$$

и равенство Парсеваля справедливо:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2. \quad (10.3.8)$$

Наверное, справедливо утверждение о том, что все доказательства существования в функциональном анализе основываются на понятии *компактного* множества в метрическом пространстве. Понятие компактности похоже, но должно быть четко отделено от понятий *замкнутости* и *полноты*. Проще говоря,  $S \subset X$  является *замкнутым*, если

оно содержит все свои предельные точки;  $X$  является *полным*, если любая последовательность Коши в  $S$  имеет предельную точку, лежащую в  $S$ . Множество  $S \subset X$  является *компактным*, опр. 6.1.1, если каждая последовательность Коши  $\{x_n\}$  в  $S$  содержит подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , которая сходится к точке  $x \in S$ .

*Классическая теорема Больцано–Вейерштрасса* (теор. 1.1.2) утверждает, что в конечномерном пространстве, например  $\mathbb{R}^N$ , множество  $S$  является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Этот результат не имеет места для произвольных метрических пространств. Более точно, компактное множество  $S \subset X$  является замкнутым и ограниченным, однако замкнутое и ограниченное множество является компактным, *только если* пространство  $X$  конечномерно.

Для получения критерия компактности множества  $S$  в бесконечномерном метрическом пространстве мы должны обобщить классические теоремы *Гейне–Бореля*. Это потребует введения понятия  $\varepsilon$ -покрытия.

**Определение 10.3.2.** Пусть  $X$  является метрическим пространством, и предположим, что  $S \subset X$ . Конечное множество из  $N$  шаров  $B(x_n, \varepsilon)$ , где  $x_n \in X$  и  $\varepsilon > 0$ , называется **конечным  $\varepsilon$ -покрытием**  $S$ , если каждый элемент  $S$  содержится в одном из шаров  $B(x_n, \varepsilon)$ , т. е.

$$S \subset \bigcup_{n=1}^N B(x_n, \varepsilon).$$

Множество центров  $\{x_n\}$  для конечного  $\varepsilon$ -покрытия называется *конечной  $\varepsilon$ -сетью* для  $S$ .

**Определение 10.3.3.** Пусть  $X$  является метрическим пространством. Множество  $S \subset X$  называется **вполне ограниченным**, если оно имеет конечное  $\varepsilon$ -покрытие для произвольного  $\varepsilon > 0$ .

Сформулируем теперь критерий компактности Хаусдорфа.

**Теорема 10.3.1.** Пусть  $X$  является полным метрическим пространством. Множество  $S \subset X$  является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено.

В компактном множестве все точки, как подсказывает термин *компакт*, расположены близко друг к другу; множество центров  $x_n$  образует сеть, и каждая точка в  $S$  близка к одной из  $x_n$ .

Располагая понятием компактного множества, мы можем определить понятие *компактного* (линейного) *оператора*.



**Определение 10.3.4.** Пусть  $X, Y$  являются метрическими пространствами. Линейный оператор из  $X$  в  $Y$  называется компактным, если он отображает единичный шар в компакт из  $Y$ .

Заметим, что образ единичного шара может не являться компактным множеством; он лишь принадлежит компактному множеству. Будем говорить, что он является предкомпактом, предполагая, что его можно сделать компактом посредством операции замыкания: т.е. его замыкание является компактом.

Если образ линейного оператора  $A$  является конечномерным, мы будем говорить, что  $A$  является конечномерным оператором. По теореме Больцано–Вейерштрасса получаем, что конечномерный оператор является компактным. Теперь можно применить критерий компактности Хаусдорфа для получения более широкого класса компактных операторов.

**Теорема 10.3.2.** Пусть  $X, Y$  являются метрическими пространствами и предположим, что  $Y$  является полным. Если последовательность линейных компактных операторов  $\{A_n\}$  из  $X$  в  $Y$  равномерно сходится к  $A$ , то  $A$  является компактным.

**Доказательство.** Равномерная сходимость означает, что  $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ . Пусть  $S$  является единичным шаром в  $X$ . Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ , и выберем  $A_n$  так, что  $\|Ax - A_nx\| < \varepsilon/3$  для всех  $x \in S$ . Оператор  $A_n$  является компактным; следовательно, образ  $A_n(S)$  для  $A_n$  является предкомпактным; его замыкание является компактным. Следовательно, по теор. 6.2.1, оно вполне ограничено; существует конечное множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset S$  такое, что каждая точка из  $A_n(S)$  принадлежит шару радиуса  $\varepsilon/3$  с центром в одной из точек  $A_nx_1, A_nx_2, \dots, A_nx_m$ . Рассмотрим  $x \in S$  и выберем  $i$  так, что

$$\|A_nx - A_nx_i\| < \varepsilon/3,$$

тогда

$$\|Ax - Ax_i\| \leq \|Ax - A_nx\| + \|A_nx - A_nx_i\| + \|A_nx_i - Ax_i\| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Это означает, что множество  $A(S)$  является вполне ограниченным, а следовательно, снова по теор. 6.2.1, предкомпактным. (Заметим, что необходимо, чтобы  $Y$  было полным.) Значит,  $A$  является компактом. ■

Введя понятие компактности, мы теперь можем определить самосопряженные линейные операторы. Для того чтобы это осуществить,

мы с этого момента будем предполагать, что  $A$  является непрерывным линейным оператором на гильбертовом пространстве  $H$ , т. е. из  $H$  в  $H$ ; будем говорить, что  $A \in B(H, H)$ . Если  $x, y \in H$ , то  $G(x) = (Ax, y)$  является непрерывным функционалом на  $H$ ; следовательно, существует элемент  $g \in H$  такой, что  $(Ax, y) = (x, g)$ . Очевидно, что  $g$  и  $y$  образуют линейно-зависимую систему и  $g$ , по существу, является образом  $y$  относительно нового непрерывного оператора  $A^*$ , называемого *сопряженным* к  $A$  оператором; следовательно,  $g = A^*y$  и

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (10.3.9)$$

Если  $A^* = A$ , то  $A$  называется *самосопряженным*. Если  $A$  является самосопряженным, то функционал

$$F(x) = (Ax, x)$$

имеет вещественные значения, так как

$$F(x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} = \overline{F(x)}.$$

Этот функционал очень важен, так как если  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным оператором, то существуют два способа записать  $\|A\|$ , один согласно формуле (10.3.1), а именно:

$$\|A\| = \sup \|Ax\| \text{ для } \|x\| = 1, \quad (10.3.10)$$

и другой, использующий  $F(x)$ , т. е.

$$\|A\| = \sup |F(x)| = \sup |(Ax, x)| \text{ для } \|x\| = 1. \quad (10.3.11)$$

Обозначим

$$\sup\{F(x)\} = M, \quad \inf\{F(x)\} = m \text{ для } \|x\| = 1. \quad (10.3.12)$$

Легко видеть, что

$$\|A\| = \sup(|M|, |m|). \quad (10.3.13)$$

Перейдем к определению *собственного значения* для оператора  $A \in B(H, H)$ .

**Определение 10.3.5.** Пусть  $A \in B(H, H)$ . Скаляр  $\mu$  называется *собственным значением* оператора  $A$ , если существует ненулевой вектор  $x \in H$  такой, что  $Ax = \mu x$ ;  $x$  называется *собственным вектором*, отвечающим  $\mu$ .

Заметим, что нами используется буква  $\mu$ , а не  $\lambda$  для обозначения собственного значения, чтобы было возможно использовать  $\lambda = 1/\mu$  для обозначения собственного значения дифференциального уравнения (10.1.1). Легко видеть, что любое собственное значение самосопряженного оператора должно быть вещественным, так как  $Ax = \mu x$  означает, что  $(Ax, x) = \mu(x, x)$ . См. также упр. 10.3.1.

**Теорема 10.3.3.** *Если  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным оператором и  $\mu$  не является собственным значением  $A$ , то  $R(A - \mu I)$  плотно в  $H$ .*

**Доказательство.** Нам необходимо показать, что замыкание  $R(A - \mu I)$  есть  $H$ . Это эквивалентно условию, что если  $z$  ортогонален всем  $(A - \mu I)x$ , то  $z = 0$ . В случае если это так, то

$$\begin{aligned} 0 &= (z, (A - \mu I)x) = (z, Ax) - \bar{\mu}(z, x) = \\ &= ((A - \bar{\mu}I)z, x) \end{aligned}$$

для всех  $x \in H$ . Однако, рассматривая  $x = (A - \bar{\mu}I)z$ , мы получим  $(A - \bar{\mu}I)z = 0$ . Если  $z$  не является нулевым, то получаем, что  $\bar{\mu}$  является собственным значением для  $A$ . Однако  $A$  является самосопряженным оператором, а значит  $\bar{\mu}$  вещественное число, т.е.  $\bar{\mu} = \mu$ ; значит  $\mu$  является собственным значением  $A$ , противоречие. ■

Обобщим понятие собственного значения и введем понятие *спектра* оператора.

**Определение 10.3.6.** *Пусть  $A \in B(H, H)$ . Спектр оператора  $A$ , обозначаемый  $\sigma(A)$  это множество всех комплексных чисел  $\mu$  таких, что  $A - \mu I$  не имеет ограниченного обратного оператора. Резольвентой  $\rho(A)$  называется дополнение к множеству  $\sigma$ , т.е.  $\rho = \mathbb{C} \setminus \sigma$ .*

Напомним, что если  $A \in B(H, H)$ , то  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ ; если  $A$  имеет ограниченный обратный оператор, то  $\|Ax\| \geq k\|x\|$  для некоторого  $k > 0$ .

**Лемма 10.3.1.** *Если  $A \in B(H, H)$  и  $\|Ax\| \geq k\|x\|$  для всех  $x \in H$  и некоторого  $k > 0$ , то  $R(A)$  является замкнутым.*

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\} \subset H$  и  $Ax_n \rightarrow y$ . Последовательность  $\{Ax_n\}$  является последовательностью Коши, следовательно, и последовательность  $\{x_n\}$  тоже является последовательностью Коши  $\|x_m - x_n\| \leq \|Ax_m - Ax_n\|/k$ . Так как  $H$  является полным, то существует  $x \in H$ , такой, что  $x_n \rightarrow x$ . По непрерывности мы получим  $Ax_n \rightarrow Ax$ , откуда  $y = Ax$ , т.е.  $y \in R(A)$ :  $R(A)$  является замкнутым. ■

Теперь мы можем охарактеризовать резольвентное множество самосопряженного оператора.

**Теорема 10.3.4.** Пусть  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным оператором  $\mu \in \rho(A)$  тогда и только тогда, когда  $\|(A - \mu I)x\| \geq k\|x\|$  для всех  $x \in H$  и некоторого  $k > 0$ .

**Доказательство.** Если  $\mu \in \rho(A)$ , то  $(A - \mu I)$  имеет ограниченный обратный оператор, откуда

$$\|(A - \mu I)^{-1}\| \cdot \|x\|,$$

т. е.  $\|(A - \mu I)x\| \geq \|(A - \mu I)^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\|$ .

Обратно, если  $\|(A - \mu I)x\| \geq k\|x\|$  для всех  $x \in H$ , то в силу теоремы 10.3.3  $R(A - \mu I)$  является плотным в  $H$ , тогда как по лемме 10.3.1  $R(A - \mu I)$  является замкнутым. Следовательно,  $R(A - \mu I) = H$ , и из  $\|(A - \mu I)x\| \geq k\|x\|$  следует, что  $(A - \mu I)$  обладает ограниченным обратным оператором, т. е.  $\mu \in \rho(A)$ . ■

Покажем, что если  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным оператором, то его спектр является непустым, вещественным и принадлежит интервалу  $[m, M]$ .

**Теорема 10.3.5.** Если  $A \in B(H, H)$  — самосопряженный оператор, то  $\sigma(A)$  — непустое подмножество в  $[m, M]$ , а  $m, M \in \sigma(A)$ .

**Доказательство.** Для начала докажем, что спектр является вещественным. Иначе, если  $\mu = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , то для всех  $x \in H$

$$\begin{aligned} \|(A - \mu I)x\|^2 &= (Ax - \alpha x - i\beta x, Ax - \alpha x - i\beta x) \\ &= \|(A - \alpha I)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 \\ &\geq \beta^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Теорема 10.3.4 показывает, что  $\mu \in \rho(A)$ . Следовательно, если  $\mu \in \sigma(A)$ , то  $\mu$  должно быть вещественным.

Покажем теперь, что если  $\mu < m$ , то  $\mu \in \rho(A)$ . С одной стороны,

$$((A - \mu I)x, x) \leq \|(A - \mu I)x\| \cdot \|x\|,$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} ((A - \mu I)x, x) &= (Ax, x) - \mu \|x\|^2 > m\|x\|^2 - \mu \|x\|^2 \\ &> (m - \mu)\|x\|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\|(A - \mu I)x\| \geq (m - \mu)\|x\|,$$

значит, теорема 10.3.4 показывает, что  $\mu \in \rho(A)$ . Подобным образом можно установить, что если  $\mu > M$ , то  $\mu \in \rho(A)$ . Мы показали, что если  $\sigma(A)$  существует, то он должен принадлежать  $[m, M]$ .

Теперь покажем, что  $M \in \sigma(A)$ . По определению  $\sup$  существует последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|x_n\| = 1$  и  $(Ax_n, x_n) \rightarrow M$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(A - MI)x_n\|^2 &= (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) \\ &= \|Ax_n\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leq M^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M^2 \\ &\leq 2M(M - (Ax_n, x_n)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит,  $M$  и аналогично  $m$  принадлежат  $\sigma(A)$ . ■

Мы уже показали, что самосопряженный оператор  $A \in B(H, H)$  имеет непустой вещественный спектр, принадлежащий  $[m, M]$ . Теперь, предположим, что оператор  $A$  является не только самосопряженным, но и компактным. В этом случае спектр состоит только из собственных значений, исключая, быть может, нулевой элемент, откуда получаем:

**Теорема 10.3.6.** Если  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным и компактным оператором,  $\mu \in \sigma(A)$ ,  $\mu \neq 0$ , то  $\mu$  является собственным значением  $A$ .

**Доказательство.** Если  $\mu \in \sigma(A)$  то, по определению,  $A - \mu I$  не обладает ограниченным обратным. Следовательно, существует (упр. 10.3.3) последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|x_n\| = 1$  и  $Ax_n - \mu x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как оператор  $A$  является компактным, он отображает  $\{x_n\}$  в предкомпактное множество. Это означает, что существует последовательность  $\{x_{n_k}\}$  такая, что  $Ax_{n_k} \rightarrow y \in H$ . Откуда получаем, что

$$x_{n_k} = \mu^{-1}[Ax_{n_k} - (Ax_{n_k} - \mu x_{n_k})] \rightarrow \mu^{-1}y,$$

а следовательно, так как  $A$  является непрерывным оператором,

$$\mu y = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = Ay.$$

Так как  $\|x_n\| = 1$  и  $\mu \neq 0$ , получим  $\|y\| \neq 0$ , а значит,  $y$  является собственным вектором, отвечающим  $\mu$ . ■

В силу доказанного  $m, M \in \sigma(A)$ , откуда для ненулевых  $m, M$  и  $A$  по крайней мере один из них отличен от нуля в силу (10.3.13),  $m$  и  $M$  — собственные значения  $A$ : ненулевой компактный линейный оператор имеет по крайней мере одно вещественное собственное значение.

Доказав, что оператор  $A$  имеет по крайней мере одно собственное значение, мы можем доказать следующую теорему:

**Теорема 10.3.7.** *Ненулевой компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве  $H$  имеет конечную или бесконечную последовательность ортонормированных собственных векторов  $x_1, x_2, \dots$ , отвечающих ненулевым собственным значениям  $\mu_1, \mu_2, \dots$  ( $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$ ).*

**Доказательство.** По теореме 10.3.6, существует собственный вектор  $x_1$ , для которого  $\|x_1\| = 1$ ,  $Ax_1 = \mu_1 x_1$ , где

$$\mu_1 = \pm \sup \{|(Ax, x)|, \quad \|x\| = 1$$

$\mu_1$  равняется или  $m$ , или  $M$  и  $|\mu_1| = \|A\|$ .

Переобозначим гильбертово пространство как  $H_1$ , оператор как  $A_1$ , и пусть  $M_1$  обозначает пространство, порожденное  $x_1$ , разложим  $H_1$  в сумму  $H_2$  и  $M_1$ , аналогично уравнению (10.3.4). Пространство  $H_2$  является гильбертовым. Если  $x \in H_2$ , то  $A_1 x \in H_2$  для

$$(A_1 x, x_1) = (x, A_1 x_1) = (x, \mu_1 x_1) = \mu_1 (x, x_1) = 0.$$

Это означает, что можно определить новый оператор  $A_2$  на  $H_2$  следующим образом:

$$A_2 x = A_1 x, \quad x \in H_2.$$

Этот оператор называется *ограничением*  $A_1$  на  $H_2$ ; он является самосопряженным компактным линейным оператором на гильбертовом пространстве  $H_2$ . Если этот оператор не является тождественно нулевым, то можно применить к нему теорему 10.3.6, и найти собственный вектор  $x_2$  такой, что

$$A_2 x_2 = \mu_2 x_2, \quad \|x_2\| = 1.$$

Так как  $x_2 \in H_2$ , то получим  $(x_2, x_1) = 0$  и для  $\|x\| = 1$

$$|\mu_2| = \sup_{x \in H_2} |(A_1 x, x)| \leq \sup_{x \in H_1} |(A_1 x, x)| = |\mu_1|.$$

Продолжим эту процедуру; пусть  $M_2$  является пространством, порожденным  $x_2$ , разложим  $H_2$  в сумму  $H_3$  и  $M_2$ , обозначим через  $A_3$  ограничение  $A_2$  на  $H_3$  и найдем собственное значение  $\mu_3$  и собственный вектор  $x_3$  и так далее.

В общем случае

$$|\mu_k| = \sup_{x \in H_k} |(Ax, x)| = |(Ax_k, x_k)|, \quad \|x\| = 1 = \|x_k\|. \quad (10.3.14)$$

Указанный процесс может остановиться после конечного числа шагов или продолжаться бесконечно. В первом случае существует целое число  $n$ , для которого оператор  $A_{n+1}$ , являющийся ограничением  $A_1$  на  $H_{n+1}$ , тождественно равен нулю, т. е.

$$\sup_{x \in H_{n+1}} |(Ax, x)| = 0, \quad \|x\| = 1. \quad (10.3.15)$$

В этом случае мы получаем конечную последовательность ортонормированных собственных векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Второй случай рассматривается в следующей теореме.

**Теорема 10.3.8.** Пусть  $A \in B(H, H)$  является самосопряженным компактным оператором. Если оператор  $A$  имеет бесконечное число собственных значений, то их можно занумеровать таким образом, что ноль является единственной предельной точкой.

**Доказательство.** Процесс, описанный в теореме 10.3.7, позволяет построить последовательность собственных значений  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , удовлетворяющую  $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$ , и соответствующую последовательность собственных векторов  $x_1, x_2, \dots$ . Рассмотрим все собственные значения, удовлетворяющие  $|\mu| > c$ . Если существует бесконечная последовательность  $x_1, x_2, \dots$  соответствующая этим собственным значениям, то

$$\|Ax_m - Ax_n\|^2 = \|\mu_m x_m - \mu_n x_n\|^2 = |\mu_m|^2 + |\mu_n|^2 \geq 2c^2. \quad (10.3.16)$$

Однако, так как оператор  $A$  является компактным, последовательность  $\{Ax_n\}$  должна иметь сходящуюся подпоследовательность; это противоречит (10.3.16). Следовательно, существует не более конечного числа собственных векторов, отвечающих собственным числам, удовлетворяющим  $|\mu| > c$ . Собственные числа можно занумеровать путем размещения их модулей в интервалах вида  $(1, \infty)$ ,  $(1/2, 1]$ ,  $(1/3, 1/2]$ ,  $\dots$ ; к каждому из этих интервалов относится лишь конечное число собственных чисел; ноль может быть предельной точкой последовательности собственных чисел. ■

**Теорема 10.3.9.** Пусть  $A \in B(H, H)$  является компактным самосопряженным оператором с собственными числами  $\mu_i$ , упорядоченными следующим образом:  $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$ , обозначим соответствующие ортонормированные собственные векторы  $x_1, x_2, \dots$ . Собственные векторы  $\{x_i\}$  образуют полную систему векторов в образе  $A$ , т. е. для любого  $f = Ah$ ,  $h \in H$ , справедливо равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, x_k)|^2. \quad (10.3.17)$$

**Доказательство.** Для начала предположим, что процедура, описанная в теореме 10.3.7, останавливается. Пусть  $f = Ah$ , и рассмотрим

$$g = h - \sum_{k=1}^n (h, x_k) x_k. \quad (10.3.18)$$

Получим  $(g, x_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , откуда  $g \in H_{n+1}$ , следовательно,  $x = g/\|g\|$  удовлетворяет уравнению (10.3.15), поэтому  $\|Ax\| = 0$ , т. е.  $Ag = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = Ag &= Ah - \sum_{k=1}^n (h, x_k) Ax_k = Ah - \sum_{k=1}^n (Ah, x_k) x_k \\ &= f - \sum_{k=1}^n (f, x_k) x_k, \end{aligned}$$

откуда

$$f = \sum_{k=1}^n (f, x_k) x_k.$$

Теперь рассмотрим случай, когда процесс не останавливается. Существует счетная последовательность собственных значений  $\{\mu_i\}$ , для которой 0 является предельной точкой.

Выберем  $\epsilon > 0$  и такое  $N$ , что если  $n > N$ , то  $|\mu_n|^2 < \epsilon$ . Рассмотрим  $n > N$ . Пусть  $f = Ah$  и выберем  $g$  согласно (10.3.18);  $g \in H_n$  такой, что

$$\frac{\|Ag\|}{\|g\|} \leq |\mu_{n+1}|.$$

Следовательно,

$$\|Ag\| \leq |\mu_{n+1}| \|g\| \leq |\mu_{n+1}| \|h\|,$$



а значит, как и ранее

$$\|Ag\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, x_k) x_k \right\|^2 \leq |\mu_{n+1}|^2 \|h\|^2$$

или, эквивалентно:

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, x_k)|^2 \leq |\mu_{n+1}| \cdot \|h\|^2 \leq \epsilon \|h\|^2,$$

откуда получаем равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, x_k)|^2 = \|f\|^2.$$

Получим теперь другой результат, при других ограничениях на  $A$ ; введем для этого следующие понятия.

**Определение 10.3.7.** Самосопряженный непрерывный линейный оператор  $A$  на гильбертовом пространстве  $H$  называется **строго положительным**, если  $(Ax, x) \geq 0$  для всех  $x \in H$  и  $(Ax, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

Для строго положительного линейного компактного самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве процедура, описанная в теореме 10.3.7, останавливается, только если  $H$  является конечномерным. Откуда получаем:

**Теорема 10.3.10.** Пусть  $A$  является строго положительным компактным самосопряженным линейным оператором на бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$ . Существует ортонормированная система  $\{x_n\}$ , которая является базисом для  $H$ , и  $A$  имеет представление

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k) x_k.$$

**Доказательство.** Пусть  $y \in H$ , рассмотрим

$$y_{n+1} = y - \sum_{k=1}^n (y, x_k) x_k,$$

где  $\{x_k\}$  является ортонормированной последовательностью собственных векторов из теоремы 10.3.9. Легко показать, что  $\{y_n\}$  является последовательностью Коши. Мы хотим установить, что ее предел равен нулю. Пусть это не так, т. е.  $y_n \rightarrow z \neq 0$ . Так как  $y_{n+1} \in H_{n+1}$ , получаем

$$\frac{(Ay_{n+1}, y_{n+1})}{\|y_{n+1}\|^2} \leq \mu_{n+1}^2.$$

Однако  $\mu_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а значит, переход к пределу дает

$$\frac{(Az, z)}{\|z\|^2} = 0,$$

получено противоречие, так как оператор  $A$  является строго положительным. Следовательно,  $z = 0$  и

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, x_k) x_k, \quad y \in H,$$

откуда  $\{x_k\}$  образуют базис  $H$  и, более того,

$$Ay = \sum_{k=1}^{\infty} (y, x_k) Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (y, x_k) x_k.$$

■

Эта теорема показывает, что строго положительные компактные самосопряженные линейные операторы существуют только в *сепарабельном* гильбертовом пространстве.

**Следствие 10.3.1.** *В условиях теоремы 10.3.10 можно ввести норму*

$$\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}$$

*и соответствующее скалярное произведение*

$$(x, y)_A = (Ax, y).$$

*Дополнение  $H$  относительно этой нормы называется  $H_A$ .*

### Упражнения 10.3

- 1) Покажите, что собственные векторы  $x$  и  $y$ , отвечающие двум различным собственным числам самосопряженного оператора  $A$ , являются ортогональными, т. е.  $(x, y) = 0$ .
- 2) Покажите, что оператор  $A^{-1}$  ограничен на  $R(A)$  тогда и только тогда, когда существует константа  $c > 0$  такая, что если  $x \in D(A)$ , то  $\|Ax\| \geq c\|x\|$ .
- 3) Используйте упр. 10.3.2 для доказательства того, что  $A^{-1}$  является неограниченным тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|x_n\| = 1$ ,  $\|Ax_n\| \rightarrow 0$ .
- 4) Покажите, что компактный самосопряженный оператор является строго положительным тогда и только тогда, когда его собственные числа являются положительными.

## 10.4. Интегральное уравнение для функции Грина

Интегральный оператор

$$Au = \int_0^1 K(x, s)u(s)ds \quad (10.4.1)$$

является строго положительным, самосопряженным, компактным оператором на сепарабельном гильбертовом пространстве. Для того, чтобы осуществить эту проверку, нам потребуются некоторые результаты о функциях.

Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке  $[0, 1]$ . Будем его обозначать  $C[0, 1]$ . Фундаментальный результат о функции  $f(x) \in C[0, 1]$  состоит в том, что  $f(x)$  является ограниченной на  $[0, 1]$  и, более того, достигает свою верхнюю грань. Следовательно, можно рассмотреть нормированное линейное пространство на  $C[0, 1]$ , используя норму

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|. \quad (10.4.2)$$

Сходимость последовательности функций  $\{f_n(x)\}$  по норме (10.4.2) является *равномерной* сходимостью. Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости утверждает, что равномерно сходящаяся последовательность Коши  $\{f_n(x)\}$ , т. е. последовательность Коши по норме (10.4.2)

равномерно непрерывных функций на  $[0, 1]$ , сходится к равномерно-непрерывной функции. Это приводит к утверждению о том, что  $C[0, 1]$  по норме (10.4.2) является *полным*.

На пространстве  $C[0, 1]$  можно ввести и другую норму:

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_0^1 (f(x))^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (10.4.3)$$

Пример из упр. 10.4.1 показывает, что  $C[0, 1]$  не является полным относительно этой нормы. Однако мы можем использовать теорему о пополнении и пополнить это пространство. Мы можем ввести структуру евклидова пространства при помощи скалярного произведения

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \quad (10.4.4)$$

Будем называть это полное евклидово пространство, т.е. гильбертово пространство,  $L^2(0, 1)$ . Здесь буква  $L$  употребляется в честь Лебега. Напомним, что тогда как элементы  $C[0, 1]$  являются равномерно-непрерывными функциями, элементы  $L^2(0, 1)$  являются классами эквивалентности последовательностей Коши равномерно-непрерывных функций. Пространство  $L^2(0, 1)$  является *сепарабельным* (теор. 4.1.4).

Теперь перейдем к рассмотрению оператора  $A$  из  $L^2(0, 1)$  в  $L^2(0, 1)$ , определенного следующим образом:

$$Au = \int_0^1 K(x, s)u(s)ds,$$

где

$$K(x, s) = \rho(x)\rho(s)G(x, s) \quad (10.4.5)$$

и  $G(x, s)$  задается равенством (10.2.6).

Оператор  $A$  является самосопряженным на  $L^2(0, 1)$ , так как  $K(x, s)$  — симметрична.

Проверим непрерывность нашего оператора. Предположим, что  $\rho(x) \in C[0, 1]$ , тогда  $K(x, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , а значит,  $K(x, s)$  является ограниченной на квадрате, т.е.  $K(x, s) \leq M$  и

$$\|Au\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |Au| \leq M \sup_{x \in [0, 1]} |u| = M\|u\|_\infty,$$

откуда  $\|A\| \leq M$ :  $A$  является непрерывной функцией.

Теперь рассмотрим непрерывность в  $L^2(0, 1)$ . Справедливо, что

$$\|Au\|^2 = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 K(x, s)u(s)ds \right\}^2 dx.$$

Снова, если  $K(x, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , то  $K(x, s) \leq M$  и

$$\|Au\|^2 \leq M^2 \int_0^1 (u(s))^2 ds \leq M^2 \|u\|^2,$$

откуда  $A$  является непрерывным. Теперь предположим, что  $\rho(x) \in L^2(0, 1)$ .

Так как  $K(x, s) = \rho(x)\rho(s)G(x, s)$  и  $G(x, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , получаем  $|G(x, s)| \leq M$  и

$$|K(x, s)| \leq \rho(x)\rho(s)M.$$

Следовательно,

$$\|Au\|^2 \leq M^2 \int_0^1 \rho^2(x) \left\{ \int_0^1 \rho(s)u(s)ds \right\}^2 dx.$$

Согласно неравенству Шварца (10.3.2) получим:

$$\left\{ \int_0^1 \rho(s)u(s)ds \right\}^2 \leq \int_0^1 \rho^2(s)ds \int_0^1 u^2(s)ds,$$

т. е.

$$\|Au\|^2 \leq M^2 \|\rho\|^4 \|u\|^2.$$

Следовательно,

$$\|A\| \leq M \|\rho\|^2,$$

и  $A$  является непрерывным.

Для доказательства компактности оператора  $A$  заметим, что если функция  $f(x, s)$  является непрерывной на единичном квадрате, т. е.  $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , тогда она равномерно аппроксимируется конечной суммой вида

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(s).$$

Функция Грина  $G(x, s)$  является непрерывной на единичном квадрате и является симметричной по  $x$  и  $s$ . Следовательно, существуют функции  $\{\alpha_i(x)\}_1^\infty$  так, что для данного  $\varepsilon > 0$  можно найти  $N$  такое, что если  $n > N$ , то

$$\sup |G(x, s) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\alpha_i(s)| \leq \varepsilon$$

для  $(x, s) \in ([0, 1] \times [0, 1])$ . Это означает, что если

$$K_n(x, s) = \rho(x)\rho(s) \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\alpha_i(s)$$

и

$$A_n u = \int_0^1 K_n(x, s)u(s)ds,$$

то  $A_n$  является конечномерным оператором, а следовательно, компактным. Если  $\rho \in L^2(0, 1)$ , то  $A$  является пределом последовательности компактных линейных операторов  $\{A_n\}$  и, следовательно, компактен по теореме 10.3.1.

Читатель, примите мои поздравления, если Вы все это прочитали и за всем уследили. Мы пытались устроить развернутую экскурсию; конечно, мы не привели доказательство каждого шага, однако у нас и не было такой цели. Мы могли бы серьезно сократить путь, просто утверждая, что «можно показать, что оператор  $A$  компактен», но мы надеемся, что выбранный маршрут более приятен и целесообразен.

Какие выводы можно сделать из наших рассуждений? Если  $\rho(x) \in L^2(0, 1)$ , то интегральное уравнение имеет конечную или счетную последовательность положительных собственных значений  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , удовлетворяющих  $|\mu_1| > |\mu_2| > \dots$ , и соответствующее множество собственных функций  $\{u_i\}_0^\infty$ , которые являются ортонормированными по  $L^2(0, 1)$ -норме. Однако этот результат не такой сильный, как бы нам хотелось, так как собственные функции, лежащие в  $L^2(0, 1)$ , не являются функциями в обычном смысле, но это лишь классы эквивалентности последовательностей Коши для функций из  $C[0, 1]$ . Можно ли сказать о них что-либо еще?

Для начала заметим, что если  $u$  удовлетворяет (10.2.11), то  $v$  удовлетворяет (10.2.9), напомним, что мы теперь совершили переход  $\lambda \rightarrow 1/\mu$ . Следовательно, собственные значения  $\lambda_i$  из (10.2.9) удовлетворяют неравенствам  $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ . Как мы доказали ранее,

$\lambda_i$  являются различными и положительными, т.е. они удовлетворяют (10.1.18):  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ . Мы пока еще не показали ни того, что существует бесконечное множество собственных значений, ни того, что они различны в терминах функций Грина, мы планируем сделать это в конечном итоге.

Мы можем записать (10.2.9) в виде

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \rho(s)G(x, s)u(s)ds. \quad (10.4.6)$$

Если  $\rho \in L^2(0, 1)$  и  $u \in L^2(0, 1)$ , тогда подынтегральное выражение в формуле (10.4.6) является интегрируемым по  $s$  и равномерно сходящимся по  $x$ , откуда левая сторона,  $v(x)$ , является непрерывной:  $v(x) \in C[0, 1]$ , и мы можем говорить о собственной функции. Если  $\rho \in C[0, 1]$ , то  $v(x)$  обладает непрерывной второй производной, и удовлетворяет уравнению (10.1.1); используя вид  $G(x, s)$ , заданный формулой (10.2.6), получаем, что

$$v(x) = \lambda\psi(x) \int_0^x \rho^2(s)\phi(s)v(s)ds + \lambda\phi(x) \int_x^1 \rho^2(s)\psi(s)v(s)ds, \quad (10.4.7)$$

откуда

$$v(0) = \lambda\phi(0) \int_0^1 \rho^2(s)\psi(s)v(s)ds,$$

$$v(1) = \lambda\psi(1) \int_0^1 \rho^2(s)\phi(s)v(s)ds.$$

Дифференцируя (10.4.7), а это можно сделать, поскольку все подынтегральные выражения непрерывны, мы получим

$$v'(x) = \lambda\psi'(x) \int_0^x \rho^2(s)\phi(s)v(s)ds + \psi(x)\rho^2(x)\phi(x)v(x),$$

$$+ \lambda\phi'(x) \int_x^1 \rho^2(s)\psi(s)v(s)ds - \phi(x)\rho^2(x)\psi(x)v(x).$$

Следовательно,

$$v'(0) = \lambda \phi'(0) \int_0^1 \rho^2(s) \psi(s) v(s) ds = hv(0),$$

$$v'(1) = \lambda \psi'(1) \int_0^1 \rho^2(s) \phi(s) v(s) ds = -Hv(1).$$

Значит,  $v(x)$  удовлетворяет сформулированным краевым условиям. Дифференцируя второй раз и используя  $\phi''(x) = 0 = \psi''(x)$ , получим

$$v''(x) = \lambda(\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x))\rho^2(x)v(x)$$

ввиду (10.2.5)

$$v''(x) + \lambda\rho^2(x)v(x) = 0.$$

#### Упражнения 10.4

- 1) Рассмотрите последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , принадлежащих  $C[0, 1]$ :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ n^{\frac{1}{4}}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Покажите, что  $\{f_n(x)\}$  является последовательностью Коши относительно  $L^2$ -нормы (10.4.3), однако  $\{f_n(x)\}$  сходится к

$$f(x) = x^{-\frac{1}{4}},$$

которая не принадлежит  $C[0, 1]$ . Следовательно,  $C[0, 1]$  не является полным по  $L^2$ -норме.

### 10.5. Осцилляционные свойства функций Грина

В параграфе 10.4 мы показали, что, когда  $h \geq 0$ ,  $H \geq 0$ ,  $h + H > 0$ , интегральное уравнение (10.2.9) имеет собственные значения  $\lambda_i$ , удовлетворяющие  $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ ; если их бесконечное число, то

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \rightarrow \infty.$$



С другой стороны, в параграфе 10.4, нами было показано, что собственные числа для (эквивалентного) уравнения (10.1.1) являются различными и положительными, т. е.

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Это означает, что функция Грина  $G(x, s)$  должна иметь некоторые специальные свойства, которые приводят к тому, что собственные числа являются различными; обсудим эти свойства.

Начнем с определения промежутка  $I$  следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= [0, 1], \text{ если } h, H \text{ конечны} \\ &= (0, 1], \text{ если } h = \infty, H \text{ конечен} \\ &= [0, 1), \text{ если } h \text{ конечен, } H = \infty \\ &= (0, 1), \text{ если } h = \infty = H. \end{aligned}$$

Заметим, что когда  $h = \infty$ , краевое условие  $u'(0) - hu(0) = 0$  принимает вид  $u(0) = 0$ , т. е. конец  $x = 0$  является зафиксированным. Это означает, что  $I$  является множеством *подвижных точек* в  $[0, 1]$ . Уравнения (10.2.6), (10.2.7) показывают, что

$$\begin{aligned} G(x, s) &\geq 0 \text{ для } x, s \in [0, 1] \\ &> 0 \text{ для } x, s \in I. \end{aligned}$$

Введем понятие *осцилляторного ядра*.

**Определение 10.5.1.** Если  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$  и  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , то мы будем говорить, что  $\mathbf{x} \in Q$ . Если  $x_1, x_n \in I$ , то будем говорить, что  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ . Ядро  $K(x, s)$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$  называется *осцилляторным*, если

- i)  $K(x, s) > 0$  для  $x, s \in \mathcal{I}$ ;
- ii)  $K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \geq 0$  для  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in Q$ ;
- iii)  $K(\mathbf{x}; \mathbf{x}) > 0$  для  $\mathbf{x} \in Q$ .

Здесь

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) = \begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) & \dots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2) & \dots & K(x_2, s_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) & \dots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что упр. 10.5.1 показывает, что свойство iii) должно быть выполнено для  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ .

**Теорема 10.5.1.** *Ядро  $K(x, s)$  является осцилляторным тогда и только тогда, когда матрица  $A = (a_{ij}) = (K(x_i, x_j))$  является осцилляторной для любого  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ .*

**Доказательство.** Пусть ядро является осцилляторным, тогда, в обозначениях параграфа 6.2, если  $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ ,  $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_p)$ , то

$$A(\alpha; \beta) = K(\mathbf{x}^0; \mathbf{s}^0) \geq 0,$$

где  $x_k^0 = x_{i_k}$ ,  $s_k^0 = x_{j_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . Следовательно,  $\mathbf{A}$  обладает свойством TN. Далее:

$$a_{i, i+1} = K(x_i, x_{i+1}) > 0, \quad a_{i+1, i} = K(x_{i+1}, x_i) > 0,$$

тогда как

$$\det(\mathbf{A}) = K(\mathbf{x}; \mathbf{x}) > 0.$$

Следовательно, матрица  $\mathbf{A}$  удовлетворяет трем условиям, дающим осцилляторность: это свойство TN, коэффициенты диагонали, следующей за главной диагональю, являются положительными, и невырожденность. Обратим эти рассуждения, чтобы показать, что если  $\mathbf{A}$  является осцилляторной, то  $K(x, s)$  является ядром осцилляции. ■

Заметим, что в дополнение к осцилляторности  $\mathbf{A}$  является строго положительной матрицей для  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathcal{I}$ .

Покажем, что функция Грина  $G(x, s)$ , определенная в (10.2.6), (10.2.7), является ядром осцилляции. Для этого приведем определение матрицы Грина.

**Определение 10.5.2.** *Матрица  $\mathbf{G} = (g_{ij})$  называется матрицей Грина, если*

$$g_{ij} = \begin{cases} a_i b_j, & i \leq j, \\ a_j b_i, & i \geq j, \end{cases}$$

где  $(a_i)_1^n, (b_i)_1^n \subset \mathbb{R}$ .

Заметим, что  $\mathbf{G}$  является симметричной.

**Теорема 10.5.2.** *Если  $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ ,  $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_p)$ , то*

$$G(\alpha; \beta) = a_{k_1} \prod_{r=2}^p \begin{vmatrix} a_{k_r} & a_{l_{r-1}} \\ b_{k_r} & b_{l_{r-1}} \end{vmatrix} b_{l_p}, \quad (10.5.1)$$

где  $k_m = \min(i_m, j_m)$ ,  $l_m = \max(i_m, j_m)$  при условии  $i_m, j_m < i_{m+1}, j_{m+1}$ .

Напомним, что это означает, что

$$i_m < i_{m+1}, \quad i_m < j_{m+1}, \quad j_m < i_{m+1}, \quad j_m < j_{m+1}.$$

**Доказательство.** Если  $i_1 < i_2$ , а  $j_1 \geq i_2$ , то первые две строки минора имеют вид

$$g_{i_1, j_1} \quad g_{i_1, j_2} \quad \dots \quad g_{i_1, j_p},$$

$$g_{i_2, j_1} \quad g_{i_2, j_2} \quad \dots \quad g_{i_2, j_p};$$

они равны

$$a_{i_1} b_{j_1}, \quad a_{i_1} b_{j_2}, \quad \dots \quad a_{i_1} b_{j_p},$$

$$a_{i_2} b_{j_1}, \quad a_{i_2} b_{j_2} \quad \dots \quad a_{i_2} b_{j_p}$$

и, следовательно, являются пропорциональными, откуда минор равен нулю. Аналогично, если  $j_1 < j_2 \leq i_1$ , то первые два столбца являются пропорциональными и минор равен нулю. Следовательно, можно предполагать, что  $\max(i_1, j_1) < \min(i_2, j_2)$ . Предположим для определенности, что  $i_2 \leq j_2$  (в другом случае рассуждения надо применять к первым двум столбцам), тогда первые две строки имеют вид

$$a_{k_1} b_{l_1}, \quad a_{i_1} b_{j_2}, \quad \dots \quad a_{i_1} b_{j_p};$$

$$a_{j_1} b_{i_2}, \quad a_{i_2} b_{j_2}, \quad \dots \quad a_{i_2} b_{j_p}.$$

Следовательно, коэффициенты в столбцах 2, 3, ...,  $p$  являются пропорциональными. Домножая вторую строку на  $a_{i_1}/a_{i_2}$  и вычитая ее из первой, мы получим, что единственный ненулевой коэффициент, первый в первой строке, равен

$$\begin{aligned} a_{k_1} b_{l_1} - a_{i_1} a_{j_1} b_{i_2}/a_{i_2} &= a_{k_1} b_{l_1} - a_{k_1} a_{i_1} b_{k_2}/a_{k_2} = \\ &= \frac{a_{k_1}}{a_{k_2}} \begin{vmatrix} a_{k_2} & a_{l_1} \\ b_{k_2} & b_{l_1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а значит,

$$G(\alpha; \beta) = a_{k_1} \begin{vmatrix} a_{k_2} & a_{l_1} \\ b_{k_2} & b_{l_1} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{a_{k_2}} G(\alpha \setminus i_1; \beta \setminus j_1),$$

откуда теорема следует по индукции. ■

**Теорема 10.5.3.** Матрица Грина  $\mathbf{G}$  обладает свойством  $TN$  тогда и только тогда, когда все  $(a_i)_1^n, (b_i)_1^n$  имеют одинаковый строгий знак и

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n}. \quad (10.5.2)$$

Более того,  $\mathbf{G}$  является осцилляторной тогда и только тогда, когда  $(a_i)_1^n, (b_i)_1^n$  имеют одинаковый строгий знак и

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{b_n}. \quad (10.5.3)$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно предполагать, что все  $(a_i)_1^n, (b_i)_1^n$  являются положительными. Как было показано в теореме 10.5.2, минор является нулевым, исключая случай

$$i_1, j_1 < i_2, j_2 < \dots < i_p, j_p.$$

Каждый из определителей второго порядка в (10.5.1) является неотрицательным тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_{l_{i-1}}}{b_{l_{i-1}}} \leq \frac{a_{k_i}}{b_{k_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Это в точности условие (10.5.2).  $\mathbf{G}$  обладает свойством TN и  $g_{i,i+1} > 0$ ,  $g_{i+1,i} > 0$ , а значит, единственным условием, которое должно быть выполнено для того, чтобы матрица  $\mathbf{G}$  была осцилляторной, является ее невырожденность. Следовательно, каждый определитель второго порядка в разложении  $G(\alpha; \beta)$  должен быть положительен, что дает (10.5.3). ■

**Следствие 10.5.1.** Пусть  $\phi(x), \psi(x)$  являются непрерывными на  $[0, 1]$  и

$$K(x, s) = \begin{cases} \phi(x)\psi(s), & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ \phi(s)\psi(x), & 0 \leq s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Если  $\phi(x)\psi(x) > 0$  на  $(0, 1)$  и  $\phi(x)/\psi(x)$  является возрастающей функцией от  $x$  на  $(0, 1)$ , то

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \geq 0 \text{ для } \mathbf{x}, \mathbf{s} \in Q.$$

Если  $\phi(x)\psi(x) > 0$  на  $I$  и  $\phi(x)/\psi(x)$  является строго возрастающей функцией от  $x$  на  $I$ , то

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) > 0$$

тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in I$  и  $x_1, s_1 < x_2, s_2 < \dots < x_n, s_n$ .

**Теорема 10.5.4.** Функция Грина  $G(x, s)$  из уравнения (10.2.5), (10.2.6) является осцилляторной и минор  $G(\mathbf{x}; \mathbf{s}) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in I$  и  $x_1, s_1 < x_2, s_2 < \dots < x_n, s_n$ .

**Доказательство.** Уравнение (10.2.7) показывает, что  $\phi(x)\psi(x) > 0$  на  $I$ . Уравнение (10.2.5) дает

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \right] = \frac{\phi'(x)\psi(x) - \phi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2} = \frac{1}{[\psi(x)]^2} > 0 \text{ на } I,$$

значит,  $\phi(x)/\psi(x)$  строго возрастает на  $I$ , т. е. результат получается из следствия 10.5.1.  $\blacksquare$

Для того чтобы выяснить осцилляторный тип функции Грина, рассмотрим струну под действием  $n$  точечных сил  $(F_i)_1^n$ , нормально действующих на струну в  $n$  точках  $(s_i)_1^n$  на  $I$ . Смещение имеет вид:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n G(x, s_i) F_i.$$

Следовательно,  $G(x, s) > 0$  (условие i) из определения 10.5.1) означает, что смещение относительно одной силы  $F$  происходит в направлении действия силы.

Для того чтобы почувствовать смысл условия iii) из определения 10.5.1, заметим, что энергия деформации струны под действием  $n$  сил имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u(s_i) F_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G(s_i, s_j) F_i F_j,$$

а значит, условие iii) утверждает, что  $U$  является положительно определенной (для сил, примененных к подвижным точкам, т. е. на  $I$ ).

Природа осцилляторного ядра легко видна из следующей теоремы:

**Теорема 10.5.5.** *Под действием  $n$  сил  $(F_i)_1^n$  смещение струны  $u(x)$  может изменить свой знак не более чем  $n - 1$  раз.*

**Доказательство.** Пусть силы  $(F_i)_1^n$  приложены к точкам  $(s_i)_1^n$ , где  $s \in I$ . Если  $s_1 > 0$ , то

$$u(x) = \phi(x) \sum_{i=1}^n F_i \psi(s_i), \quad 0 \leq x \leq s_1,$$

а значит,  $u(x)$  имеет одинаковый знак на  $[0, s_1]$ . Если

$$\sum_{i=1}^n F_i \psi(s_i) = 0,$$

то  $u(x)$  является тождественно нулевой на отрезке  $[0, s]$ . Иначе, она имеет постоянный знак и является нулевой, только если  $x = 0$ , и это верно только тогда, когда струна закреплена в  $x = 0$ , т. е.  $h = \infty$ .

На интервале  $[s_j, s_{j+1}]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$u(x) = \psi(x) \sum_{i=1}^j F_i \phi(s_i) + \phi(x) \sum_{i=j+1}^n F_i \psi(s_i).$$

Так как  $\phi(x), \psi(x)$  являются линейно независимыми, то смещение  $u(x)$  является тождественно нулевым на  $[s_j, s_{j+1}]$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n F_i \phi(s_i) = 0 = \sum_{i=j+1}^n F_i \psi(s_i).$$

Если это не так, то  $u(x)$  может иметь не более одного нуля на  $[s_j, s_{j+1}]$ . Иначе, допустим есть два нуля скажем  $\xi, \eta$ , такие, что  $s_j \leq \xi < \eta \leq s_{j+1}$ , тогда  $\psi(\xi)\phi(\eta) - \psi(\eta)\phi(\xi) = 0$ , это противоречит тому факту, что  $\phi(x)/\psi(x)$  является строго возрастающей функцией.

Теперь, если  $s_n \leq x \leq 1$ , то

$$u(x) = \psi(x) \sum_{i=1}^n F_i \phi(s_i),$$

а значит, снова  $u(x)$  имеет постоянный знак. Эта функция является тождественно нулевой, если

$$\sum_{i=1}^n F_i \phi(s_i) = 0,$$

иначе, она может обнулиться только при  $x = 1$  и только если  $H = \infty$ . Получим, что  $u(x)$  может поменять знак не более  $n-1$  раз и по крайней мере один раз в каждом из интервалов

$$(s_1, s_2], [s_2, s_3], \dots, [s_{n-1}, s_n).$$



### Упражнения 10.5

- 1) Непрерывность минора из пункта ii) определения 10.5.1 показывает, что он будет неотрицательным для  $(x_i)_1^n, (s_i)_1^n$ , удовлетворяющих  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$  и  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq 1$ . Используем теорему 6.6.5 для доказательства того, что свойство iii) обязательно справедливо для  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ .

## 10.6. Осцилляторные системы функций

В этом параграфе мы выведем некоторые основные результаты, необходимые для доказательства дальнейших свойств собственных решений.

Пусть  $(\phi_i(x))_1^n$  является последовательностью функций, определенной на интервале  $I$ ,  $([0, 1], (0, 1], [0, 1)$  или  $(0, 1)$ .

**Теорема 10.6.1.** *Необходимое и достаточное условие того, что функции  $(\phi_i(x))_1^n$  являются линейно зависимыми, состоит в том, что*

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n) \equiv \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_n) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x_1) & \phi_n(x_2) & \dots & \phi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

является нулевым для всех  $(x_r)_1^n \in I$ .

**Доказательство.** Условие необходимо. Так как если функции  $(\phi_i(x))_1^n$  являются линейно зависимыми, то существуют константы  $(c_i)_1^n$ , не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) = 0 \text{ для } x \in I.$$

Это означает, что для любого  $(x_r)_1^n \in I$  получаем

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x_r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (10.6.1)$$

Так как  $(c_i)_1^n$  не все равны нулю, то определитель коэффициентов из равенства (10.6.1) должен быть нулевым.

Докажем достаточность по индукции. Если  $n = 1$ , то  $\Phi = 0$  дает то, что  $\phi_1(x_1) = 0$  для любого  $x_1 \in I$ , т. е.  $\phi_1(x) \equiv 0$  для  $x \in I$ .

Предположим тогда, что

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n) = 0 \text{ для всех } (x_i)_1^n \in I.$$

Нам надо доказать, что  $(\phi_i(x))_1^n$  являются линейно независимыми. Предположим, что  $(\phi_i(x))_1^{n-1}$  являются линейно независимыми (иначе, если они зависимы, то это будет справедливо и для  $(\phi_i(x))_1^n$ ), тогда существуют  $(x_r)_1^{n-1} \in I$  такие, что

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; 1, 2, \dots, n-1) \neq 0. \quad (10.6.2)$$

Однако тогда для всех  $x \in I$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x; 1, 2, \dots, n) = 0.$$

Разложим этот определитель по последней строке; результат имеет вид (10.6.1), в котором  $c_n$ , равный определителю (10.6.2), является ненулевым. ■

**Определение 10.6.1.** Последовательность непрерывных функций  $(\phi_i(x))_1^n$  образует **последовательность Чебышева** на  $I$ , если для любого множества вещественных чисел  $(c_i)_1^n$ , не все из которых равны нулю, функция

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$$

не равна нулю более чем в  $n - 1$  точках  $I$ .

**Теорема 10.6.2.** Последовательность  $(\phi_i(x))_1^n$  является последовательностью Чебышева на  $I$  тогда и только тогда, когда

$$\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}; \theta)$$

строго сохраняет постоянный знак для  $\mathbf{x} \in I$ ;  $\theta$  обозначает  $(1, 2, \dots, n)$ .

**Доказательство.**  $\Phi = 0$  для некоторого  $\mathbf{x} \in I$  тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x_r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$



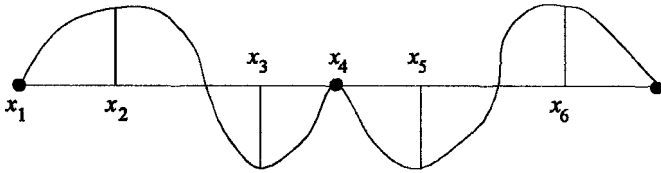


Рис. 10.6.2.  $\phi(x)$  имеет два простых узла и один двойной узел

Предположим, что  $s + 2d + p \geq n$ , тогда можно найти  $n + 1$  точек  $(x_i)_1^{n+1}$  со свойством  $Z$ , т. е.

$$(-1)^{h+k} \phi(x_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (10.6.3)$$

Так как  $\phi(x)$  является линейной комбинацией  $(\phi_i)_1^n$ , то функции  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi = \phi_{n+1}$  являются линейно зависимыми. Следовательно, по теореме 10.6.1,

$$\Phi(1, 2, \dots, n + 1; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

Разложим этот нулевой определитель по последней строке; получаем,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+k+1} \phi(x_k) \Phi(1, 2, \dots, n; x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0.$$

Так как  $(\phi_i(x))_1^n$  образуют последовательность Чебышева, определители в этом уравнении строго сохраняют знак, по теореме 10.6.2. Более того, по предположению (10.6.3), коэффициенты  $(-1)^{n+k+1} \phi(x_k)$  имеют одинаковый знак (некоторые из них могут равняться нулю). Это означает, что  $\phi(x_k) = 0$  для  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , однако это невозможно, так как  $(\phi_i)_1^n$  образуют последовательность Чебышева,  $\phi(x)$  имеет не более  $n - 1$  нулей. Получаем, что  $t \leq n$ , т. е.  $s + 2d + p \leq n - 1$ . ■

Введем дополнительное условие на функции  $\{\phi_i(x)\}_1^\infty$ , состоящее в том, что они являются ортонормированными, и докажем важную теорему.

**Теорема 10.6.4.** Если  $\{\phi_i(x)\}_1^\infty$  является последовательностью Маркова непрерывных функций на  $I$  и  $\phi_i(x)$  являются ортонормированными относительно некоторого скалярного произведения, т. е.  $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$ , то

1)  $\phi_1(x)$  не имеет нулей на  $I$ .

- 2)  $\phi_i(x)$  имеет  $i-1$  простых узлов и не имеет остальных нулей на  $I$ .
- 3)  $\phi(x) = \sum_{i=j}^k c_i \phi_i(x)$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $\sum_{i=j}^k c_i^2 > 0$  имеет не менее  $j-1$  простых узлов на  $(0,1)$  и не более  $k-1$  нулей на  $I$ ; в обозначениях теоремы 10.6.3,  $s+2d+p \leq k-1$ .

**Доказательство.** Заметим, что 1) и 2) являются частными случаями 3), а тогда все, что остается доказать в 3), это то, что  $\phi(x)$  имеет не менее  $j-1$  простых узлов.

Функции  $(\phi_i)_1^\infty$  образуют последовательность Маркова. Это означает, что если  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ , то

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n)$$

имеют одинаковый знак, который может быть выбран положительным. Пусть  $(\xi_i)_1^s$  являются простыми узлами для  $\phi(x)$  на  $(0,1)$ , определим

$$\psi(x) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, x; 1, 2, \dots, s+1).$$

Если  $x > \xi_s$ , то  $\psi(x) > 0$ . Если  $\xi_p < x < \xi_{p+1}$ ,  $p = 1, 2, \dots, s-1$ ,

$$\psi(x) = (-1)^{s-p} \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, x, \xi_{p+1}, \dots, \xi_s; 1, 2, \dots, s+1),$$

однако, если  $x < \xi_1$ ,

$$\psi(x) = (-1)^s \Phi(x, \xi_1, \dots, \xi_s; 1, 2, \dots, s+1).$$

Следовательно,  $\psi(x)$  меняет знак, как только  $x$  переходит через каждый узел;  $\psi(x)$  имеет только  $s$  нулей и  $s$  простых узлов  $(\xi_i)_1^s$ . Они являются теми же простыми узлами, что и узлы  $\phi(x)$ . Следовательно,

$$(\psi, \phi) \neq 0.$$

Однако  $\psi$  является комбинацией  $(\phi_i)_1^{s+1}$ , тогда как  $\phi$  является комбинацией  $(\phi_i)_j^k$ ; эти комбинации должны пересекаться, т.е.  $s+1 \geq j$ ,  $s \geq j-1$ . ■

**Теорема 10.6.5.** В условиях теоремы 10.6.4 простые узлы  $\phi_i(x)$  и  $\phi_{i+1}(x)$  чередуются.

**Доказательство.** Любая комбинация

$$\phi(x) = c_i \phi_i(x) + c_{i+1} \phi_{i+1}(x), \quad c_i^2 + c_{i+1}^2 > 0$$

имеет или  $i - 1$ , или  $i$  нулей на  $(0, 1)$ , все эти нули являются простыми узлами. ( $s \geq i - 1$ ,  $s + 2d + p \leq i$  дают  $d = 0$  и или  $s = i - 1$ ,  $p = 0$ , или  $1$ , или  $s = i$ ,  $p = 0$ .) Пусть узлы  $\phi_{i+1}(x)$  равны  $(\xi_j)_1^i$ ; запишем  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_{i+1} = 1$ , так, что

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1} = 1$$

и рассмотрим

$$\psi(x) = \phi_i(x) / \phi_{i+1}(x).$$

В каждом из интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, i$ , функция  $\psi(x)$  является непрерывной, так как  $\phi_{i+1}(x)$  является ненулевой. Покажем теперь, что  $\psi(x)$  является *монотонной* на каждом из этих интервалов. Пусть  $\psi(x)$  не является монотонной на интервале  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ . Тогда существуют точки  $x_1, x_2, x_3$  такие, что  $\xi_j < x_1 < x_2 < x_3 < \xi_{j+1}$ , и  $\psi(x_1) - \psi(x_2)$ ,  $\psi(x_2) - \psi(x_3)$  обладают противоположными знаками. Без ограничения общности можно предположить, что  $\psi(x_1) < \psi(x_2)$ ,  $\psi(x_3) < \psi(x_2)$ . Функция  $\psi(x)$ , которая является непрерывной по  $[x_1, x_3]$ , достигает своего максимального значения на  $[x_1, x_3]$ . Этот максимум должен достигаться во внутренней точке,  $x_0$ , на  $[x_1, x_3]$ , так как  $\psi(x_1), \psi(x_3)$  обе меньше  $\psi(x_2)$ . Следовательно,

$$\psi(x) - \psi(x_0) \leq 0 \text{ для всех } x \in [x_1, x_3],$$

а значит,

$$\phi(x) = \phi_{i+1}(x) \{ \psi(x) - \psi(x_0) \} = \phi_i(x) - \psi(x_0) \phi_{i+1}(x)$$

сохраняет свой знак в окрестности своего нуля,  $x_0$ . Это противоречит утверждению о том, что  $\phi(x)$  обладает только простыми нулями. Следовательно,  $\psi(x)$  является монотонной функцией на каждом из интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, i$ .

Рассмотрим поведение функции  $\psi(x)$  около узлов  $(\xi_j)_1^i$  для функции  $\phi_{i+1}(x)$ . Так как  $\psi(x)$  является монотонной на каждом из интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, i$ , то пределы

$$\lim_{x \rightarrow \xi_j^-} \psi(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow \xi_j^+} \psi(x) = L_2$$

будут существовать для всех  $j = 1, 2, \dots, i$ ; они могут быть конечными или бесконечными. Если  $\xi_j$  не является узлом  $\phi_i(x)$ , то  $L_1$  и  $L_2$  бесконечны и имеют противоположные знаки. Покажем, что это есть единственный возможный случай.

Предположим, что  $\xi_j$  является узлом  $\phi_i(x)$  и  $\phi_{i+1}(x)$ . Тогда  $L_1, L_2$  могут быть конечными или бесконечными, однако будут по крайней мере обладать одинаковыми знаками. Предположим, без ограничения общности, что  $\psi(x)$  является монотонно возрастающей на  $(\xi_{j-1}, \xi_j)$ . Если  $\psi(x)$  является монотонно возрастающей функцией на  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ , то существуют пять возможных случаев, показанных на рисунке 10.6.3:

- а)  $L_1 = \infty, L_2 = \infty$
- б)  $L_1 = \infty, L_2$  конечное
- в)  $L_1 =$  конечное,  $L_2 = \infty$
- г)  $L_1$  конечное,  $L_2 = L_1$
- д)  $L_1$  конечное,  $L_2 \neq L_1$ .

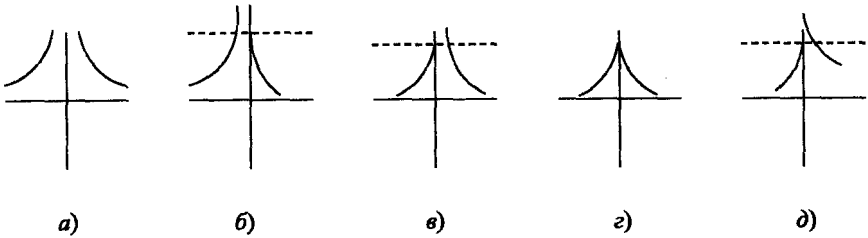


Рис. 10.6.3.  $\psi(x)$  является монотонно убывающей на  $(\xi_j, \xi_{j+1})$

Если  $\psi(x)$  является монотонно возрастающей на  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ , то существуют только три возможных случая, представленные на рисунке 10.6.4:

- е)  $L_1 = \infty, L_2$  конечное
- ж)  $L_1$  конечное,  $L_2 = L_1$
- з)  $L_1$  конечное,  $L_2 \neq L_1$ .

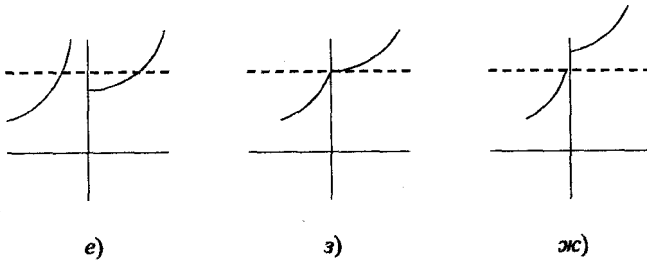


Рис. 10.6.4.  $\psi(x)$  является монотонно возрастающей на  $(\xi_j, \xi_{j+1})$

Во всех случаях, кроме а) и г), существует прямая  $y = h$ , показанная так, что  $\psi(x)$  пересекает эту прямую, если  $x$  переходит через  $\xi_j$ . Следовательно,  $\psi(x) - h$  меняет знак при  $x = \xi_j$ , а значит,

$$\phi(x) = \phi_{i+1}(x)(\psi(x) - h) = \phi_i(x) - h\phi_{i+1}(x)$$

сохраняет свой знак, когда  $x$  переходит через ноль  $\xi_j$ , что противоречит утверждению о том, что все нули  $\phi(x)$  являются простыми узлами.

Теперь рассмотрим случай г), пусть  $L_1 = L_2 = h$ , и рассмотрим функцию

$$\phi(x, f) = \phi_{i+1}(x)(\psi(x) - f) = \phi_i(x) - f\phi_{i+1}(x),$$

если  $f = h$ ,  $\phi(x, h)$  имеет или  $i - 1$ , или  $i$  узлов. То рассмотрим  $f = h - \varepsilon = h'$ , где  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $x_1, x_2$  такие, что  $\xi_{j-1} < x_1 < \xi_j < x_2 < \xi_{j+1}$ ,  $\psi(x_1) = \psi(x_2) = h'$ .

Так как  $\phi_{i+1}(x)$  сохраняет свой знак и  $\psi(x) - h'$  меняет свой знак, когда  $x$  переходит через  $x_1$  и  $x_2$ , эти точки являются узлами  $\phi(x, h')$ . Следовательно,  $\phi(x, f)$  приобретает два новых узла когда  $f$  переходит от  $h$  к  $h - \varepsilon$ , однако это невозможно, так как  $\phi(x, h)$  и  $\phi(x, h')$  оба имеют или  $i - 1$ , или  $i$  узлов.

Заметим, что если  $\xi_j$  является узлом  $\phi_i(x)$ , то остается только случай а). Это означает, что все пределы  $L_1, L_2$  для  $j = 1, 2, \dots, i$  должны быть бесконечны;  $\psi(x)$  должен принимать все значения в каждом из интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 1, 2, \dots, i - 1$ ;  $\psi(x)$  должна иметь узел в каждом из них и аналогично  $\phi_i(x)$ . Однако  $\phi_i(x)$  имеет только  $i - 1$  узлов, а значит никто из  $(\xi_j)_1^i$  не может быть узлом  $\phi_i(x)$ : случай а) не может быть выполнен;  $\psi(x)$  должна быть монотонно возрастающей на каждом из интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, i$ , или монотонно убывающей на всех этих интервалах; узлы  $\phi_i(x)$  и  $\phi_{i+1}(x)$  чередуются. ■

## 10.7. Теорема Перрона и составные ядра

Наша цель в этом параграфе состоит в доказательстве того, что собственная функция  $v_i(x)$  для интегрального уравнения (10.2.9) дает последовательность Маркова. Следуя материалу о полной положительности из главы 6, мы строим наши рассуждения на непрерывной версии теоремы Перрона и теореме Коши–Бине. Точно так же, как матричная версия теоремы Перрона, справедлива для произвольных положительных (квадратных) матриц, а не только для симметричных матриц, так

и непрерывная версия верна для произвольных (не обязательно симметрических) положительных ядер. Однако доказательство этой теоремы в произвольном несимметрическом случае находится вне зоны наших интересов. Мы сформулируем эту теорему для общего случая, однако докажем ее только в симметрическом случае, который нам и потребуется.

**Теорема 10.7.1.** *Если непрерывное ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет условию*

$$K(x, s) \geq 0, \quad K(x, x) > 0, \quad x, s \in (0, 1),$$

*то собственное значение  $\lambda_1$  интегрального уравнения*

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)u(s)ds, \quad (10.7.1)$$

*которое имеет наименьший модуль, является положительным и простым; соответствующая собственная функция  $u_1(x)$  не имеет нулей на  $(0, 1)$ .*

**Доказательство.** В параграфе 10.3 мы показали, что ненулевой самосопряженный компактный оператор  $A$  имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Переводя все в термины интегрального уравнения (10.7.1), мы получаем, что уравнение (10.7.1) обладает собственным значением  $\lambda_1$ , удовлетворяющим уравнению

$$\frac{1}{\lambda_1} = \max \left\{ \frac{F(u)}{\|u\|^2} \right\}, \quad (10.7.2)$$

где

$$F(u) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, s)u(x)u(s)dxds$$

и

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2(x)dx.$$

Этот максимум достигается для  $u_1(x)$ , удовлетворяющей уравнению

$$u_1(x) = \lambda_1 \int_0^1 K(x, s)u_1(s)ds. \quad (10.7.3)$$

Теперь рассмотрим  $w_1(x) = |u_1(x)|$ . Ясно, что  $\|w\|^2 = \|u_1\|^2$ , тогда как  $F(w) \geq F(u_1)$ , это означает, что  $w_1(x)$  также является собственной функцией, удовлетворяющей (10.7.3), т. е.

$$w_1(x) = \lambda_1 \int_0^1 K(x, s)w_1(s)ds. \quad (10.7.4)$$

Пусть  $u_1(x)$  обладает изолированным нулем для некоторого  $\xi \in (0, 1)$ . На основе неравенства  $K(\xi, \xi) > 0$  и непрерывности  $K$  мы можем заключить, что  $K(\xi, s) > 0$ ,  $w_1(s) > 0$  для некоторого интервала  $(\xi, \xi + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, в точке  $\xi$  левая часть (10.7.4) является нулевой, тогда как правая часть положительна; получили противоречие. Нулевой интервал для  $u_1(x)$  исключается аналогично. Это означает, что любая собственная функция, отвечающая  $\lambda_1$ , должна быть знакопостоянной на  $(0, 1)$ . Не существует двух попарно ортогональных собственных функций, которые сохраняют постоянный знак на  $(0, 1)$  так, что  $\lambda_1$  является простым и положительным. Доказательство будет завершено, если мы сможем показать, что если  $\lambda$  является отрицательным собственным значением для (10.7.1), то  $|\lambda| > \lambda_1$ .

Пусть  $v(x)$  является отнормированной собственной функцией, отвечающей  $\lambda$ , т. е.

$$v(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)v(s)ds,$$

а следовательно,

$$|v(x)| \leq |\lambda| \int_0^1 K(x, s)|v(s)|ds. \quad (10.7.5)$$

Функция  $v(x)$ , являющаяся ортогональной к  $w_1(x)$ , не может сохранять постоянный знак на  $(0, 1)$ , а значит неравенство из (10.7.5) должно быть

строгим. Следовательно,

$$|v(x)| < |\lambda| \int_0^1 K(x, s)|v(s)|ds,$$

значит

$$(|v|, |v|) < |\lambda|F(|v|).$$

Однако в силу (10.7.2)

$$(|v|, |v|) \geq \lambda_1 F(|v|),$$

откуда  $|\lambda| > \lambda_1$ :  $\lambda_1$  является собственным значением наименьшего модуля, оно положительное и простое. ■

Как и для ядра  $K(x, s)$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$ , мы можем использовать миноры, введенные в параграфе 10.5 для определения *присоединенного ядра*  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , определенного на  $\bar{Q} \times \bar{Q}$ , где  $\bar{Q}$  является  $n$ -мерным симплексом

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1.$$

Если  $\mathbf{x}$  является внутренней точкой для  $\bar{Q}$ , то

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1, \text{ значит, } \mathbf{x} \in Q.$$

Вместо теоремы Коши–Бине будем использовать

**Теорема 10.7.2.** *Если три ядра  $K(x, s)$ ,  $L(x, s)$ ,  $N(x, s)$ , определенные на  $[0, 1] \times [0, 1]$ , связаны равенством*

$$N(x, s) = \int_0^1 K(x, t)L(t, s)dt, \quad x, s \in [0, 1],$$

то

$$N(\mathbf{x}; \mathbf{s}) = \int_{\bar{Q}} K(\mathbf{x}; \mathbf{t})L(\mathbf{t}; \mathbf{s})d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{Q},$$

где интегрирование рассматривается по симплексу  $\bar{Q}$ .

**Доказательство.** Результат немедленно следует из разложения интеграла над  $n$ -мерным произведением  $[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  через  $n!$  интегралов над симплексами  $0 \leq x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n} \leq 1$ . ■



**Теорема 10.7.3.** Если  $(\lambda_i)_1^\infty$  и  $(u_i(x))_1^\infty$  являются собственными значениями и соответственными собственными функциями для (10.7.1), то

$$u(\mathbf{x}) = \wedge \int_{\overline{Q}} K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) ds, \quad (10.7.6)$$

где

$$\wedge = \lambda_{i_1}, \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n}, \quad u(\mathbf{s}) = u(\mathbf{s}; \alpha), \\ \alpha = (l_1, l_2, \dots, l_n), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

**Доказательство.** Уравнение (10.7.1) показывает, что

$$u(\mathbf{x}; \alpha) = \lambda_{i_1}, \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} \int_{\overline{Q}} K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) u(\mathbf{s}; \alpha) ds.$$

Теперь можно расширить теорему Перрона до уравнения (10.7.3). ■

**Теорема 10.7.4.** Если непрерывное ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет неравенствам

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \geq 0, \quad K(\mathbf{x}; \mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in Q,$$

то собственное значение для (10.7.3), имеющее наименьший модуль, является положительным и простым; соответствующая собственная функция  $u(\mathbf{x})$  не имеет нуля в  $Q$ .

**Доказательство.** Доказательство в случае, когда  $K(\mathbf{x}; \mathbf{s})$  является симметричной, аналогично соответствующему доказательству из теоремы 10.7.1. ■

**Теорема 10.7.5.** Если непрерывное ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет условиям

$$K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \geq 0, \quad K(\mathbf{x}; \mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in I,$$

то все собственные значения для уравнения (10.7.1) являются положительными и простыми, т. е.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , соответствующие собственные функции образуют последовательность Маркова на  $I$ .

**Доказательство.** Упорядочим собственные значения для (10.7.1) таким образом, что  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ , тогда собственное значение для

(10.7.3), имеющее наименьший модуль, равно  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ . Следовательно, теорема 10.7.4 утверждает, что

$$\text{а) } \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n > 0 \quad \text{б) } \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n < |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \lambda_{n+1}|$$

для всех  $n = 2, 3, \dots$ . Следовательно, получаем:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_1 < |\lambda_2|$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , т.е.  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 < |\lambda_1 \lambda_3| = \lambda_1 |\lambda_3|$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$ , а значит,  $\lambda_2 < \lambda_3$ , и так далее. Теоремы 10.7.3 и 10.7.4 показывают, что собственная функция, отвечающая наименьшему собственному числу, а именно:

$$U(\mathbf{x}; \theta) = U(x_1, x_2, \dots, x_n; \quad 1, 2, \dots, n),$$

имеет нули в  $\mathcal{Q}$  и строго сохраняет постоянный знак на  $\mathcal{I}$ , что есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность  $u_i(x)$  являлась последовательностью Маркова на  $I$ . ■

Заметим, что мы показали, что если  $K(x, s)$  является осцилляторным ядром, то соответствующий оператор  $A$  является строго положительным (компактным и самосопряженным линейным) оператором. Значит, применима теорема 10.3.9 и собственные функции образуют полную ортонормированную систему в  $H$ .

Рассмотрим приложение этих результатов к интегральным уравнениям, определяющим колебания струны. Мы записали это уравнение двумя способами: (10.2.9) и (10.2.11); это уравнения

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \rho^2(s) G(x, s) v(s) ds$$

и

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) u(s) ds.$$

Предположим, что  $\rho(x)$  является кусочно-непрерывной на  $[0, 1]$ , тогда, как мы показали ранее, функция  $v(x)$ , реальная амплитуда колебаний струны, является непрерывной, тогда как функция  $u(x)$  — кусочно-непрерывна.

Теоремы, доказанные в этом параграфе, были сформулированы в терминах непрерывного ядра  $K(x, s)$ , однако легко видеть, что это создает ненужные ограничения. Мы использовали непрерывность  $K(x, s)$ , так как мы предполагали, что только  $K(x, s) \geq 0$ ,  $K(x, x) > 0$ . Благодаря непрерывности, мы смогли обобщить  $K(x, x) > 0$  до  $K(x, s) > 0$  для  $s$

около  $x$ . Если, как и для струны, мы имеем  $K(x, s) = \rho(x)\rho(s)G(x, s) > 0$  для  $x, s \in I$ , то нам нет необходимости применять непрерывность. Похожие рассуждения применимы к теореме 10.7.4. Получим  $K(\mathbf{x}; \mathbf{s}) > 0$ , если  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathcal{I}$  и  $x_1, s_1 < x_2, s_2 < \dots < x_n, s_n$ .

Следовательно, можно заключить, что  $U(\mathbf{x}; \theta)$  обладает фиксированным знаком на  $\mathcal{I}$ , а значит, соответствующий минор  $V(\mathbf{x}; \theta)$ , образованный  $v_i(x)$  из уравнения (10.2.9), имеет постоянный знак на  $\mathcal{I}$ ; тогда  $v_i(x)$  образуют последовательность Маркова на  $I$ .

Так как величины  $v_i(x)$  образуют последовательность Маркова, они обладают свойствами, установленными в секции 10.6:  $v_i(x)$  обладает в точности  $i - 1$  простыми узлами на  $(0, 1)$ , и узлы  $v_i(x)$  и  $v_{i+1}(x)$  чередуются. Рисунок 10.7.1 показывает типичные формы колебания струны с краевыми условиями  $u(0) = 0 = u'(1)$ . Заметим, что мы можем смоделировать «свободное» краевое условие  $u'(1) = 0$ , пропуская струну в точке  $x = 1$  через ползун, который поддерживает струну в горизонтальном положении в этой точке. См. параграф 2.2. С другой стороны, мы можем смоделировать свободный конец, рассматривая только левый конец симметричной струны растянутой между 0 и 2 и рассматривая только симметричные колебания; для них справедливо условие  $u'(1) = 0$ . Формы колебаний качественно устроены как колебания  $\sin\{(i - 1/2)\pi x\}$  однородной струны.

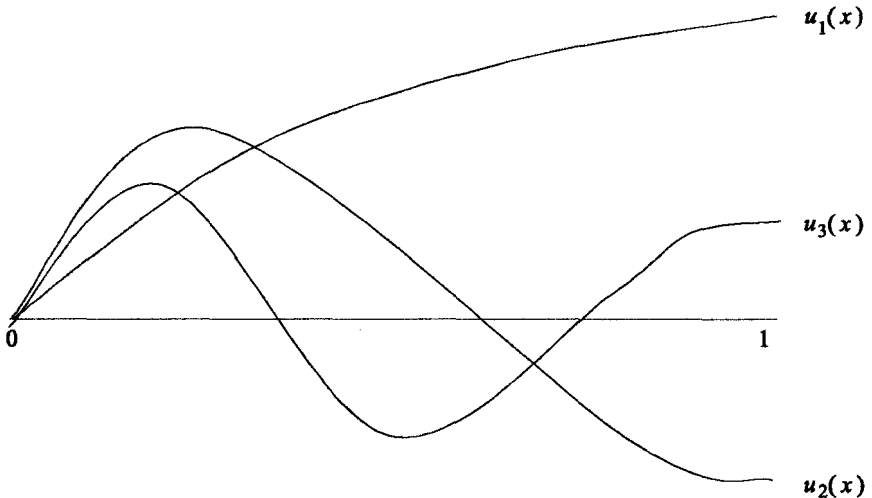


Рис. 10.7.1. Типичные формы колебаний струны при условиях  $u(0) = 0 = u'(1)$

## 10.8. Чередование собственных значений

В параграфе 2.9, когда мы обсуждали колебания при ограничении, мы использовали вариационную формулировку матричной задачи на собственные значения, и, для того чтобы понять, как собственные значения меняются при ограничении, мы использовали теорему Куранта о минимаксе. Эта теорема допускает обобщение на самосопряженный компактный оператор  $A$  на гильбертовом пространстве. Для простоты предположим, что  $A$  является положительно определенной матрицей.

В параграфе 10.3 мы нашли наибольшее собственное значение для матрицы  $A$  в виде

$$\mu_1 = \sup_{x \in H} F(x) = F(x_1),$$

где

$$F(x) = (Ax, x)/\|x\|^2. \quad (10.8.1)$$

Далее мы разложили  $H = H_1$  в сумму  $M_1$  пространства, порожденного  $x_1$ , и его ортогонального дополнения  $H_2$ :  $H_1 = M_1 + H_2$  и нашли

$$\mu_2 = \sup_{x \in H_2} F(x) = F(x_2).$$

В общем случае

$$\mu_{n+1} = \sup_{x \in H_{n+1}} F(x) = F(x_{n+1}),$$

где  $M_n$  является пространством, порожденным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и  $H = M_n + H_{n+1}$ . Это итеративный метод нахождения собственных значений.

Соответствующая минимаксная процедура имеет вид:

$$\mu_1 = \sup_{x \in H} F(x) = F(x_1).$$

Теперь рассмотрим  $y_1 \in H$ , пусть  $N_1$  является пространством, порожденным  $y_1$ , разложим  $H$  в сумму  $H = N_1 + H_2$ . Тогда

$$\mu_2 = \inf_{y_1 \in H} \sup_{x \in H_2} F(x) = F(x_2).$$

В общем случае пусть  $N_n$  является пространством, порожденным  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , и  $H = N_n + H_{n+1}$ , тогда

$$\mu_{n+1} = \inf_{N_n \subset H} \sup_{x \in H_{n+1}} F(x) = F(x_{n+1}).$$

Преимущество минимаксной формы перед итеративной формой наиболее просто наблюдать в случае, когда требуется упорядочить собственные значения двух различных операторов  $A, A'$ . Если известно, что

$$(A'x, x) \geq (Ax, x),$$

т. е.

$$F'(x) = (A'x, x)/\|x\|^2 \geq F(x),$$

тогда

$$\mu'_{n+1} = \inf_{N_n \subset H} \sup_{x \in H_{n+1}} F'(x) \geq \inf_{N_n \subset H} \sup_{x \in H_{n+1}} F(x) = \mu_{n+1} : \quad (10.8.2)$$

собственные значения  $A'$  больше или равны соответственным собственным значениям матрицы  $A$ ; сравнить собственные значения возможно, так как  $\inf$  и  $\sup$  рассматриваются над одними и теми же пространствами. В отличие от этого, в итеративной схеме подпространство  $H_{n+1}$  связано с оператором: это пространство ортогонально пространству, порожденному ранее найденными собственными значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Если в дополнение

$$(A'x, x) - (Ax, x) = C(x, y)^2 \quad (10.8.3)$$

для некоторого  $C > 0$  и  $y \in H$ , то можно утверждать большее. Уравнение (10.8.3) позволяет получить

$$F(x) = F'(x) \text{ если } (x, y) = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_n = \inf_{N_{n-1} \subset H} \sup_{x \in H_n} F(x) = \inf_{N'_n \subset H} \sup_{x \in H'_{n+1}} F'(x),$$

где  $N'_n$  является пространством, порожденным посредством произвольных  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  и  $y$ ,  $H = N'_n + H'_{n+1}$ . Однако этот  $\inf$  не может быть меньше  $\inf$ , взятого по множеству  $N_n$ , откуда

$$\mu_n \geq \mu'_{n+1}. \quad (10.8.4)$$

Неравенства (10.8.2), (10.8.4) позволяют показать, что собственные значения  $A$  и  $A'$  чередуются в том смысле, что

$$\mu'_1 \geq \mu_1 \geq \mu'_2 \geq \mu_2 \geq \dots$$

Применим нашу теорию к собственным значениям струны при различных краевых условиях. Переводя уравнение (10.8.1) на язык интегральных уравнений, получим

$$F(u) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, s)u(x)u(s)dxds / \int_0^1 u^2(x)dx,$$

где

$$K(x, s) = \rho(x)\rho(s)G(x, s)$$

и  $G(x, s)$  дается формулой (10.2.6),  $\phi(x), \psi(x)$  из (10.2.7). Так как  $G(x, s)$  зависит от  $h, H$ , мы будем записывать его в виде  $G(x, s, h, H)$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$G(x, s, h, H') - G(x, s, h, H) = C_1(H - H')(1 + hx)(1 + hs)$$

и

$$G(x, s, h', H) - G(x, s, h, H) = C_2(h - h')(1 + H(1 - x))(1 + H(1 - s)),$$

где

$$C_1(h + H' + hH')(h + H + hH) = 1 = C_2(h' + H + h'H)(h + H + hH).$$

Это означает, что

$$F(u, h, H') - F(u, h, H) = C_1(H - H')(u, w_1)^2 / \|u\|^2$$

и

$$F(u, h', H) - F(u, h, H) = C_2(h - h')(u, w_2)^2 / \|u\|^2,$$

где

$$w_1(x) = (1 + hx)\rho(x), \quad w_2(x) = (1 + H(1 - x))\rho(x)$$

и

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

Вспоминая, что  $\mu$  можно заменить на  $1/\lambda$ , мы можем применить предыдущую теорию следующим образом:

а) если  $H < H'$ , то

$$\lambda_n(h, H) \leq \lambda_n(h, H') \leq \lambda_{n+1}(h, H); \quad (10.8.5)$$

б) если  $h < h'$ , то

$$\lambda_n(h, H) \leq \lambda_n(h', H) \leq \lambda_{n+1}(h, H); \quad (10.8.6)$$

если  $h < h'$  и  $H < H'$ , то применяя одновременно а) и б), получим

$$\lambda_n(h, H) \leq \lambda_n(h', H) \leq \lambda_n(h', H')$$

и

$$\lambda_n(h, H) \leq \lambda_n(h', H) \leq \lambda_n(h', H') \leq \lambda_{n+1}(h', H) \leq \lambda_{n+2}(h, H). \quad (10.8.7)$$

Заметим, что до этого момента мы использовали только нестрогие неравенства, в общем случае, как мы сейчас покажем, неравенства являются строгими.

Мы получим эти результаты о чередовании, используя формулировку задачи о собственных значениях, основанную на функции Грина. Существует другой метод, основанный на вариационной формулировке для исходного дифференциального уравнения (10.1.1). Задача о собственных значениях (10.1.1), (10.1.2) эквивалентна нахождению стационарных значений для

$$J(v) \equiv \int_0^1 [v'(x)]^2 dx + hv^2(0) + Hv^2(1)$$

при условии

$$(\rho^2 v, v) \equiv \int_0^1 \rho^2(x) v^2(x) dx = 1. \quad (10.8.8)$$

Следующие рассуждения можно сделать строгими.

Введем множитель Лагранжа  $\lambda$  и рассмотрим

$$G(v) = J(v) - \lambda(\rho^2 v, v).$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(v + \varepsilon \eta) - G(v)}{2\varepsilon} = \int_0^1 v' \eta' dx + hv(0)\eta(0) + Hv(1)\eta(1) - \lambda \int_0^1 \rho^2 v \eta dx.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям, переупорядочим слагаемые и приравняем все к нулю:

$$-\int_0^1 (v'' + \lambda \rho^2 v) \eta dx - [v'(0) - hv(0)]\eta(0) + [v'(1) + Hv(1)]\eta(1) = 0.$$

Равенство нулю наблюдается для всех вариаций  $\eta(x)$ , только если  $v(x)$  удовлетворяет (10.1.1) и (10.1.2).

Предположим, что  $\{\lambda_n, v_n(x)\}_1^\infty$  являются собственными значениями и собственными функциями для (10.1.1), (10.1.2), отнормированными так, что

$$(\rho^2 v_m, v_n) = \delta_{mn}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 v'_m(x)v'_n(x)dx &= [v_m(x)v'_n(x)]_0^1 + \lambda_n \delta_{mn} \\ &= -hv_m(0)v_n(0) - Hv_m(1)v_n(1) + \lambda_n \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (10.8.9)$$

Рассмотрим вариационную задачу для уравнения (10.1.1) с краевыми условиями

$$v'(0) - h'v(0) = 0 = v'(1) + Hv(1), \quad (10.8.10)$$

где  $h' > h$ . Получаем задачу нахождения стационарных значений для

$$J'(v) = \int_0^1 [v'(x)]^2 dx + h'v^2(0) + Hv^2(1)$$

при условии (10.8.8). Распишем  $v(x)$  в терминах собственных функций  $v_m(x)$ ;

$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m v_m(x).$$

Используем интеграл (10.8.9), чтобы получить

$$J'(v) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m c_m^2 + (h' - h)v^2(0). \quad (10.8.11)$$



Уравнения на значения  $c_m$ , которые дают стационарность  $J'(v)$ , имеют вид

$$\lambda_m c_m + (h' - h)v_m(0)v(0) - \lambda c_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$c_m = (h' - h)v_m(0)v(0)/(\lambda - \lambda_m),$$

а значит, условие

$$v(0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m v_m(0)$$

влечет

$$1 = (h' - h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m^2(0)}{\lambda - \lambda_m}. \quad (10.8.12)$$

Это уравнение является аналогом уравнения (4.3.21) и незамедлительно дает строгую форму уравнения (10.8.6):

$$\lambda_n(h, H) < \lambda_n(h', H) < \lambda_{n+1}(h, H). \quad (10.8.13)$$

Краевые условия  $v_m(0)$  не могут быть нулевыми для всех  $h$ , кроме  $h = \infty$ , т. е. конец  $x = 0$  зафиксирован; этот случай можно выделить посредством условия  $h' > h$ . Применим аналогичную процедуру для получения строгой формы уравнения (10.8.5).

### Упражнения 10.8

- 1) Получите представление (10.8.11) для функционала  $J'(v)$ .
- 2) Если  $(\lambda'_m)_{m=1}^{\infty}$  являются собственными значениями для (10.1.1) при условии (10.8.10), т. е.  $\lambda'_m = \lambda_m(h', H)$ , покажите, что

$$1 - (h' - h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m^2(0)}{\lambda - \lambda_m} = \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda - \lambda'_m}{\lambda - \lambda_m} \right),$$

а затем получите, что

$$-(h' - h)v_n^2(0) = (\lambda_n - \lambda'_n) \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_n - \lambda'_m}{\lambda_n - \lambda_m} \right),$$

где ' обозначает  $m \neq n$ .

3) Как интерпретировать бесконечные произведения таким образом, чтобы выполнение условия  $h' > h$  и условия чередования (10.8.13), т.е.  $\lambda_1 < \lambda'_1 < \lambda_2 < \dots$ , гарантировало положительные значения  $v_m^2(0)$ ? Эти примеры показывают, что, зная  $(\lambda_n - \lambda'_n)_1^\infty$ , можно вычислить так называемые *нормировочные константы*  $(\sigma_n)_1^\infty = (v_n^2(0))_1^\infty$ ; обратно, зная  $(\lambda_n, \sigma_n)_1^\infty$ , можно вычислить  $(\lambda'_n)_1^\infty$ . См. работу Элхая (Elhay), Глэдвелла, Голуба и Рама [85] (1999), где можно найти дальнейшее исследование связей собственных векторов и собственных чисел, аналогичных (10.8.12).

## 10.9. Асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций

Для решения обратных задач главы 11 нам потребуется изучить *асимптотическое поведение* собственных значений  $\lambda_n$ , собственных функций  $v_n(x)$  и нормирующих констант для больших  $n$ . Для этого исследования удобно предполагать, что  $\rho(x)$  в уравнении (10.1.1) или  $A(x)$  в уравнении (10.1.3) являются достаточно гладкими так, что уравнения (10.1.1) или (10.1.3) могут быть преобразованы к форме Штурма–Лиувилля (10.1.11), где  $q(x) \in C[0, \pi]$ . Мы будем придерживаться договоренностей о нумерации  $\mathbf{S}$ , описанной в параграфе 10.1.

Для начала нам потребуется теорема единственности. Она представлена в работе Тичмарша (Titchmarsh) [323] (1962).

**Теорема 10.9.1.** *Если  $q(x) \in C[0, \pi]$ , то для любого  $\alpha$  существует единственное решение  $y(x, \lambda)$  уравнения (10.1.14), такое, что  $y(0, \lambda) = \sin \alpha$ ,  $\phi'(0, \lambda) = -\cos \alpha$ . Для любого фиксированного  $x \in [0, \pi]$   $(x, \lambda)$  является целой функцией от  $\lambda$ .*

Замечание. Здесь  $\lambda$  рассматривается как комплексная переменная; целая функция комплексной переменной  $\lambda$  — это такая функция, которая не имеет полюсов на конечной  $\lambda$ -плоскости.

Основываясь на этой теореме, мы обозначим решение уравнения

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0, \quad (10.9.1)$$

удовлетворяющее условию

$$\phi(0, \lambda) = 1 \quad \phi'(0, \lambda) = h \quad (10.9.2)$$

как  $\phi(x, \lambda)$ . Мы будем предполагать, что  $h$  конечно и  $q(x) \in C[0, \pi]$ .

Обозначим,  $\lambda = \omega^2$ , тогда (10.9.1) можно переписать в виде

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = q(x)y(x).$$

Рассматривая правую часть как вынуждающую функцию, мы можем использовать так называемое *решение Дюамеля (Duhamel)*

$$\phi(x, \lambda) = A \cos \omega x + B \sin \omega x + \omega^{-1} \int_0^x \sin \omega(x-t) q(t) \phi(t, \lambda) dt, \quad (10.9.3)$$

где  $A = 1, B = h/\omega$ . В этом уравнении мы можем рассматривать  $\omega$  как комплексную переменную и можем получить оценку для  $\phi(x, \lambda)$  при больших  $|\omega|$ :

**Лемма 10.9.1.** Пусть  $\omega = \sigma + i\tau$ . Тогда существует  $\sigma_0 > 0$  такое, что для  $|\omega| > \sigma_0$

$$\phi(x, \lambda) = \cos \omega x + O\left(\frac{\exp|\tau|x}{|\omega|}\right) \quad (10.9.4)$$

равномерно по  $x$  на  $[0, \pi]$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\phi(x, \lambda) = \exp(|\tau|x)f(x)$ , согласно (10.9.3)

$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos \omega x + h\omega^{-1} \sin \omega x) \exp(-|\tau|x) + \\ &+ \omega^{-1} \int_0^x \sin \omega(x-t) \exp(-|\tau|(x-t)) q(t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (10.9.5)$$

Рассмотрим  $M = \max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x)|$ , тогда уравнение (10.9.5) дает

$$M \leq 1 + \frac{|h|}{|\omega|} + \frac{M}{|\omega|} \int_0^x |q(t)| dt.$$

Следовательно,

$$M \leq \left(1 + \frac{|h|}{|\omega|}\right) / \left(1 - \frac{1}{|\omega|} \int_0^x |q(t)| dt\right)$$

при условии положительности знаменателя, т. е. при условии

$$|\omega| > \int_0^{\pi} |q(t)| dt.$$

Для такого  $\omega$

$$|\phi(x, \lambda)| \leq M \exp(|\tau|x),$$

при подстановке в интеграл (10.9.3) мы получим (10.9.4). ■

Будем использовать оценку (10.9.4) для оценки собственных чисел (10.9.1) относительно

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi); \quad (10.9.6)$$

предположим, что как  $H$ , так и  $h$  являются конечными. В параграфе 10.1 мы показали, что собственные значения являются вещественными; тогда можно рассмотреть  $\tau = 0$  в (10.9.4) и найти

$$\phi(x, \lambda) = \cos \omega x + O(\omega^{-1}).$$

Собственные значения являются решениями для

$$\phi'(\pi, \lambda) + H\phi(\pi, \lambda) = 0, \quad (10.9.7)$$

откуда для больших  $|\omega|$  получим уравнение

$$-\omega \sin \omega \pi + O(1) = 0, \quad (10.9.8)$$

которое очевидно имеет близкие к целым решения при больших  $\omega$ . На самом деле для любого большого целого  $n$  существует единственное близкое к нему решение. Чтобы убедиться в этом, продифференцируем уравнение (10.9.8) по переменной  $\omega$  (это можно делать, поскольку (10.9.8) на самом деле есть (10.9.7) — аналитическая функция от  $\lambda$ ), получим

$$-\omega \pi \cos \omega \pi + O(1),$$

которое не обращается в ноль в окрестностях больших целых чисел. Мы заключаем, что собственные значения, обозначенные в порядке возрастания

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

с некоторого момента станут положительными и близкими к квадратам целых чисел.

Для получения точных оценок собственных чисел мы используем следующую теорему.

**Теорема Руше.** Если функции  $f(z)$  и  $g(z)$  являются аналитическими внутри и на границе замкнутого контура  $C$  и  $|g(z)| < |f(z)|$  на границе  $C$ , то  $f(z)$  и  $f(z) + g(z)$  имеют одинаковое количество нулей внутри  $C$ .

Для применения этой теоремы рассмотрим  $f(\omega) = -\omega \sin \omega\pi$ ,  $f(\omega) + g(\omega) = \phi'(\pi, \lambda) + H\phi(\pi, \lambda)$  и возьмем в качестве  $C$  окружность с центром  $O$ , радиуса  $N + \frac{1}{2}$ , на  $\omega$ -плоскости. Тогда для достаточно больших  $N$   $|g(\omega)| < |f(\omega)|$  на  $C$ , а значит,  $f(\omega)$  и  $f(\omega) + g(\omega)$  имеют одинаковое количество нулей на  $C$ .

Собственные значения  $\lambda$  являются вещественными, а  $f(\omega)$  и  $f(\omega) + g(\omega)$  являются четными функциями  $\omega$ . Это означает, что нули,  $\omega$ , находятся на вещественной оси,  $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ , если  $\lambda \geq 0$ ; или на мнимой оси,  $\omega = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ , если  $\lambda < 0$ . Число  $\lambda$  собственных значений тогда равняется  $\frac{1}{2}$ \* (число нулей  $f(\omega) + g(\omega)$ ) =  $\frac{1}{2}$ \* (число нулей  $f(\omega)$ ). Однако нули  $f(\omega)$  это  $\pm 0, \pm 1, \dots, \pm N$ ; их  $2N + 2$ , а значит, существует  $N + 1$  собственных значений  $\lambda$  внутри  $C$ . Получаем, что

$$\omega_n = n + O(1). \quad (10.9.9)$$

Мы теперь можем рассмотреть более точные оценки, подставляя (10.9.9) в (10.9.8). Рассмотрим  $\omega_n = n + \delta_n$ , тогда

$$(n + \delta_n) \sin(\pi\delta_n) + O(1) = 0,$$

так что

$$\sin(\pi\delta_n) = O(n^{-1}), \text{ т. е., } \delta_n = O(n^{-1}).$$

Это означает, что для достаточно большого  $n$

$$\sqrt{\lambda_n} \equiv \omega_n = n + O(n^{-1}). \quad (10.9.10)$$

Продолжим проверку этой оценки. Запишем (10.9.3) и ее производную

$$\phi(x, \lambda) = \cos \omega x \{1 - \omega^{-1} q_1(x)\} + \omega^{-1} \sin \omega x \{h + q_2(x)\}, \quad (10.9.11)$$

$$\phi'(x, \lambda) = \cos \omega x \{h + q_2(x)\} - \omega \sin \omega x \{1 - \omega^{-1} q_1(x)\}, \quad (10.9.12)$$

где

$$q_1(x) = \int_0^x \sin \omega t q(t) \phi(t, \lambda) dt, \quad (10.9.13)$$

$$q_2(x) = \int_0^x \cos \omega t q(t) \phi(t, \lambda) dt. \quad (10.9.14)$$

Следовательно,

$$q_1(x) = o(1), \quad q_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt + o(1) \quad (10.9.15)$$

и

$$\phi(x, \lambda) = \cos \omega x + O(\omega^{-1}), \quad (10.9.16)$$

$$\phi'(x, \lambda) = -\omega \sin \omega x + \left\{ h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right\} \cos \omega x + o(1), \quad (10.9.17)$$

откуда (10.9.7) может быть записано в виде

$$c \pi \cos \omega \pi - \omega \sin \omega \pi + o(1) = 0, \quad (10.9.18)$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \left( h + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(t) dt \right). \quad (10.9.19)$$

Уравнение (10.9.18) дает

$$\tan \omega \pi = c \pi \omega^{-1} + o(\omega^{-1}),$$

значит, рассматривая  $\omega_n = n + \delta_n$  как и ранее, мы найдем

$$\begin{aligned} \tan \delta_n \pi &= c \pi n^{-1} + o(n^{-1}); \\ \delta_n &= c n^{-1} + o(n^{-1}); \\ \sqrt{\lambda_n} = \omega_n &= n + c n^{-1} + o(n^{-1}). \end{aligned} \quad (10.9.20)$$

Рассмотрим теперь асимптотическую форму собственных функций. Уравнения (10.9.11), (10.9.15) дают

$$\phi(x, \lambda) = \cos \omega x + h\omega^{-1} \sin \omega x + \frac{1}{2}\omega^{-1} \sin \omega x \int_0^x q(t) dt + o(\omega^{-1}).$$

Подставляя  $\omega_n$  из (10.9.20), получим

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda_n) &= \cos nx - cxn^{-1} \sin nx + hn^{-1} \sin nx + \\ &+ \frac{1}{2}n^{-1} \sin nx \int_0^x q(t) dt + o(n^{-1}) = \\ &= \cos nx + n^{-1}\beta(x) \sin nx + o(n^{-1}), \end{aligned} \quad (10.9.21)$$

где

$$\beta(x) = h - cx + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \quad (10.9.22)$$

Для получения асимптотического представления для отнормированных собственных функций мы вычислим интеграл

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \phi^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi \{\cos^2 nx + n^{-1}\beta(x) \sin 2nx\} dx + o(n^{-1}).$$

Так как  $\beta(x)$  является дифференцируемой,

$$\int_0^\pi \beta(x) \sin 2nxdx = O(n^{-1}),$$

откуда

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} + o(n^{-1}) \quad (10.9.23)$$

и отнормированная собственная функция имеет вид

$$y_n(x) = \frac{\phi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{\cos nx + n^{-1}\beta(x) \sin nx\} + o(n^{-1}). \quad (10.9.24)$$

До сих пор мы предполагали только, что  $q(x)$  является непрерывной функцией. Если мы допустим, что  $q(x)$  имеет ограниченную производную, то коэффициенты в (10.9.15) имеют вид  $O(\omega^{-1})$ ; например,

$$\int_0^x \sin 2\omega t q(t) dt = \left[ \frac{-\cos 2\omega t}{2\omega} q(t) \right]_0^x + \frac{1}{2\omega} \int_0^x \cos 2\omega t q'(t) dt = O(\omega^{-1}).$$

В этом случае коэффициенты  $o(1)$ ,  $o(n^{-1})$  в уравнениях (10.9.17)–(10.9.24) можно заменить на  $O(n^{-1})$  и  $O(n^{-2})$  соответственно.

Теперь рассмотрим случай, когда  $h = \infty$ , а  $H$  является конечным. Краевые условия в  $x = 0$  имеют вид  $y(0) = 0$ , а решение уравнения (10.9.1), удовлетворяющее условию

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1, \tag{10.9.25}$$

имеет вид

$$\psi(x, \lambda) = \omega^{-1} \sin \omega x + \omega^{-1} \int_0^x \sin \omega(x-t) q(t) \psi(t, \lambda) dt, \tag{10.9.26}$$

и, как и ранее, можно показать, что (см. упр. 10.9.1)

$$\psi(x, \lambda) = \omega^{-1} \sin \omega x + O(\omega^{-2}); \tag{10.9.27}$$

$$\psi'(x, \lambda) = \cos \omega x + O(\omega^{-1}). \tag{10.9.28}$$

Это означает, что второе краевое условие, (10.9.7), принимает вид

$$\cos \omega \pi + O(\omega^{-1}) = 0,$$

у него существуют решения вблизи  $n + \frac{1}{2}$ :

$$\omega_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n. \tag{10.9.29}$$

Запишем  $\psi(x, \lambda)$  и  $\psi'(x, \lambda)$  как и раньше:

$$\psi(x, \lambda) = \omega^{-1} \sin \omega x \{1 + q_2(x)\} - \omega^{-1} \cos \omega x q_1(x), \tag{10.9.30}$$

$$\psi'(x, \lambda) = \cos \omega x \{1 + q_2(x)\} + \sin \omega x q_1(x), \tag{10.9.31}$$



где

$$q_1(x) = \int_0^x \sin \omega t q(t) \psi(t, \lambda) dt, \quad (10.9.32)$$

$$q_2(x) = \int_0^x \cos \omega t q(t) \psi(t, \lambda) dt. \quad (10.9.33)$$

Так как  $\psi(t, \lambda)$  имеет вид (10.9.27), получим

$$q_1(x) = \frac{1}{2} \omega^{-1} \int_0^x q(t) dt + o(\omega^{-1}), \quad (10.9.34)$$

$$q_2(x) = o(\omega^{-1}) \quad (10.9.35)$$

и

$$\psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = \cos \omega \pi + \omega^{-1} \left\{ H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right\} \sin \omega \pi + o(\omega^{-1}). \quad (10.9.36)$$

Рассматривая  $\omega = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ , найдем, как и ранее, что

$$\omega_n = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{n + \frac{1}{2}} + o(n^{-1}), \quad (10.9.37)$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \left( H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right). \quad (10.9.38)$$

Аналогично, если  $h$  является конечным и  $H = \infty$ , то

$$\omega_n = n + \frac{1}{2} + \frac{c}{n + \frac{1}{2}} + o(n^{-1}), \quad (10.9.39)$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \left( h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right). \quad (10.9.40)$$

Рассмотрим случай  $h = \infty$ ,  $H = \infty$ , т. е. краевые условия имеют вид условий Дирихле

$$\psi(0, \lambda) = 0 = \psi(\pi, \lambda).$$

Подставляя выражение из (10.9.27) получим, что второе условие имеет вид

$$\omega^{-1} \sin \omega\pi + O(\omega^{-2}) = 0.$$

Для больших  $N$  существует столько нулей внутри окружности радиуса  $N + \frac{1}{2}$ , сколько нулей у  $\omega^{-1} \sin \omega\pi$ ; существует  $2N$  таких нулей:  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ . Следовательно,

$$\omega_n = n + 1 + \delta_n,$$

получим, как и ранее, что

$$\omega_n = n + 1 + \frac{c}{n + 1} + o(n^{-1}), \quad (10.9.41)$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (10.9.42)$$

Снова, если  $q(x)$  имеет ограниченную производную, то слагаемое  $o(n^{-1})$  в выражениях (10.9.37), (10.9.39), (10.9.41) можно заменить на  $o(n^{-2})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В работе Левитана и Саркисяна [212] (1991) есть несколько незначительных ошибок, как они, без сомнения, есть и в этой книге;  $n$  в их уравнении (2.19) из параграфа 1.2.4 должен быть заменен на  $n + 1$ .

Необходимы следующие исторические замечания. Во многих статьях по асимптотическим оценкам делаются разные предположения о гладкости  $q(x)$ : непрерывность; наличие и ограниченность производной; наличие кусочно-непрерывной производной; наличие непрерывной производной и т. д. Известно, что если  $q(x)$  является непрерывной, то она не обязательно имеет производную; существует патологическая функция, которая непрерывна на  $[0, \pi]$ , однако нигде не дифференцируема. Однако в ранних источниках, например Инк (1927) [185], и некоторой советской литературе явно предполагается, что если  $q(x)$  непрерывна, то она имеет производную, однако эта производная не обязательно

является непрерывной, а только лишь кусочно-непрерывной. Аналогично, если говорится, что  $q(x)$  обладает  $r$ -той непрерывной производной, то  $q(x)$  имеет кусочно-непрерывную  $(r + 1)$ -ую производную.

Одно из наиболее глубоких исследований асимптотических оценок спектра Штурма–Лиувилля было проведено Хохштадтом (Hochstadt) [172] (1961), который пользовался некоторым аналогом WKВ-метода. Он предполагает, что среднее значение  $q(x)$  является нулевым. Уравнение (10.9.1) может быть редуцировано к этому виду, если переписать его следующим образом:

$$y''(x) + (\omega^{*2} - q^*(x))y(x) = 0, \quad (10.9.43)$$

где

$$\omega^{*2} = \omega^2 - \bar{q}, \quad q^*(x) = q(x) - \bar{q}, \quad \bar{q} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx. \quad (10.9.44)$$

Если  $h, H$  являются конечными и  $q(x)$  является дважды непрерывно дифференцируемой, то это показывает, что

$$(\omega_n^2 - \bar{q})^{\frac{1}{2}} = n + b_0 n^{-1} + b_1 n^{-3} + O(n^{-4}), \quad (10.9.45)$$

где

$$b_0 = \frac{h + H}{\pi}, \quad b_1 = d_1 - d_2, \quad (10.9.46)$$

$$d_1 = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [q^*(t)]^2 dt + q'(\pi) - q'(0) + 4hq^*(0) + 4Hq^*(\pi) \right\}, \quad (10.9.47)$$

$$d_2 = \left( \frac{h + H}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{h^3 + H^3}{\pi} \right). \quad (10.9.48)$$

Заметим, что  $d_1 = 0$ , когда  $q(x) = \text{const}$ , т. е.  $q^*(x) = 0$ .

Хохштадт также рассмотрел различные частные случаи, в которых  $h$  или  $H$  являются бесконечными. См. также работы Фикса (Fix) [89] (1967), Пешеля и Трубовича (Pöschel, Trubowitz) [269] (1987) и Рунделла (Rundell) [294] (1997).

Уравнение (10.9.45) можно переписать в виде

$$\omega_n = n + a_0 n^{-1} + a_1 n^{-3} + O(n^{-4}), \quad (10.9.49)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right) = c; \quad (10.9.50)$$

$$a_1 = b_1 - \frac{1}{8} \bar{q}^2 - \frac{1}{2} b_0 \bar{q}, \quad (10.9.51)$$

где  $b_1$  задается уравнением (10.9.46).

Уравнение (10.9.49) позволяет получить

$$\lambda_n = n^2 + 2a_0 + c_0 n^{-2} + O(n^{-3}), \quad (10.9.52)$$

где  $c_0 = a_0^2 + 2a_1$ .

Уравнение (10.9.23) дает первую асимптотическую оценку для так называемых нормировочных констант

$$\sigma_n = y_n^2(0) = \frac{[\varphi(0, \lambda_n)]^2}{\alpha_n^2}; \quad \sigma_n = \frac{2}{\pi} + O(n^{-2}). \quad (10.9.53)$$

Левитан в 1987 в работе [211] показывает, что если  $q(x)$  является дважды непрерывно дифференцируемой, то

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} (1 + \epsilon_0 n^{-2} + O(n^{-3})). \quad (10.9.54)$$

Пусть  $(\lambda_n)_0^\infty, (\mu_n)_0^\infty$  являются собственными значениями для (10.9.1), отвечающими краевым условиям

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 = y'(\pi) + H y(\pi), \quad (10.9.55)$$

$$y'(0) - h_2 y(0) = 0 = y'(\pi) + H y(\pi), \quad (10.9.56)$$

значит

$$\lambda_n^{\frac{1}{2}} = n + a_0 n^{-1} + a_1 n^{-3} + O(n^{-4}),$$

$$\mu_n^{\frac{1}{2}} = n + a'_0 n^{-1} + a'_1 n^{-3} + O(n^{-4}).$$

После долгих выкладок, основывающихся на упр. 10.8.2 (предполагающих перенумерацию из  $\mathbf{V}$  в  $\mathbf{S}$ ), Левитан показывает, что

$$\epsilon_0 = S - \frac{\pi^2}{6} (a_0 - a'_0)^2 + a_0 + \frac{a'_1 - a_1}{a'_0 - a_0}, \quad (10.9.57)$$

где

$$S = \lambda_0 - \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda_n - \mu_n) - 2(a_0 - a'_0)]. \quad (10.9.58)$$

Заметим, что (10.9.52) показывает, что этот ряд сходится.

Заметим, что уравнение (10.9.54) является важным для описания асимптотической формы  $\sigma_n$ , а не для нахождения явного представления (10.9.54) для  $\epsilon_0$ , т. е. как способ нахождения  $\sigma_n$ ; результат из упр. 10.8.2 (с заменой нумерации  $\mathbf{V}$  на  $\mathbf{S}$ ) показывает, как найти  $\sigma_n = v_n^2(0)$  при помощи спектра. МакНабб, Андерсен и Лапвуд (McNabb, Anderssen, Larwood) в работе [233] (1976) обсуждают асимптотику собственных значений в случае, когда существует один или два разрыва в потенциалах.

### Упражнения 10.9

1) Покажите, что, если  $h = \infty$ ,

$$(\omega_n^2 - \bar{q})^{\frac{1}{2}} = n + \frac{1}{2} + b_0(n + \frac{1}{2})^{-1} + b_1 n^{-3} + O(n^{-4}),$$

где  $b_0 = H/\pi$ ,  $b_1 = d_1 - d_2$ ,

$$d_1 = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int_0^\pi [q^*(t)]^2 dt + 4Hq^*(\pi) + q'(0) + q'(\pi) \right\};$$

$$d_2 = \left( \frac{H}{\pi} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{H^3}{\pi}.$$

### 10.10. Импульсные характеристики

Рассмотрим стержень плотности  $\rho$ , с модулем Юнга  $E$ , площадью поперечного сечения  $A(x)$  и длиной 1, свободный при  $x = 0$  и зафиксированный в точке  $x = 1$ . Пусть в момент времени  $t' = 0$  стержень находится в покое, а далее приводится в движение под действием силы  $g(t')$ , приложенной к концу  $x = 0$ . Определяющие уравнения имеют

вид:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = g(t'), \quad (10.10.1)$$

$$u(1, t') = 0, \quad t' > 0; \quad u(x, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t'}(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Вместо вещественного времени  $t'$  мы используем масштабированное время  $t = ct'$ ,  $c = \sqrt{E/\rho}$ , и рассматриваем  $g(t) = g(t')/E$ . Можно заменить конечную силу  $g(t)$  распределенным действием  $g(x, t)$  на маленьком интервале  $(0, \varepsilon)$ , при этом

$$g(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g(t)}{\varepsilon} \right) = g(t)\delta(x),$$

а значит, уравнение (10.10.1) принимает вид

$$A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(t)\delta(x). \quad (10.10.2)$$

Применим преобразование Лапласа к этому уравнению и выберем

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)u(x, t)dt, \quad G(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)g(t)dt$$

для получения

$$s^2 A(x)U(x, s) = (A(x)U')' + G(s)\delta(x). \quad (10.10.3)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям  $U(1, s) = 0$ , может быть записано в виде

$$U(x, s) = K(x, s)G(s),$$

тогда по теореме о конволюции

$$u(x, t) = \int_0^t k(x, t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (10.10.4)$$

где  $k(x, t)$  является обратным преобразованием Лапласа для  $K(x, s)$ , т. е.

$$k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(x, s) \exp(st) ds,$$

где  $\Gamma$  является прямой  $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ , лежащей правее точек вырождения  $K(x, s)$ . Функция  $k(x, t)$  называется (смещенной) функцией импульсного отклика. Легко видеть, что если  $g(\tau) — единичный импульс, т. е.  $g(\tau) = \delta(\tau)$ , то уравнение (10.10.4) показывает, что  $u(x, t) = k(x, t)$ .$

Если  $(\omega_n^2, u_n(x))_0^\infty$  являются (масштабированными) собственными значениями и ортонормированными собственными функциями свободно закрепленного стержня, т. е.

$$(A(x)u_n'(x))' + \omega_n^2 A(x)u_n(x) = 0; \quad u_n'(0) = 0 = u_n(1),$$

то можно разложить  $U(x, s)$  следующим образом:

$$U(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(s) u_n(x),$$

тогда уравнение (10.10.3) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s^2 + \omega_n^2) A(x) \alpha_n(s) u_n(x) = G(s) \delta(x).$$

Домножая на  $u_m(x)$  и интегрируя по  $(0, 1)$ , используя также ортогональность и тот факт, что

$$\int_0^1 u_n(x) \delta(x) dx = u_n(0),$$

получим

$$(s^2 + \omega_n^2) \alpha_n(s) = G(s) u_n(0)$$

и

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(0) u_n(x)}{s^2 + \omega_n^2},$$

для которого обратная величина имеет вид

$$k(x, t) = \begin{cases} \sum \frac{u_n(0)u_n(x)}{\omega_n} \sin \omega_n t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (10.10.5)$$

Для однородного стержня

$$u_n(x) = \sqrt{2} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right], \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2},$$

откуда

$$k(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right] \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right]}{(2n-1)},$$

т. е.

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ S \left[ \frac{\pi(x+t)}{2} \right] - S \left[ \frac{\pi(x-t)}{2} \right] \right\}, \quad (10.10.6)$$

где

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}. \quad (10.10.7)$$

Функция  $S(x)$  разрывна в точках  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ , и

$$S(x) = \text{sign}(x), \quad -\pi < x < \pi. \quad (10.10.8)$$

(Градштейн и Рыжик (Gradshteyn, Ryzhik) 1.4421 (1965).)

Из уравнения (10.10.8) можно вывести поведение стержня при воздействии импульса в точке  $t = 0$ . Следовательно, если  $x > t$ , то  $x + t < 2x < 2$ , откуда

$$S \left[ \frac{\pi(x+t)}{2} \right] = 1, \quad S \left[ \frac{\pi(x-t)}{2} \right] = 1$$

и  $k(x, t) = 0$ . Это можно интерпретировать как демонстрацию того, что воздействие импульса двигается вдоль стержня с масштабированной скоростью 1, т. е. реальной скоростью  $c$ , и стержень находится в покое при  $x > t$ . Исследование дифференциального уравнения с частными



производными (10.10.2) показывает, что этот результат справедлив даже в том случае, когда  $A(x)$  не является однородной (Гильберт и Курант (1962)). Для однородного стержня помимо начального возмущения, т. е. при  $x < t$ ,  $x + t < 2$ , имеем  $k(x, t) = 1/2$ . Когда возмущение достигает конца,  $x = 1$ , и начинает возвращаться, мы получаем

$$S \left[ \frac{\pi(x+t)}{2} \right] = -1, \quad S \left[ \frac{\pi(x-t)}{2} \right] = -1,$$

таким образом, шаг  $1/2$ , растянутый от  $x = 0$  до  $x = 1$ , аннулируется, начиная с  $x = 1$ . Так что процесс продолжается бесконечно.

Иногда достаточно удобно использовать в качестве переменных скорость и (масштабированное) давление, т. е.

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad p(x, t) = A(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (10.10.9)$$

тогда уравнение (10.10.2) можно записать в виде

$$A(x) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} + g(t)\delta(x), \quad A(x) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (10.10.10)$$

и скорость  $v(x, t)$  дается уравнением

$$v(x, t) = \int_0^t \widehat{h}(x, t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad (10.10.11)$$

где

$$\widehat{h}(x, t) = \frac{\partial k}{\partial t}(x, t) \quad (10.10.12)$$

надо интерпретировать как обобщенную функцию.

Уравнение (10.10.5) показывает, что

$$\widehat{h}(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) u_n(x) \cos(\omega_n t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (10.10.13)$$

следовательно,

$$\widehat{h}(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(0) \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0.$$

Для однородного стержня получаем

$$\widehat{h}(0, t) = \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right], & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Заметим, что справедливо равенство (Градштейн и Рыжик 1.4421 (1965))

$$\int_{-\infty}^t \widehat{h}(0, \tau) d\tau = \int_0^t \widehat{h}(0, \tau) d\tau = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi t/2]}{2n-1},$$

$$= 1 \quad (0 < t < 2),$$

откуда для  $0 < t < 2$ :

$$\widehat{h}(0, t) = \delta(t).$$

Для больших значений  $t$  функцию  $\widehat{h}(0, t)$  можно вычислить, пользуясь ее периодичностью,  $\widehat{h}(0, t+2) = -\widehat{h}(0, t)$ . Для неоднородного стержня можно показать, что

$$\widehat{h}(0, t) = \delta(t) + h(t), \quad (10.10.14)$$

где функция  $h(t)$  является непрерывно дифференцируемой. (См. упр. 10.10.2).

### Упражнения 10.10

1) Покажите, что  $S(x)$  из (10.10.6) удовлетворяет

$$S(x + \pi) = -S(x), \quad S(x + 2\pi) = S(x),$$

а значит, установите, что

$$S(x) = (-1)^{|n|}, \quad n\pi < x < (n+1)\pi.$$

2) Покажите, что если собственные значения  $\omega_n$  и собственные функции  $u_n(x)$  стержня удовлетворяют

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad [u_n(0)]^2 = 2, \quad m = N+1, \dots,$$

то его импульсный ответ можно записать в виде (10.10.14), где

$$h(t) = \sum_{m=1}^N \left\{ [u_m(0)]^2 \cos(\omega_m t) - 2 \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \right\}.$$

---

---

## ГЛАВА 11

# Обратная задача для непрерывных систем второго порядка

Говоря о своих сочинениях, иные авторы то и дело твердят: «Моя книга, мое толкование, мой труд по истории» — и тому подобное. Точь-в-точь как те выскочки, которые обзавелись собственным домом и не устают повторять: «Мой особняк». Лучше бы говорили: «Наша книга, наше толкование, наш труд по истории», потому что, как правило, там больше чужого, нежели их собственного.

Блез Паскаль. *Мысли*, 43

### 11.1. Исторический обзор

В параграфе 10.1 было установлено, что уравнение Штурма-Лиувилля может иметь одну из следующих трех форм. Одна из них, с которой работают в абстрактной математике (10.1.14):

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0. \quad (11.1.1)$$

В задачах теории колебаний необходимо уравнение

$$u''(x) + \lambda \rho^2(x)u(x) = 0, \quad (11.1.2)$$

описывающее поперечные колебания натянутой струны, тогда как уравнение

$$(A(x)v'(x))' + \lambda A(x)v(x) = 0 \quad (11.1.3)$$

возникает при описании продольных колебаний и колебаний кручения тонкого и прямого стержня в сечении  $A(x)$ .

Как и во всех обратных задачах (см. Паркер (Parker, 1977) [263]), введение Ньютона [249] (1983), Сабатьера (Sabatier) [295] (1978), Сабатьера [298] (1985), Гроетча (Groetsch) [155] (1993), Гроетча (Groetsch) [156] (2000) или Кирша (Kirsch) [193] (1996), существует три разных аспекта, связанных с обратными задачами:

- i) *существование*, т.е. математически, существует ли функция  $q(x)$ ,  $\rho(x)$  или  $A(x)$ , или физически, существует ли колебательная система, с требуемыми свойствами?
- ii) *единственность*, т.е. существует ли всего одна система с этими свойствами?
- iii) *построение*, т.е. как нам построить одну или более систем по имеющимся данным?

Эти вопросы, которые тесно связаны, постепенно изучались на протяжении прошедших семидесяти лет. В этой главе мы будем придерживаться договоренностей о нумерации **S**, приведенных в параграфе 10.1, если не указано обратное.

Амбарцумян (Ambarzumian) (1929) [3] рассматривал вопрос единственности в специальном случае. Он рассматривал уравнение (11.1.1) с симметричными краевыми условиями

$$y'(0) = 0 = y'(\pi) \quad (11.1.4)$$

и уравнение

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

с теми же краевыми условиями. Он показал, что если две системы имеют одинаковый спектр  $(\lambda_n)_0^\infty$ , где  $\lambda_n = n^2$ , то  $q(x)$  является тождественно нулевой. Заметим, что он рассматривал симметричные краевые условия, а значит, требуется только один спектр. Его доказательство имеет тот минус, что оно базируется на методах возмущения, которые требуют, чтобы  $q(x)$  было мало.

Фундаментальная статья об обратных задачах для уравнения (11.1.1) принадлежит Боргу (Borg) (1946) [39]. Он показал, что если  $q(x)$  симметрично, т.е.

$$q(x) = q(\pi - x), \quad (11.1.5)$$

то спектр уравнения (11.1.1), отвечающий краевым условиям (11.1.4) или краевым условиям Дирихле:

$$y(0) = 0 = y(\pi), \quad (11.1.6)$$

определяет функцию  $q(x)$  единственным образом. Это подтверждает более ранний результат Абрамцумяна. (См. также работу Хохштадта (Hochstadt) и Кима (Kim) (1970) [174].)

Важно принять во внимание следующее фундаментальное свойство уравнений (11.1.1)–(11.1.3); если система является симметричной относительно средней точки  $x = 1/2$ , а также: симметричными являются краевые условия, тогда, вообще говоря, одного спектра, отвечающего одному множеству краевых условий, достаточно для определения системы. Если система не является симметричной, то требуется два спектра, отвечающих двум различным краевым условиям на один конец. В этой связи Готтлиб (1986) [138] построил некоторые интересные контрпримеры. Напомним, что однородная струна, зафиксированная с обоих концов, т.е. струна у скрипки, имеет собственные частоты  $\omega_i$ , которые являются кратными  $\omega_1$ . Будем говорить, что спектр (по  $\omega$ , а не по  $\lambda$ ) является *гармоническим*. Благодаря этому свойству скрипка является музыкальным инструментом: обертонами струны являются все октавы, располагающиеся выше основного тона. Гармонический спектр является частным случаем *равномерно распределенного спектра*; здесь  $\omega_{i+1} - \omega_i = \text{const}$ . Особенностью однородной струны является наличие гармонического спектра.  $\omega_i = (i + 1)\pi$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  для фиксированных концов и гармонического спектра  $\omega_i = (i + 1/2)\pi$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , для свободно закрепленных концов (см. замечание о свободном конце в начале параграфа 10.1). Готтлиб (1986) [138] строит кусочно-непрерывные струны с частью, имеющей один гармонический спектр, как для фиксированного-фиксированного, так и для свободно закрепленного концов (см. параграф 12.4.). В каждом случае *другой* спектр является равномерно распределенным, но не гармоническим. Эти рассуждения подчеркивают необходимость использования двух спектров для проверки единственности.

Борг также рассматривал уравнение (11.1.1) для двух множеств краевых условий; одно множество,

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = 0 = \cos \beta y(\pi) + \sin \beta y'(\pi), \quad (11.1.7)$$

и другое множество,

$$\cos \alpha y(0) + \sin \alpha y'(0) = 0 = \cos \gamma y(\pi) + \sin \gamma y'(\pi), \quad (11.1.8)$$

которое отличается только на конце  $x = \pi$ , т.е.  $\beta \neq \gamma$ . Он показал, что если  $\sin \alpha = 0 = \sin \gamma$  так, что (11.1.8) эквивалентно (11.1.6) и  $\sin \beta \neq 0$ , то два чередующихся спектра (как в параграфе 10.8) определяют единственную несимметрическую функцию  $q(x)$ . Если  $\sin \alpha \sin \beta \neq 0$ , то  $q(x)$  единственным образом определяется посредством двух спектров, что недалеко от первого собственного значения  $\lambda_0$  первого спектра, отвечающего условию (11.1.7).

Результаты Борга были упрощены и обобщены в работах Левинсона (Levinson) (1949) [207]. Он доказал, что если дан спектр (11.1.1) для каждого из краевых условий (11.1.7), (11.1.8) и если  $\sin(\gamma - \beta) \neq 0$ , т. е. если (11.1.7), (11.1.8) не совпадают, то  $q(x)$  определен единственным образом. (Напомним, что это означает, что не существует *более* одного решения  $q(x)$ , а не то, что существует *по крайней мере* одно  $q(x)$ .) Этот результат был расширен Хохштадтом [175] (1973), [177] (1975а), который изучил, с точностью до чего определена функция  $q(x)$ , в случае, когда некоторые собственные значения,  $\lambda_n, \mu_n$ , отвечающие соответственно краевым условиям (11.1.7), (11.1.8), неизвестны; см. также Хольд (1978а) [162], Барсилон (1974с) [16] и другие ссылки, приведенные в этих работах.

В симметричном случае Левинсон показал, что если известно, что (11.1.5) справедливо почти всюду на  $(0, \pi)$  и если  $\alpha + \beta = \pi$ , т. е.  $h = H$  в (11.1.2), то  $q(x)$  единственным образом определяется посредством спектра для краевых условий (11.1.7). Этот результат включает в себя результаты Борга для (11.1.4) ( $h = 0 = H$ ) и (11.1.6) ( $h = \infty = H$ ) как частные случаи.

Марченко (Marchenko) (1950) [218], (1952) [219], (1953) [220] уточнил эти результаты. Он показал, что если  $q(x) \in L_1(0, \pi)$  и  $\sin(\alpha - \beta) \neq 0$ , то спектр (11.1.1), отвечающий (11.1.7), (11.1.8), определяет  $q(x)$  и  $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$  единственным образом. Полный перечень теорем единственности можно найти в работе Левинсона (1949) [209]. Последующие результаты находятся в работах Хохштадта (1973) [175], (1975b) [178], (1976) [179], (1977) [180], Хохштадт и Либерман (1978) [181], Сабатьер (1979а) [296], (1979b) [297], Халд (1984) [165], Зейдман (1985) [301], МакЛафлин (1986) [228] и Левитан (1987) [211], Кириш (1996) [193].

Все эти результаты относятся к единственности. По большей части все они утверждают, что невозможно найти более одной функции  $q(x)$ , соответствующей двум спектрам. Однако, как было показано в главе 10, собственные значения (11.1.1), (11.1.7), и (11.1.1), (11.1.8) обладают целым рядом специальных свойств, например, они чередуются и имеют асимптотический вид (10.9.22), если  $h, H$  конечны, или один из других видов, перечисленных в параграфе 10.9, если  $h$  или  $H$  являются бесконечными. Возникает вопрос о *достаточных* условиях того, что два множества чисел  $(\lambda_n)_0^\infty$  и  $(\mu_n)_0^\infty$  являются спектрами уравнения (11.1.1), отвечающими двум множествам граничных условий, таких как (11.1.7), (11.1.8). Эти условия, конечно, будут зависеть от условий, которые мы наложим на  $q(x)$ .

Заметим, что если смотреть на эту задачу как на чисто математическую, то она очень сложна, это покажет любая проверка литературы. Однако сложности возникают, так как предполагается, что данные образуют две бесконечные последовательности: либо  $(\lambda_n, \mu_n)_0^\infty$ , либо возможно,  $(\lambda_n, \sigma_n)_0^\infty$ , где  $(\sigma_n)_0^\infty$  являются нормирующими множителями, введенными в параграфе 10.8. В практических обратных задачах в теории колебаний невозможно измерить больше, чем (малое) конечное число частот. В этом случае мы получаем, что достаточным условием является положительность собственных значений (они являются квадратами собственных частот) и чередуются, как обсуждалось в параграфе 10.8. Сделаем несколько замечаний о математической задаче для полноты картины.

Левитан (1964b) [210] доказал следующий результат. Пусть  $(\lambda_n)_0^\infty$ ,  $(\mu_n)_0^\infty$  являются множествами вещественных чисел, удовлетворяющих

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots, \quad (11.1.9)$$

$$\lambda_n^{\frac{1}{2}} = n + a_0 n^{-1} + a_1 n^{-2} + O(n^{-3}), \quad (11.1.10)$$

$$\mu_n^{\frac{1}{2}} = n + a'_0 n^{-1} + a'_1 n^{-2} + O(n^{-3}), \quad (11.1.11)$$

где  $a_0 \neq a'_0$ . Тогда, существует уравнение вида (11.1.1) с непрерывной вещественной функцией  $q(x)$  и вещественными числами  $h, h', H$  такими, что  $(\lambda_n)_0^\infty$  является спектром (11.1.1), если

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi), \quad (11.1.12)$$

$(\mu_n)_0^\infty$  является спектром при условиях

$$y'(0) - h'y(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi), \quad (11.1.13)$$

и

$$a'_0 - a_0 = (h' - h)/\pi. \quad (11.1.14)$$

Заметим, что асимптотическая форма (11.1.10) была получена в параграфе 10.9, в предположении, что  $q(x)$  обладает ограниченной производной, и явные представления для  $a_1$  из уравнений (10.9.51)–(10.9.53) были получены при предположении, что  $q(x)$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, кроме того, в действительности достаточно предположить, что  $q''(x)$  является кусочно-непрерывной или даже ограниченной. В параграфе 10.9 мы показали, что при предположении того, что  $q(x)$  только непрерывна, асимптотическая форма  $\lambda_n^{\frac{1}{2}}$

имеет вид (10.9.20). Следовательно, заметим, что достаточные условия (11.1.10), (11.1.11) являются более сильными, чем необходимые условия (10.9.20). Как показал Левитан (1964b) [210], существует аналогичное несоответствие между необходимыми и достаточными условиями, если потребовать, что  $q(x)$  имеет, скажем,  $r$  непрерывных производных. См. работу Левитана и Саркисяна (1991) [212] и ссылки, приведенные там.

Результат Левитана является улучшением результатов, содержащихся в последнем параграфе работы Гельфанда–Левитана (1951) [100]. В этой статье данные в обратной задаче имеют вид  $(\lambda_n)_0^\infty$  и нормирующие константы  $(\sigma_n)_0^\infty$ . Авторы показали, что если  $\lambda_n^{\frac{1}{2}}$  имеет асимптотический вид (11.1.10), и  $\sigma_n$  имеет асимптотический вид (10.9.54), тогда существует непрерывная функция  $q(x)$ , для которой  $(\lambda_n, \sigma_n)_0^\infty$  являются спектральными константами, соответствующими (11.1.12). Заметим, что существуют различные частные случаи этих результатов, отвечающие ситуациям, где  $h$  или  $H$  бесконечны.

После нескольких замечаний о достаточных условиях мы переходим к третьему вопросу: как построить  $q(x)$  по имеющимся данным? Следующая фундаментальная работа принадлежит Гельфанду и Левитану (1951) [100]. В этой работе авторы показывают, что  $q(x)$  и константы  $h, H$  определены единственным образом по  $(\lambda_n, \sigma_n)_0^\infty$ . Они разработали метод построения  $q(x)$ , основанный на более ранней статье Марченко (1950) [218]; в этой главе мы опишем некоторую модифицированную форму этой процедуры.

В следующих трех статьях Крейна (1951a) [200], (1951b) [201], (1952) [202], рассматривался вопрос единственности существования и восстановления для натянутой струны (уравнение (11.1.2)). Он использовал теорию расширения для положительно определенных функций. Эти результаты Крейна были сформулированы без доказательства, и его метод использовался лишь немногими последующими авторами; см. Гупинаф (Gopinath) и Сондхи (Sondhi) (1971) [137], и Ландау (1983) [204].

Гупинаф и Сондхи (1970) [136] рассматривали задачи определения диапазона человеческого голоса по акустическим измерениям. Для этого потребовалось уравнение Вебстера для рупора (10.10.10), разработано два метода для его обращения. Первый из них построен в духе Гельфанда–Левитана, и его можно заменить рассмотрением из параграфа 11.6. Второй определен на области времени и основывается на импульсном отклике, описанном в параграфе 10.10. Эта формулировка была улучшена и расширена Гупинафом и Сондхи (1971) [137] и описы-



вается в параграфе 11.11. Недавний обзор, посвященный обратным задачам для голосового диапазона, приводится в работе Саудхи (1984) [309]. Взаимосвязь между различными методами для обращения задач второго порядка была исследована в работе Барриджа (Burridge) (1980) [45]; он обращает внимание на случай, в котором функция площади поперечного сечения  $A(x)$  является разрывной. См. также работу Хольда (1984) [165].

Одно из наиболее ранних исследований состоит в реальном построении потенциала для задачи Штурма–Лиувилля, используется аппроксимация конечных разностей/конечных элементов для управляющего уравнения. Одна из сложностей, которая должна быть отмечена, состоит в том, что собственные значения, полученные при помощи дискретной аппроксимации, разнятся, с возрастанием номера волны, от значений, построенных при помощи дифференциального уравнения. Пэйн (Paine) и его коллеги провели детальное изучение этой задачи. См. Пэйн и де Хууг (de Hoog) (1980) [258], Пэйн, де Хууг и Андерсен (Andersen) (1981) [259], Пэйн (1982) [256], (1984) [257], Эндрю и Пэйн (1985) [10], (1986) [11]. Изучение обратных задач для систем Штурма–Лиувилля моделируется при помощи дискретных систем (Якоби) в работах Андерсена (1970) [5]; однако у него в итоге не получилось результатов по обратной задаче для матриц Якоби. См. также работу Барсилона (1974a) [14]. Хальд (1972) [159] провел детальное исследование этой задачи, позднее Хольд (1977) [161] обращает отдельное внимание на задачу Штурма–Лиувилля с симметричным потенциалом. Хольд (1978b) [163] рассматривает дискретную систему, полученную применением метода Рылея–Ритца к непрерывной задаче, и изучает предельный случай, в котором число слагаемых в разложении в ряд Фурье для  $q(x)$  стремится к бесконечности. Современная версия указанных методов аппроксимации может быть найдена в параграфе 11.9. Барсилон (1983) [22] попытался получить (непрерывную) плотность струны по известному решению обратной задачи для дискретной системы, однако его метод не дает явного вычисления. Прямое и сравнительно простое решение обратной задачи Штурма–Лиувилля для стержня, использующее кусочно-равномерную модель, дается в параграфе 12.1.

## 11.2. Операторы преобразований

Важный шаг в разъяснении этих трех аспектов, единственности, существования и восстановления, состоит в введении *оператора преоб-*

разования Гельфанда–Левитана–Марченко. Этот оператор связывает решения уравнения Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим два уравнения, базовое уравнение

$$\phi''(x) + (\lambda - p(x))\phi(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (11.2.1)$$

при одном граничном условии

$$\phi'(0) - h\phi(0) = 0, \quad (11.2.2)$$

и другое уравнение,

$$\psi''(x) + (\lambda - q(x))\psi(x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (11.2.3)$$

при другом граничном условии

$$\psi'(0) - h'\psi(0) = 0. \quad (11.2.4)$$

Мы ищем оператор вида

$$\psi(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy, \quad (11.2.5)$$

который преобразует решение уравнения (11.2.1), (11.2.2) в решение (11.2.3), (11.2.4).

Продифференцировав (11.2.5), получим

$$\psi'(x) = \phi'(x) + K(x, x)\phi(x) + \int_0^x K_x(x, y)\phi(y)dy,$$

где

$$K_x(x, y) = \frac{\partial K}{\partial x}(x, y).$$

Второе дифференцирование дает

$$\psi''(x) = \phi''(x) + \frac{dK(x, x)}{dx}\phi(x) + K(x, x)\phi'(x) + K_x(x, x)\phi(x) + \int_0^x K_{xx}(x, y)\phi(y)dy.$$

Это первое слагаемое в (11.2.3). Последнее слагаемое имеет вид

$$q(x)\psi(x) = q(x)\phi(x) + \int_0^x q(x)K(x, y)\phi(y)dy.$$

Это дает второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\lambda\psi(x) &= \lambda\phi(x) + \lambda \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy \\ &= \lambda\phi(x) + \int_0^x K(x, y)\{p(y)\phi(y) - \phi''(y)\}dy.\end{aligned}$$

Преобразуем дважды последний интеграл по частям:

$$\int_0^x K(x, y)\phi''(y)dy = [K(x, y)\phi'(y) - K_y(x, y)\phi(y)]_0^x + \int_0^x K_{yy}(x, y)\phi(y)dy.$$

Соберем слагаемые этого уравнения для того, чтобы записать (11.2.3); получится следующее:

$$\begin{aligned}\phi''(x) + (\lambda - q(x))\phi(x) + \frac{dK(x, x)}{dx}\phi(x) + K(x, x)\phi'(x) \\ + K_x(x, x)\phi(x) - [K(x, y)\phi'(y) - K_y(x, y)\phi(y)]_{y=0}^{y=x} \\ + \int_0^x \{K_{xx}(x, y) - K_{yy}(x, y) + (p(y) - q(x))K(x, y)\}\phi(y)dy.\end{aligned}$$

Используем тот факт, что  $\phi(x)$  удовлетворяет уравнению (11.2.1) и что

$$K_x(x, x) + K_y(x, x) = \frac{dK(x, x)}{dx},$$

чтобы получить

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{2dK(x, x)}{dx} + p(x) - q(x) \right\} \phi(x) + K(x, 0)\phi'(0) - K_y(x, 0)\phi(0) + \\ + \int_0^x \{K_{xx}(x, y) - K_{yy}(x, y) + (p(y) - q(x))K(x, y)\}\phi(y)dy.\end{aligned}$$

Это уравнение тождественно выполняется при рассмотрении

$$K_{xx}(x, y) - K_{yy}(x, y) + (p(y) - q(x))K(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi, \quad (11.2.6)$$

$$\frac{dK}{dx}(x, x) = \frac{1}{2}(q(x) - p(x)), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.2.7)$$

$$K(x, 0)\phi'(0) - K_y(x, 0)\phi(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (11.2.8)$$

Теперь рассмотрим граничные условия при  $x = 0$ . Легко видеть, что

$$\psi(0) = \phi(0), \quad \psi'(0) = \phi'(0) + K(0, 0)\phi(0). \quad (11.2.9)$$

Если  $h, h'$  являются конечными, то  $\phi(0) \neq 0$  и  $\phi'(0) = h\phi(0)$  дают

$$K_y(x, 0) - hK(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.2.10)$$

и

$$\psi'(0) = (h + K(0, 0))\psi(0),$$

откуда

$$K(0, 0) = h' - h \quad (11.2.11)$$

и, следовательно, по (11.2.7),

$$K(x, x) = h' - h + \frac{1}{2} \int_0^x (q(y) - p(y)) dy. \quad (11.2.12)$$

Заметим, что если  $h = \infty$ , откуда  $\phi(0) = 0$ , то уравнение (11.2.8) позволяет получить

$$K(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.2.13)$$

и  $\psi(x)$  удовлетворяет  $\psi(0) = 0$ , т. е.  $h' = \infty$ . В этом случае уравнение (11.2.12) переходит в

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (q(y) - p(y)) dy. \quad (11.2.14)$$

С этим ядром  $K(x, y)$  уравнение (11.2.5) преобразует решение (11.2.1), (11.2.2) в решение (11.2.3), (11.2.4).

### 11.3. Гиперболическое уравнение для $K(x, y)$

Ядро  $u(x, y) = K(x, y)$  удовлетворяет гиперболическому уравнению (11.2.6), т. е.

$$u_{xx} - u_{yy} + (p(y) - q(x))u = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi \quad (11.3.1)$$

в верхнем треугольнике OIC, показанном на рисунке 11.3.1. Характеристиками этого уравнения являются прямые  $x \pm y = \text{const}$ . Ядро имеет значение (11.2.12), т. е.

$$u(x, x) = h' - h + \frac{1}{2} \int_0^x (q(t) - p(t)) dt \quad (11.3.2)$$

на характеристике  $x = y$ , и удовлетворяет условию (11.2.10), т. е.

$$u_y(x, 0) - hu(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.3.3)$$

на оси абсцисс.

Вначале обсудим, как  $u(x, y)$  можно продолжить на нижний треугольник OID, чтобы были выполнены граничные условия (11.3.3). Имеют место три случая: **i**)  $h = 0$ . Тогда  $u_y(x, 0) = 0$ , так что мы продолжим  $u(x, y)$  на нижний треугольник, как *четную* функцию  $y$ , т. е.

$$u(x, -y) = u(x, y);$$

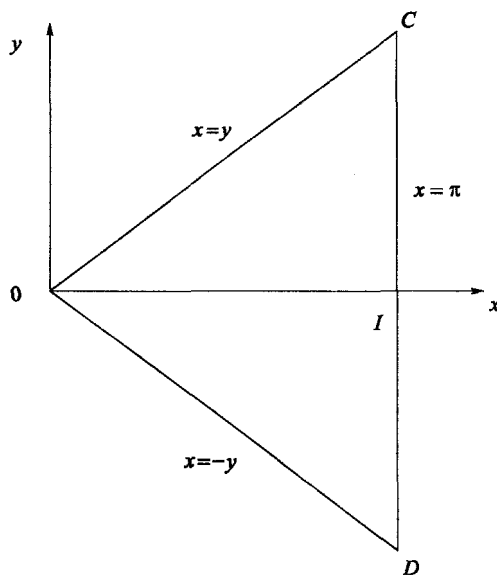


Рис. 11.3.1.  $0 \leq y \leq x \leq \pi$  в верхнем треугольнике OIC

тогда

$$u(x, -x) = h' + \frac{1}{2} \int_0^x (q(t) - p(t)) dt.$$

ii)  $h = \infty$ . Теперь  $u(x, 0) = 0$ , поэтому мы продолжим  $u(x, y)$  как *нечетную* функцию  $y$ , т. е.

$$u(x, -y) = -u(x, y),$$

значит, согласно (11.2.14),

$$-u(x, -x) = u(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (q(t) - p(t)) dt.$$

iii)  $h$  является конечным и ненулевым. Определим

$$u(x, y) = \exp(-hy)K(x, y), \quad (11.3.4)$$

тогда

$$u_y(x, 0) = K_y(x, 0) - hK(x, 0) = 0.$$

Это означает, что мы должны продолжить  $u(x, y)$  как четную функцию  $y$ . Значения  $u(x, y)$  на характеристиках имеют вид

$$u(x, x) = u(x, -x) = \exp(-hx)K(x, x),$$

где  $K(x, x)$  задано формулой (11.2.12). Так как  $K(x, y)$  удовлетворяет (11.3.1),  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} - u_{yy} - 2h \operatorname{sign}(y)u_y + (p(y) - q(x) - h^2)u = 0 \quad (11.3.5)$$

на треугольнике OCD, т. е.  $0 \leq |y| \leq x \leq \pi$ . Здесь

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} +1, & y > 0, \\ -1, & y < 0 \end{cases}$$

и  $p(-y) = p(y)$ .

Уравнения (11.3.1), (11.3.5) являются гиперболическими уравнениями в частных производных. Свойства существования и единственности решений таких уравнений являются предметом рассмотрения учебников по уравнениям в частных производных. Следуя философии нашей книги, мы не будем предполагать, что читатель знаком с этими свойствами, и выведем их *от начал*.

Известны два основных вопроса об уравнениях в частных производных (11.3.1) и (11.3.5): какие граничные условия дают единственное решение? Как найти единственное решение из граничных условий? Обнаруживается, что существует два вида соответствующих граничных условий, позволяющих поставить две различные задачи:

- *задача Гурса*, в которой  $u$  задано на характеристиках  $x = \pm y$ .
- *Задача Коши*, в которой  $u$  и  $u_x$  заданы на стороне  $CD$ , т. е. на  $x = \pi$ ,  $-\pi \leq y \leq \pi$ .

В обоих этих случаях мы можем редуцировать решение уравнения в частных производных к решению *интегрального уравнения Вольтерры* и можем показать, что это уравнение имеет единственное решение.

### Задача Гурса

Сначала рассмотрим случаи i) и ii); определяющим уравнением является (11.3.1). Теорема Стокса на плоскости имеет вид:

$$\iint_S \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} w_1 dx + w_2 dy, \quad (11.3.6)$$

где  $\Gamma$  является границей  $S$ , которая обходится против часовой стрелки.

Применим эту теорему к прямоугольнику  $OBPA$  см. рисунок 11.3.2, где  $w_1 = u_y$ ,  $w_2 = u_x$ . Тогда

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = u_{xx} - u_{yy} = f(x, y)u,$$

где

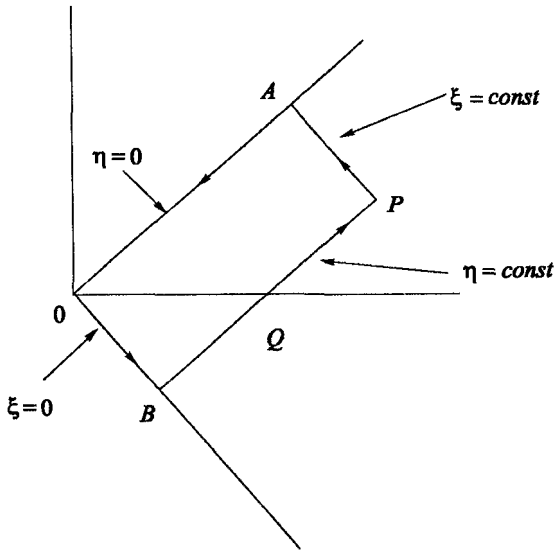
$$f(x, y) = q(x) - p(y).$$

Левая часть уравнения (11.3.6) имеет вид

$$\iint_S f(x, y)u(x, y) dx dy, \quad (11.3.7)$$

здесь  $S$  — это прямоугольник  $OBPA$ . Правая часть уравнения (11.3.6) состоит из четырех интегралов по отрезкам, вдоль  $OB + BP + PA + AO$ . Для вычисления этих интегралов удобно ввести так называемые *характеристические координаты*

$$\xi = \frac{1}{2}(x + y), \quad \eta = \frac{1}{2}(x - y). \quad (11.3.8)$$

Рис. 11.3.2. Прямоугольник  $OBPA$ 

Эквивалентно:

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta. \quad (11.3.9)$$

Частные производные этих координат имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим интеграл по  $OB$

$$I_1 = \int_{OB} w_1 dx + w_2 dy.$$

На  $OB$   $x = \eta$ ,  $y = -\eta$ , поэтому  $dx = d\eta$ ,  $dy = -d\eta$  и  $w_1 dx + w_2 dy = (u_y - u_x) d\eta = -u_\eta d\eta$ , значит,

$$I_1 = \int_{OB} u_\eta d\eta = -[u]_O^B = -u(B) + u(O).$$



На  $BP$   $\eta = \text{const}$ ,  $dx = dy = d\xi$ , поэтому

$$I_2 = \int_{BP} u_\xi d\xi = [u]_B^P = u(P) - u(B).$$

Аналогично:

$$I_3 = u(P) - u(A), \quad I_4 = u(O) - u(A).$$

Следовательно, правая часть (11.3.6) имеет вид:

$$2u(P) - 2u(A) - 2u(B) + 2u(O).$$

Так как  $A$  имеет координаты  $((x+y)/2, (x+y)/2)$  и  $B$  имеет координаты  $(x-y)/2, (y-x)/2)$ , получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u((x+y)/2, (x+y)/2) + u((x-y)/2, (y-x)/2) \\ &- u(0, 0) + \frac{1}{2} \int_S \int f(x', y') u(x', y') dx' dy'. \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

Это уравнение дает представление для  $u(x, y)$  в виде суммы двух частей: первая, содержащая первые три слагаемые, строится по данным на характеристиках; вторая является интегралом по прямоугольнику  $OBPA$ .

В характеристических координатах уравнение (11.3.10) принимает вид

$$\begin{aligned} u(\xi + \eta, \xi - \eta) &= u(\xi, \xi) + u(\eta, -\eta) - u(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\eta \left\{ \int_0^\xi f(\sigma + \tau, \sigma - \tau) u(\sigma + \tau, \sigma - \tau) d\sigma \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

т. е. имеет вид интегрального уравнения Вольтерра. Заметим, что если  $h = 0$ , то  $u(\eta, -\eta) = u(\eta, \eta)$ ; если  $h = \infty$ , то  $u(\eta, -\eta) = -u(\eta, \eta)$  и  $u(0, 0) = 0$ .

Уравнение (11.3.11) имеет единственное решение для имеющихся условий на характеристиках. Иначе, если существует два решения, то их разность  $u = u_1 - u_2$  удовлетворяет уравнению

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^\eta \left\{ \int_0^\xi f(\sigma + \tau, \sigma - \tau) u(\sigma + \tau, \sigma - \tau) d\sigma \right\} d\tau. \quad (11.3.12)$$

Классический способ доказать, что это уравнение имеет только тривиальное решение, состоит в следующем. Функция  $f$  ограничена:  $|f| \leq 2M$ . Это означает, что  $v = |u|$  удовлетворяет

$$v(\xi, \eta) \leq MV(\xi, \eta),$$

где

$$V(\xi, \eta) = \int_0^\eta \int_0^\xi v(\sigma + \tau, \sigma - \tau) d\sigma d\tau.$$

Предположим,  $0 \leq \xi \leq k$  и  $0 \leq \eta \leq k$ , тогда

$$v(\xi, \eta) \leq MV(k, k),$$

а значит,

$$V(k, k) \leq Mk^2V(k, k).$$

Если  $v(\xi, \eta)$  не является тождественно нулевой на  $[0, k] \times [0, k]$ , то это неравенство невозможно при  $Mk^2 < 1$ . Выберем  $k_0$  так, что  $Mk_0^2 < 1$ , тогда  $u(\xi, \eta) \equiv 0$  на  $[0, k_0] \times [0, k_0]$ . Теперь предположим, что  $(\xi, \eta) \in [0, \sqrt{2}k_0] \times [0, \sqrt{2}k_0]$ , тогда для  $(\xi, \eta)$  вне  $[0, k_0] \times [0, k_0]$  получим

$$v(\xi, \eta) \leq MV(\sqrt{2}k_0, \sqrt{2}k_0),$$

откуда

$$V(\sqrt{2}k_0, \sqrt{2}k_0) \leq MV(\sqrt{2}k_0, \sqrt{2}k_0)(2k_0^2 - k_0^2),$$

что вместе с  $Mk_0^2 < 1$  дает противоречие. Продолжая эти рассуждения по индукции, получим  $v(\xi, \eta) = 0$ , т. е.  $u(\xi, \eta) = 0$ .

Обобщение этих рассуждений на случай iii), где  $h$  является конечным и ненулевым, представляет некоторую сложность, но не является тяжелым. Рассуждая в точности аналогично предыдущему, получим, что уравнение, отвечающее (11.3.10), имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u((x+y)/2, (x+y)/2) + u((x-y)/2, (y-x)/2) - \\ &- u(0, 0) + \frac{1}{2} \int_S \int f(x', y') u(x', y') dx' dy' - h \int_S \int \text{sign}(y') u_y dx' dy', \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

где

$$f(x, y) = q(x) - p(y) + h^2 \quad (11.3.14)$$

и  $p(-y) = p(y)$ . Воспользуемся снова теоремой Стокса, для того, чтобы записать последнее слагаемое в виде суммы прямолинейных интегралов по отрезкам; см. упр. 11.3.1.

Полученное уравнение снова является интегральным уравнением Вольтерра, имеющим единственное решение.

### Задача Коши

Будем рассуждать как в задаче Гурса и применим теорему Стокса к треугольнику  $ABP$  на рисунке 11.3.3.

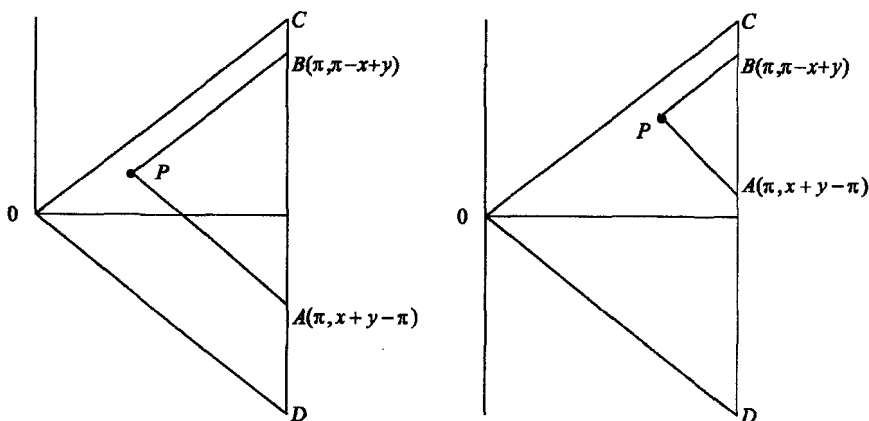


Рис. 11.3.3. Треугольник  $ABP$ , где а)  $x + y < \pi$  и б)  $x + y > \pi$

В случаях i) и ii) правая часть уравнения (11.3.6) имеет вид (11.3.7), в то время как левая часть является суммой прямолинейных интегралов по  $AB + BP + PA$ . Получим

$$I_1 = \int_{AB} w_1 dx + w_2 dy = \int_{AB} u_x dy$$

$$I_2 = \int_{BP} w_1 dx + w_2 dy = \int_{BP} u_\xi d\xi = [u]_B^P = u(P) - u(B)$$

$$I_3 = \int_{PA} w_1 dx + w_2 dy = \int_{PA} u_\eta d\eta = -[u]_P^A = u(P) - u(A).$$

Это позволяет получить интегральное уравнение Вольтерра

$$2u(x, y) = u(\pi, x + y - \pi) + u(\pi, \pi - x + y) - \int_{x+y-\pi}^{\pi-x+y} u_x(\pi, t) dt + \iint_S f(x', y') u(x', y') dx' dy', \quad (11.3.15)$$

где в качестве  $S$  рассматривается треугольник  $ABP$ . В случае iii) снова существует дополнительное слагаемое

$$-h \iint_S \text{sign}(y) u_y dx' dy', \quad (11.3.16)$$

которое необходимо добавить к правой части (11.3.15). Это рассматривается в упр. 11.3.3.

Во всех случаях  $u(x, y)$  получается как решение интегрального уравнения Вольтерра; решение однозначно определяется значениями  $u$  и  $u_x$  на отрезке  $CD$ , т. е.  $x = \pi$ ,  $-\pi \leq y \leq \pi$ .

Покажем теперь, как можно использовать единственность решения гиперболического уравнения для  $K(x, y)$  при доказательстве единственности решения обратной задачи для уравнения Штурма–Лиувилля.

### Упражнения 11.3

1) Покажите, что интеграл из (11.3.13) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \text{sign}(y) u_y dx dy = -2 \int_0^{x-y} u(s, 0) ds \\ &\quad - \int_{\eta}^{\xi} u(\sigma + \eta, \sigma - \eta) d\sigma + \int_0^{\eta} u(\sigma + \eta, \sigma - \eta) d\sigma \\ &\quad + \int_0^{\eta} u(\xi + \tau, \xi - \tau) d\tau + \int_0^{\xi} u(\sigma, \sigma) d\sigma + \int_0^{\eta} u(\tau, -\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2) Покажите, что интеграл из (11.3.16) можно записать в виде:

$$I = \int_S \int \operatorname{sign}(y) u_y dx dy = \int_{\xi}^{\pi-\eta} u(\sigma + \eta, \sigma - \eta) d\sigma - \int_{\eta}^{\xi} u(\xi + \tau, \xi - \tau) d\tau + \int_{\xi}^{\pi-\xi} u(\xi + \tau, \xi - \tau) d\tau - 2 \int_{x+y}^{\pi} u(s, 0) ds,$$

если,  $y > 0$ ,  $x + y < \pi$ , и

$$I = \int_S \int \operatorname{sign}(y) u_y dx dy = \int_{\xi}^{\pi-\eta} u(\sigma + \eta, \sigma - \eta) d\sigma - \int_{\eta}^{\pi-\xi} u(\xi + \tau, \xi - \tau) d\tau,$$

если  $y > 0$ ,  $x + y \geq \pi$ .

## 11.4. Единственность решения обратной задачи

Пользуясь теоремой единственности из параграфа 11.3, покажем теперь, что потенциал  $p(x)$  в формуле (11.2.1) однозначно определяется двумя спектрами, отвечающими различным условиям на одном из концов  $(0, \pi)$ .

**Теорема 11.4.1.** Пусть существуют два потенциала  $p(x)$ ,  $q(x) \in C[0, \pi]$ , со следующими свойствами:

i)  $y'' + (\lambda - p)y = 0$ ,  $y'(0) - h_1 y(0) = 0 = y'(\pi) + H_1 y(\pi)$  обладает спектром  $(\lambda_n)_{\delta}^{\infty}$ ;

ii)  $y'' + (\lambda - p)y = 0$ ,  $y'(0) - h_1 y(0) = 0 = y'(\pi) + H'_1 y(\pi)$  обладает спектром  $(\mu_n)_{\delta}^{\infty}$ ;

iii)  $y'' + (\lambda - q)y = 0$ ,  $y'(0) - h_2 y(0) = 0 = y'(\pi) + H_2 y(\pi)$  обладает спектром  $(\lambda_n)_{\delta}^{\infty}$ ;

iv)  $y'' + (\lambda - q)y = 0$ ,  $y'(0) - h_2 y(0) = 0 = y'(\pi) + H'_2 y(\pi)$  обладает спектром  $(\mu_n)_{\delta}^{\infty}$ .

Если  $H_2 \neq H'_2$ , то  $p(x) = q(x)$ ,  $h_1 = h_2$ ,  $H_1 = H_2$ ,  $H'_1 = H'_2$ .

**Доказательство.** Начнем с использования известного асимптотического вида собственных значений. Уравнение (10.9.20) дает, что

$$\sqrt{\lambda_n} = n + cn^{-1} + o(n^{-1}),$$

где

$$c = \frac{1}{\pi}(h + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx).$$

Следовательно, так как i) и iii) имеют одинаковый спектр,

$$h_1 + H_1 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(x) dx = h_2 + H_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx, \quad (11.4.1)$$

а так как ii) и iv) обладают одинаковым спектром,

$$h_1 + H'_1 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(x) dx = h_2 + H'_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx. \quad (11.4.2)$$

Теперь преобразуем решение  $\phi_n(x)$  для i), отвечающее собственному значению  $\lambda_n$ , в решение  $\psi_n(x)$  для iii) с тем же собственным значением:

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) + \int_0^x K(x, y) \phi_n(y) dy,$$

согласно (11.2.11), (11.2.12), получим

$$K(0, 0) = h_2 - h_1, \quad (11.4.3)$$

$$K(\pi, \pi) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (q(x) - p(x)) dx. \quad (11.4.4)$$

Проверим граничные условия при  $x = \pi$ :

$$\begin{aligned} \psi_n(\pi) &= \phi_n(\pi) + \int_0^{\pi} K(\pi, y) \phi_n(y) dy, \\ \psi'_n(\pi) &= \phi'_n(\pi) + K(\pi, \pi) \phi_n(\pi) + \int_0^{\pi} K_x(\pi, y) \phi_n(y) dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi'_n(\pi) + H_2\psi_n(\pi) &= \phi'_n(\pi) + H_1\phi_n(\pi) + \{K(\pi, \pi) + H_2 - H_1\}\phi_n(\pi) \\ &+ \int_0^\pi \{K_x(\pi, y) + H_2K(\pi, y)\}\phi_n(y)dy. \end{aligned}$$

Справедливо, что  $\phi'_n(\pi) + H_1\phi_n(\pi) = 0$  и уравнения (11.4.1), (11.4.4) показывают, что

$$K(\pi, \pi) + H_2 - H_1 = 0. \quad (11.4.5)$$

Следовательно,

$$\int_0^\pi \{K_x(\pi, y) + H_2K(\pi, y)\}\phi_n(y)dy = 0. \quad (11.4.6)$$

Однако  $\{\phi_n\}$  образуют полное ортогональное множество на  $(0, \pi)$ , а значит,

$$K_x(\pi, y) + H_2K(\pi, y) = 0. \quad (11.4.7)$$

Применяя те же рассуждения в случаях ii) и iv), получим:

$$K_x(\pi, y) + H'_2K(\pi, y) = 0 \quad (11.4.8)$$

а так как, по условию,  $H_2 \neq H'_2$ ,

$$K_x(\pi, y) = 0 = K(\pi, y). \quad (11.4.9)$$

Это справедливо для  $0 \leq y \leq \pi$  и, следовательно, верно также для  $-\pi \leq y \leq \pi$ . Однако в параграфе 11.3 мы показали, что если  $K(x, y)$  удовлетворяет этим условиям, то  $K(x, y) \equiv 0$  на  $0 \leq |y| \leq x \leq \pi$ . Теперь уравнение (11.2.7) дает  $p(x) = q(x)$ , уравнение (11.4.3) дает  $h_1 = h_2$ , уравнение (11.4.5) дает  $H_1 = H_2$  и уравнение (11.4.2) дает  $H'_1 = H'_2$ . ■

В этом доказательстве мы предполагали, что  $h_1, h_2, H_1, H_2, H'_1, H'_2$  все являются конечными, однако наши рассуждения легко продолжаются на случай, где некоторые из этих величин являются бесконечными.

Как мы отмечали в историческом обзоре, если известно, что  $q(x)$  симметричен относительно  $\frac{\pi}{2}$ , т. е.  $q(x) = q(\pi - x)$ , то  $q(x)$  однозначно определяется при помощи одного спектра, отвечающего симметричным

краевым условиям, т. е.  $h = H$ . Иначе, так как определяющее уравнение (11.1.1) и краевые условия

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + hy(\pi) \quad (11.4.10)$$

являются инвариантными при преобразовании  $x \rightarrow \pi - x$ , решения (11.1.1), удовлетворяющие (11.4.10), удовлетворяют также  $y(x) = \pm y(-x)$ . Так как наименьшая собственная функция  $y_0(x)$  может не иметь нулей на  $(0, \pi)$ , тогда четные собственные функции должны удовлетворять условию  $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ , тогда как нечетные собственные функции должны удовлетворять условию  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Последнее означает, что спектр  $(\lambda_n)_0^\infty$  разбивается на две части:  $(\lambda_{2n})_0^\infty$ , отвечающую

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\frac{\pi}{2}),$$

и  $(\lambda_{2n+1})_0^\infty$ , отвечающую

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y(\frac{\pi}{2}).$$

Поэтому мы имеем два спектра, которые единственным образом определяют  $q(x)$  на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ; из симметрии получаем  $q(x)$  на  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Другие теоремы единственности приводятся в работе МакЛафлин (1986) [228], МакЛафлин и Рундель (Rundell) (1987) [230].

Литература на тему единственности и существования решений обратных задач для различных видов уравнений (11.1.1)–(11.1.3) так велика, что возможно указать только некоторые из источников. Хольд (1984) [165] полезен как обзор ранних исследований. Другие исследования задач для непрерывного  $q(x)$  из (11.1.1) или  $A(x)$  в (11.1.3) включают следующие работы: Виллис (1985) [334], Кобаяши (Kobayashi) (1988) [197], Андерсен (1988a) [6], (1988b) [7], Колеман и Маклафлин (1993a) [62], (1993b) [63].

## 11.5. Интегральное уравнение Гельфанда–Левитана

Оператор преобразования, введенный в (11.2.5), преобразует решение  $\phi(x)$  уравнения (11.2.1), при одном краевом условии (11.2.2), в решение  $\psi(x)$  нового уравнения (11.2.3), при одном краевом условии (11.2.4). Однако, как и в параграфе 11.4, мы потребуем большего от



этого преобразования: будем требовать, что оно порождает полное ортонормированное множество (п. о. м.) собственных функций для нового уравнения (11.2.3), при краевых условиях в 0 и  $\pi$ .

Обозначим единственное решение для (11.2.1), (11.2.2), удовлетворяющее  $\phi(0) = \xi$ , через  $\phi(x, \lambda, \xi)$ . Собственная функция  $\phi_n(x)$  для (11.2.1) при краевых условиях

$$\phi'(0) - h\phi(0) = 0 = \phi'(\pi) + H\phi(\pi) \quad (11.5.1)$$

имеет вид

$$\phi_n(x) = \phi(x, \lambda_n, \phi_n(0)). \quad (11.5.2)$$

Построим новые ортонормированные собственные функции  $\psi(x)$  для (11.2.3), при краевых условиях

$$\psi'(0) - h'\psi(0) = 0 = \psi'(\pi) + H'\psi(\pi), \quad (11.5.3)$$

из уравнения (11.2.5). Обозначим новые собственные значения через  $(\mu_n)_0^\infty$  и запишем

$$\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, \psi_n(0)), \quad (11.5.4)$$

$$\psi_n(x) = \chi_n(x) + \int_0^x K(x, t)\chi_n(t)dt. \quad (11.5.5)$$

Заметим, что  $\chi_n(x)$  является решением уравнения (11.2.1), (11.2.2) для  $\lambda = \mu_n$ , тогда как  $\psi_n(x)$  является  $n$ -той ортонормированной собственной функцией для уравнения (11.2.3) при (11.5.3).

Собственные значения  $\{\phi_n\}_0^\infty$  основной задачи образуют п. о. м. на  $(0, \pi)$ . Это означает, что если  $g \in L^2(0, \pi)$ , то

$$\|g\|^2 \equiv \int_0^\pi [g(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^\infty a_n^2, \quad (11.5.6)$$

где

$$a_n = (g, \phi_n) = \int_0^\pi g(x)\phi_n(x)dx. \quad (11.5.7)$$

Откуда получаем, что если  $g, h \in L^2(0, \pi)$ , то

$$(g, h) = \int_0^\pi g(x)h(x)dx = \sum_{n=0}^\infty a_n b_n,$$

где  $b_n = (h, \phi_n)$ .

Собственные функции  $\{\psi_n\}_0^\infty$  образуют п. о. м. на  $(0, \pi)$ , откуда

$$\|g\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'^2, \quad (11.5.8)$$

где  $a_n' = (g, \psi_n)$ . Уравнение (11.5.5) показывает, что

$$\psi_n = \chi_n + K\chi_n, \quad (11.5.9)$$

где  $K$  является оператором, определенным посредством

$$Ku = \int_0^x K(x, t)u(t)dt. \quad (11.5.10)$$

Теперь

$$(Ku, v) = \int_0^\pi \left\{ \int_0^t K(t, x)u(x)dx \right\} v(t)dt,$$

и, меняя порядок интегрирования, получим, что

$$(Ku, v) = \int_0^\pi \left\{ \int_x^\pi K(t, x)v(t)dt \right\} u(x)dx.$$

Сопряженный оператор  $K^*$  определяется как

$$(Ku, v) = (u, K^*v),$$

так что

$$K^*v = \int_x^\pi K(t, x)v(t)dt. \quad (11.5.11)$$

Возвращаясь к уравнению (11.5.9), можем записать

$$a_n' = (g, \chi_n) + (g, K\chi_n),$$

а значит, уравнение

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

можно переписать в виде

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(g, \chi_n)^2 + 2(g, \chi_n)(g, K\chi_n) + (g, K\chi_n)^2 - (g, \phi_n)^2\}. \quad (11.5.12)$$

Рассмотрим  $K^*g = G$ , тогда, так как  $G \in L^2(0, \pi)$ , получим

$$(g, G) - \sum_{n=0}^{\infty} (g, \phi_n)(G, \phi_n) = 0,$$

это эквивалентно:

$$(Kg, g) - \sum_{n=0}^{\infty} (g, \phi_n)(g, K\phi_n) = 0. \quad (11.5.13)$$

Аналогично

$$(G, G) - \sum_{n=0}^{\infty} (G, \phi_n)^2 = 0$$

эквивалентно

$$(KK^*g, g) - \sum_{n=0}^{\infty} (g, K\phi_n)^2 = 0. \quad (11.5.14)$$

Теперь рассмотрим комбинированное уравнение (11.5.12) + 2 \* (11.5.13) + (11.5.14) и сгруппируем слагаемые, для того чтобы получить

$$0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (11.5.15)$$

где

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(g, \chi_n)^2 - (g, \phi_n)^2\},$$

$$S_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \{(g, \chi_n)(g, K\chi_n) - (g, \phi_n)(g, K\phi_n)\},$$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \{(g, K\chi_n)^2 - (g, K\phi_n)^2\},$$

$$S_4 = 2(g, Kg) + (g, KK^*g).$$

Для того чтобы представить эти произведения интегралов как кратные интегралы, будем использовать простое тождество

$$\int_0^{\pi} g(x) dx \int_0^{\pi} h(y) dy = \int_0^{\pi} \int_0^x g(x) h(y) dy dx + \int_0^{\pi} \int_0^y g(x) h(y) dx dy,$$

полученное путем разбиения квадрата  $(0, \pi) \times (0, \pi)$  на два треугольника. Получаем

$$S_1 = 2 \int_0^{\pi} \int_0^x g(x) g(y) F(x, y) dy dx,$$

$$S_2 = 2 \int_0^{\pi} \int_0^x g(x) g(y) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt dy dx + 2 \int_0^{\pi} \int_0^y g(x) g(y) \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt dx dy,$$

$$S_3 = 2 \int_0^{\pi} \int_0^y g(x) g(y) \int_0^x K(x, t) \left[ \int_0^y K(y, s) F(s, t) ds \right] dt dx dy,$$

$$S_4 = 2 \int_0^{\pi} \int_0^x g(x) g(y) K(x, y) dy dx + 2 \int_0^{\pi} \int_0^y \int_0^x K(x, t) K(y, t) dt dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \chi_n(x) \chi_n(y) - \phi_n(x) \phi_n(y) \}, \quad (11.5.16)$$

а значит, уравнение (11.5.15) дает

$$\int_0^{\pi} \int_0^x g(x) g(y) \left\{ J(x, y) + \int_0^y J(x, t) K(y, t) dt \right\} dy dx = 0, \quad (11.5.17)$$

где

$$J(x, y) = K(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt + F(x, y). \quad (11.5.18)$$

Так как  $g(x)$  является произвольной функцией на  $L^2(0, \pi)$ , уравнение (11.5.17) дает

$$J(x, y) + \int_0^y J(x, t)K(y, t)dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi. \quad (11.5.19)$$

Для фиксированного  $x$  это уравнение является однородным интегральным уравнением Вольтерра для  $J(x, y)$ , и аналогично параграфу 11.3 можно заключить, что его единственным решением является  $J(x, y) = 0$  для  $0 \leq y \leq x$ . Следовательно,

$$K(x, y) + \int_0^x K(x, t)F(t, y)dt + F(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi. \quad (11.5.20)$$

Это *интегральное уравнение Гельфанда–Левитана* для  $K(x, y)$ . Заметим, что для фиксированного  $x$  уравнение (11.5.19) является уравнением *Вольтерра* для  $J(x, y)$ ; с другой стороны, для фиксированного  $x$  уравнение (11.5.20) является уравнением *Фредгольма* для  $K(x, y)$ .

Существует один момент в этих рассуждениях, который необходимо проверить: это сходимость рядов в уравнении (11.5.16). Существуют два подхода к решению этого вопроса: исследование аналитической формы слагаемых в этих рядах и нахождение условий сходимости этих рядов; сделаем предположение, что эту проблему можно решить, заменяя бесконечные ряды на конечные. Мы будем придерживаться этого соглашения.

В начале этого параграфа мы рассмотрели основную задачу, уравнение (11.2.1) с краевыми условиями (11.5.1); п. о. м. собственных функций для этой задачи имеет вид  $\{\phi_n\}_0^\infty$ . Используем оператор  $K$  для того, чтобы построить новое п. о. м. собственных функций  $\{\psi_n\}_0^\infty$  для новой задачи. Ортонормированные собственные функции  $\psi_n$  были построены при помощи решений основного уравнения (11.2.1)  $\chi_n = \phi(x, \mu_n, \psi_n(0))$  при  $\lambda = \mu_n$  и при начальных условиях  $\chi_n(0) = \psi_n(0)$ ,  $\chi'_n(0) = h\psi_n(0)$ . Введем *условие усечения*

$$\mu_n = \lambda_n, \quad \psi_n(0) = \phi_n(0) \text{ для } n = N + 1, \dots$$

Это означает, что для  $n = N + 1, \dots$

$$\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, \psi_n(0)) = \phi(x, \lambda_n, \phi_n(0)) = \phi_n(x)$$

значит,

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^N \{\chi_n(x)\chi_n(y) - \phi_n(x)\phi_n(y)\}. \quad (11.5.21)$$

**Теорема 11.5.1.** Пусть  $F(x, y)$  удовлетворяет уравнению (11.5.21), и предположим, что  $K(x, y)$  является непрерывным по  $y$ ,  $0 \leq y \leq x \leq \pi$ , для каждого фиксированного  $x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Тогда существует не более одного решения уравнения (11.5.20).

**Доказательство.** Нам надо показать, что однородное интегральное уравнение Фредгольма

$$f(y) + \int_0^x F(t, y)f(t)dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x, \quad (11.5.22)$$

имеет только нулевое решение. Умножим (11.5.22) на  $f(y)$  и проинтегрируем от 0 до  $x$ , чтобы получить

$$\int_0^x [f(y)]^2 dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y)f(t)f(y)dt dy = 0. \quad (11.5.23)$$

Функция

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & 0 \leq y \leq x, \\ 0, & x < y \leq \pi, \end{cases}$$

принадлежит  $L^2(0, \pi)$ , значит

$$\int_0^x [f(y)]^2 dy = \int_0^\pi [g(y)]^2 dy = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^2,$$

где

$$a_m = \int_0^\pi g(y)\phi_m(y)dy = \int_0^x f(y)\phi_m(y)dy.$$

С другой стороны,

$$\int_0^x \int_0^x F(t, y)f(t)f(y)dt dy = \sum_{m=0}^N (b_m^2 - a_m^2) = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^2 - a_m^2),$$

где

$$b_m = \int_0^x f(y)\chi_m(y)dy = \int_0^\pi g(y)\chi_m(y)dy,$$

и мы воспользовались равенством  $\chi_m(y) = \phi_m(y)$  при  $m > N$  для получения  $b_m = a_m$  при  $m > N$ . Согласно уравнению (11.5.23) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_m^2 = 0,$$

т. е.

$$b_m = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Покажем, что отсюда следует  $g(y) = 0$ . Это эквивалентно тому, что  $b_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , дает  $a_m = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Имеем

$$b_m = (g, \chi_m) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}a_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.5.24)$$

где  $c_{mn} = (\chi_m, \phi_n)$ . Если  $m > N$ , то  $\chi_m = \phi_m$  и  $c_{mn} = \delta_{mn}$ , откуда  $b_m = 0$  дает  $a_m = 0$ . Следовательно, суммирование в (11.5.24) рассматривается по  $n = 0, 1, \dots, N$ , получаем  $N + 1$  уравнений

$$0 = \sum_{n=0}^N c_{mn}a_n, \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

Если существует пара  $m', n'$  такая, что  $\chi_{m'} = \phi_{n'}$ , то уравнение (11.5.24) при  $m = m'$  дает  $a_{n'} = 0$ , откуда при  $m \neq m'$  слагаемое, для которого  $n = n'$ , можно опустить. Это означает, что нам нужно рассмотреть только те  $m, n$ , для которых  $\chi_m \neq \phi_n$ . Перенумеруем эти  $0, 1, \dots, N'$ . Нам необходимо показать, что эти  $N' + 1$  уравнений имеют только тривиальное решение, т. е. определитель их коэффициентов ненулевой.

Уравнения

$$\chi_m'' + (\mu_m - p)\chi_m = 0 = \phi_n'' + (\lambda_n - p)\phi_n$$

дают

$$(\lambda_n - \mu_m)\chi_m\phi_n = \chi_m''\phi_n - \chi_m\phi_n'',$$

откуда

$$(\lambda_n - \mu_m)c_{mn} = [\chi_m'\phi_n - \chi_m\phi_n']_0^\pi.$$

Так как  $\chi_m$  и  $\phi_n$  удовлетворяют тем же условиям при  $x = 0$ , получим

$$(\lambda_n - \mu_m)c_{mn} = d_m e_n, \quad (11.5.25)$$

где

$$d_m = \chi'_m(\pi) + H\chi_m(\pi), \quad e_n = \phi_n(\pi).$$

Оба  $d_m, e_n$  являются ненулевыми, а следовательно, определитель коэффициентов равен

$$\det(C) = \prod_{n=1}^{N'} d_n e_n \det(1/(\lambda_n - \mu_m)),$$

и, как легко показать (упр. 11.5.1), он является ненулевым, когда  $\lambda_n - \mu_m \neq 0$ , для всех  $m, n$ . ■

Мы доказали, что при условии усечения (Truncation Assumption) (ТА) интегральное уравнение Гельфанда–Левитана имеет не более одного решения. На самом деле оно является *вырожденным* интегральным уравнением с решением вида

$$K(x, y) = \sum_{m=0}^N \{F_m(x)\chi_m(y) - G_m(x)\phi_m(y)\}. \quad (11.5.26)$$

Подставляя (11.5.26) в (11.5.20) и приравнивая кратные  $\chi_m(y), \phi_m(y)$  к нулю, получим

$$F_m(x) + \sum_{n=0}^N \{b_{mn}(x)F_n(x) - c_{mn}(x)G_n(x)\} + \chi_m(x) = 0, \quad (11.5.27)$$

$$G_m(x) + \sum_{n=0}^N \{c_{nm}(x)F_n(x) - d_{nm}(x)G_n(x)\} + \phi_m(x) = 0 \quad (11.5.28)$$



для  $m = 0, 1, \dots, N$ , где

$$b_{mn}(x) = b_{nm}(x) = \int_0^x \chi_m(t)\chi_n(t)dt,$$

$$c_{mn}(x) = \int_0^x \chi_m(t)\phi_n(t)dt,$$

$$d_{mn}(x) = d_{nm}(x) = \int_0^x \phi_m(t)\phi_n(t)dt.$$

Мы можем проверить, (упр. 11.5.2), что эти уравнения имеют единственное решение, как утверждалось в теореме 11.5.1.

Когда мы ввели оператор преобразования  $K$  в параграфе 11.2, мы показали, что  $K(x, y)$  должно удовлетворять гиперболическому дифференциальному уравнению (11.2.6). В этом параграфе мы показали, что  $K(x, y)$  должно удовлетворять интегральному уравнению (11.5.20). Чтобы связать эти два уравнения, мы заметим (упр. 11.5.3), что  $F(x, y)$  из (11.5.21) удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$F_{xx}(x, y) - F_{yy}(x, y) + (p(y) - p(x))F(x, y) = 0. \quad (11.5.29)$$

Несложно установить (упр. 11.5.4), что если  $K$  удовлетворяет (11.5.20), то оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (11.2.6), где  $q(x)$  дается условием (11.2.7).

### Упражнения 11.5

- 1) Покажите, что если  $\mu_m \neq \lambda_n$  для всех  $m, n = 0, 1, \dots, N$ , то матрица  $C = (c_{mn}) = (1/(\mu_m - \lambda_n))$  является вырожденной.
- 2) Покажите, что уравнения (11.5.27), (11.5.28) обладают единственным решением. Подсказка: рассмотрите однородные уравнения, где опущены  $\chi_m(x), \phi_m(x)$ ; умножьте первое на  $F_m(x)$ , второе на  $G_m(x)$  и сложите эти уравнения при  $m = 0, 1, \dots, N$ .
- 3) Покажите, что если  $F(x, y)$  удовлетворяет (11.5.21), то оно удовлетворяет уравнению (11.5.29).

4) Покажите, что если  $K(x, y)$  удовлетворяет уравнению (11.5.20), то

$$L(x, y) + \int_0^x L(x, t)F(t, y)dt + [K(x, 0)F_x(0, y) - K_y(x, 0)F(0, y)] = 0,$$

где

$$L(x, y) \equiv K_{xx}(x, y) - K_{yy}(x, y) + (p(y) - q(x))K(x, y)$$

и  $q(x)$  связано с  $p(x)$  уравнением (11.2.7). Покажите, что слагаемое в квадратных скобках равно нулю, а значит, по теореме 11.5.1,  $L(x, y) = 0$  для  $0 \leq y \leq x \leq \pi$ ; это уравнение (11.2.6).

5) Покажите, что решения уравнений (11.5.26), (11.5.27) могут быть записаны в виде

$$F_n(x) = -\{\chi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\chi_n(y)dy\} = -\psi_n(x),$$

$$G_n(x) = -\{\phi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\phi_n(y)dy\}.$$

## 11.6. Восстановление системы Штурма–Лиувилля

Сперва мы повторим факты, доказанные в настоящей главе к этому моменту. Мы уже установили, что, стартуя с одной  $S - L$ -системы

$$y''(x) + (\lambda - p(x))y(x) = 0, \quad (11.6.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi), \quad (11.6.2)$$

имеющей собственные значения  $(\lambda_n)_0^\infty$  и п. о. с. собственных функций  $(\phi_n)_0^\infty$ , мы можем, введя оператор  $K$ , построить новую  $S - L$ -систему

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0, \quad (11.6.3)$$

$$y'(0) - h'y(0) = 0 = y'(\pi) + H'y(\pi) \quad (11.6.4)$$

с собственными значениями  $(\mu_n)_0^\infty$  и п. о. с. собственных функций  $(\psi_n)_0^\infty$ , заданных уравнением (11.2.5). Для нахождения новой системы нам необходимы  $(\mu_n)_0^\infty$  и краевые значения  $(\psi_n(0))_0^\infty$  собственных функций  $\psi_n(x)$ , которые нам предстоит еще найти.

Мы их можем найти, как и в секции 10.8, из двух спектров уравнения (11.6.3),  $(\mu_n)_0^\infty$ , отвечающий крайевым условиям (11.6.4), и  $(\nu_n)_0^\infty$  отвечающий

$$y'(0) - h'_1 y(0) = 0 = y'(\pi) + H'y(\pi).$$

Заменяя уравнение (10.8.12) на систему счисления  $S$ , получим, что  $(\nu_n)_0^\infty$  являются корнями

$$1 = (h'_1 - h') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^2(0)}{\lambda - \mu_n}. \quad (11.6.5)$$

Условие усечения позволяет нам написать это уравнение в виде:

$$1 = (h'_1 - h') \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2(0)}{\lambda - \mu_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(0)}{\lambda - \lambda_n} \right\}. \quad (11.6.6)$$

Это дает  $N + 1$  уравнений

$$1 = (h'_1 - h') \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2(0)}{\nu_m - \mu_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(0)}{\nu_m - \lambda_n} \right\}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (11.6.7)$$

на  $N + 1$  величин  $\{\psi_n(0)\}_0^N$ . Как в упр. 11.5.1, определитель матрицы коэффициентов не является нулевым. Для проверки того, что  $\psi_n^2(0)$  являются на самом деле положительными, мы запишем (11.6.6) в виде

$$1 - (h'_1 - h') \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2(0)}{\lambda - \mu_n} - f(\lambda) \right\} = \prod_{m=0}^N \left( \frac{\lambda - \nu_m}{\lambda - \mu_m} \right) g(\lambda), \quad (11.6.8)$$

где для определенности, мы рассматриваем  $h'_1 > h'$ . Функции  $f(\lambda), g(\lambda)$  являются положительными для  $0 < \lambda < \nu_m$ , и  $\mu_n, \nu_n$  чередуются согласно следующему правилу:

$$\mu_0 < \nu_0 < \mu_1 < \dots \quad (11.6.9)$$

Домножая (11.6.8) на  $(\lambda - \mu_n)$  и выбирая  $\lambda = \mu_n$ , мы найдем

$$(h'_1 - h') \psi_n^2(0) = (\nu_n - \mu_n) \prod_{m=0}^N \left( \frac{\mu_n - \nu_m}{\mu_n - \mu_m} \right) g(\mu_n), \quad (11.6.10)$$

а значит, в силу чередования, получаем  $\psi_n^2(0) > 0$ .

Рассмотрение произвольного значения  $h'_1$  имеет тот недостаток, что  $\psi_n^2(0)$  зависит от  $h'_1$  и  $h'$ .  $h'_1 = \infty$ , тогда уравнение (11.6.6) принимает более простой вид

$$\sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2(0)}{\lambda - \mu_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(0)}{\lambda - \lambda_n} = 0. \quad (11.6.11)$$

Откуда получаем

$$\sum_{n=0}^N \frac{\psi_n^2(0)}{\nu_m - \mu_n} = f(\nu_m), \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (11.6.12)$$

для  $\psi_n^2(0)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Теперь мы готовы перейти к вопросу восстановления. Нам надо найти  $q(x)$ ,  $h'$ ,  $H'$  такие, что первые  $N + 1$  собственных значений для (11.6.3), (11.6.4) являются выбранными  $(\mu_n)_0^N$  и первые  $N + 1$  краевых значений для отнормированных собственных функций равны  $(\psi_n(0))_0^N$ . Прделаем следующие шаги.

**Шаг 1.** Выберем основную систему (11.6.1), (11.6.2) и найдем  $\{\phi_n(x)\}_0^N$ ,  $\{\chi_n(x)\}_0^N$  при условиях (11.5.2), (11.5.4) соответственно. При условии чередования значения  $\mu_{N+1}, \mu_{N+2}, \dots$ , которые не являются частью данных, выберем равными  $\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots$  соответственно. Следовательно, мы можем выбрать основную систему так, что  $\mu_N < \lambda_{N+1}$ . Простейший способ выбрать основную систему это взять  $p(x) = 0$  и каждый из  $h, H$  равным нулю или  $\infty$ . Если, например,  $h = 0$ ,  $H = \infty$ , то (11.6.1), (11.6.2) редуцируются к виду

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (11.6.13)$$

$$y'(0) = 0 = y(\pi) \quad (11.6.14)$$

и

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (11.6.15)$$

$$\chi_n = \psi_n(0) \cos \omega_n x, \quad \mu_n = \omega_n^2. \quad (11.6.16)$$

Следовательно, выбор основной системы будет подходящим, если  $\mu_N < \left(N + \frac{3}{2}\right)^2$ , т. е.  $\omega_N < \left(N + \frac{3}{2}\right)$ . Так как  $\mu_n$  — собственные

значения некоторой  $S - L$ -системы, они должны иметь асимптотический вид из параграфа 10.9. В зависимости от краевых условий, они должны иметь вид (10.9.20), (10.9.39) или (10.9.41); в любом из этих случаев  $\omega_N < \left(N + \frac{3}{2}\right)$  для достаточно большого  $N$ . Конечно, если  $\omega_n$  имеет вид (10.9.41), то будет правильнее взять  $h = \infty$ ,  $H = \infty$ , так что  $h' = \infty$ .

**Шаг 2.** Рассмотрим  $F(x, y)$ , задаваемую формулой (11.5.21), и решим уравнения (11.5.27), (11.5.28) для  $\{F_n(x), G_n(x)\}_0^N$ .

**Шаг 3.** Рассмотрим  $K(x, y)$  из уравнения (11.5.26).

**Шаг 4.** Рассмотрим  $q(x)$  из уравнения (11.2.7).

**Шаг 5.** Рассмотрим  $h'$  из уравнения (11.2.11).

**Шаг 6.** Найдем  $H'$ .

Для осуществления последнего шага будем действовать следующим образом. Так как  $d_{mn}(\pi) = \delta_{mn}$ , уравнение (11.5.28) дает

$$\sum_{n=0}^N c_{nm} F_n(\pi) + \phi_m(\pi) = 0,$$

где, как и в (11.5.23),  $c_{nm} = c_{nm}(\pi)$ . Дифференцируя (11.5.28) по  $x$  и рассматривая  $x = \pi$ , найдем

$$\sum_{n=0}^N c_{nm} F'_n(\pi) + \phi'_m(\pi) + \phi_m(\pi) K(\pi, \pi) = 0.$$

Теперь воспользуемся упр. 11.5.5, которое показывает, что  $F_n(\pi) = -\psi_n(\pi)$ , и тем фактом, что  $\phi'_m(\pi) + H\phi_m(\pi) = 0$ , чтобы получить

$$\sum_{n=0}^N c_{nm} \{\psi'_m(\pi) + (H - K(\pi, \pi))\psi_n(\pi)\} = 0.$$

Однако  $\det(C) \neq 0$ , значит,

$$\psi'_m(\pi) + (H - K(\pi, \pi))\psi_n(\pi) = 0. \quad (11.6.17)$$

Это означает, что

$$H' = H - K(\pi, \pi). \quad (11.6.18)$$

Не считая условия усечения, рассмотрения этой главы к данному моменту состоят в применении классического обращения Гельфанда–Левитана для уравнения Штурма–Лиувилля. В то время как этот метод имеет огромное теоретическое значение, он не является практическим; камнем преткновения является шаг 2, т. е. решение уравнений для  $F_n(x)$ ,  $G_n(x)$ , и последующие шаги 3, 4, которые дают  $q(x)$  при дифференцировании  $K(x, y)$ .

В параграфе 11.9 мы описываем другие методы, которые используют уравнения в частных производных для  $K(x, x)$ .

### Упражнения 11.6

1) Покажите, что уравнения (11.2.12), (11.6.18) дают

$$c' \equiv \frac{1}{\pi} \left( h' + H' + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right) = c \equiv \frac{1}{\pi} \left( h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi p(t) dt \right).$$

Так как мы взяли  $\mu_n = \lambda_n$  для  $n = N+1, \dots$ , это уравнение должно быть справедливо; см. асимптотический вид для (10.9.22).

## 11.7. Обратная задача для колеблющегося стержня

Метод обращения, который нам пока удалось описать, относится к уравнению Штурма–Лиувилля (11.2.1). Как мы уже отмечали, оно не является основным уравнением для колебательных систем. В этой секции, рискуя повториться, мы показываем, как идеи, на которых основано  $S-L$ -обращение, могут быть адаптированы к работе с уравнением для стержня (11.1.3).

Начнем с основной задачи

$$(A(x)u'(x))' + \lambda A(x)u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.7.1)$$

запишем  $A(x) = a^2(x)$  и домножим независимую переменную  $x$  так, что  $0 \leq x \leq \pi$ . Собственные функции  $u_n(x)$  для (11.7.1) при краевых условиях, которые нам еще предстоит описать, являются ортонормированными, с весовой функцией  $a^2(x)$ , т. е.

$$\int_0^\pi a^2(x) u_m(x) u_n(x) dx = \delta_{mn},$$

а значит, функции

$$\phi_n(x) = a(x)u_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (11.7.2)$$

образуют п. о. с. При условии, что  $a(x) \in C^2(0, \pi)$ , функция  $\phi(x) = a(x)u(x)$  удовлетворяет

$$\phi'' + (\lambda - p)\phi = 0, \quad (11.7.3)$$

где

$$p(x) = a''(x)/a(x). \quad (11.7.4)$$

Предположим, что краевое условие при  $x = 0$  имеет вид

$$\phi'(0) - h\phi(0) = 0, \quad (11.7.5)$$

тогда соответствующее краевое условие для  $u(x)$  имеет вид

$$a(0)u'(0) + (a'(0) - ha(0))u(0) = 0.$$

Без ограничения общности мы можем выбрать основную систему так, что

$$a(0) = 1, \quad a'(0) - ha(0) = 0. \quad (11.7.6)$$

Это означает, что  $a(x)$  является решением (11.7.3) при  $\lambda = 0$ , которое удовлетворяет краевому условию (11.7.5) и условию  $\phi(0) = 1$ , а основной стержень является свободным при  $x = 0$ .

Стержень, который мы собираемся построить, описывается уравнением

$$(B(x)v'(x))' + \lambda B(x)v(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (11.7.7)$$

Запишем  $B(x) = b^2(x)$ ,  $\psi(x) = b(x)v(x)$ , тогда

$$\psi'' + (\lambda - q)\psi = 0, \quad (11.7.8)$$

где

$$q(x) = b''(x)/b(x). \quad (11.7.9)$$

Будем использовать оператор  $K$ , чтобы привязать  $\psi$  к  $\phi$ :

$$\psi(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t)\phi(t)dt, \quad (11.7.10)$$

т. е.

$$b(x)v(x) = a(x)u(x) + \int_0^x K(x, t)a(t)u(t)dt. \quad (11.7.11)$$

Как мы знаем из параграфа 11.2, этот оператор преобразует решения (11.7.3), удовлетворяющие  $\phi(0) = 1$ , и (11.7.5) в решения (11.7.8), удовлетворяющие  $\psi(0) = 1$  и

$$\psi'(0) - (h + K(0, 0))\psi(0) = 0. \quad (11.7.12)$$

Последнее эквивалентно условию

$$b(0)v'(0) + \{b'(0) - (h + K(0, 0)b(0))\}v(0) = 0. \quad (11.7.13)$$

Если выбрать новую систему таким образом, что

$$b(0) = 1, \quad b'(0) - (h + K(0, 0)b(0)) = 0, \quad (11.7.14)$$

то  $v'(0) = 0$ : новый стержень является незакрепленным при  $x = 0$ . В этом случае  $b(x)$  является решением (11.7.8) при  $\lambda = 0$ , удовлетворяющим условиям (11.7.14). Следовательно,  $b(x)$  связан с  $a(x)$  посредством уравнения (11.7.10):

$$b(x) = a(x) + \int_0^x K(x, t)a(t)dt. \quad (11.7.15)$$

В частности, если мы выберем  $h = 0$ ,  $a(x) = 1$ , то

$$b(x) = 1 + \int_0^x K(x, t)dt. \quad (11.7.16)$$

Остальные рассуждения повторяют предыдущие:  $K(x, y)$  удовлетворяет

$$K(x, y) + \int_0^x K(x, t)F(t, y)dt + F(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq x, \quad (11.7.17)$$

где

$$F(x, y) = a(x)a(y) \sum_{n=0}^N (w_n(x)w_n(y) - u_n(x)u_n(y)). \quad (11.7.18)$$

Здесь  $\chi_n(x) = a(x)w_n(x)$  является решением (11.7.3) при  $\lambda = \mu_n$ , удовлетворяющим  $\chi_n(0) = \psi_n(0)$ ,  $\chi'_n(0) = h\chi_n(0)$ . Это означает, что  $w_n(0) = v_n(0)$ ,  $w'_n(0) = 0$ . Здесь  $(\mu_n)_0^N$  являются собственными значениями новой системы и  $v_n(0)$  — конечное значение соответствующей



отнормированной собственной функции  $v_n(x)$ , а  $u_n(x)$  является отнормированной собственной функцией для (11.7.1).

Снова, мы должны выбрать основную систему так, что  $\mu_N < \lambda_{N+1}$ . Если сделать выбор  $a(x) = 1, h = 0, H = \infty$ , тогда это будет означать, что  $\sqrt{\mu_N} = \omega_N < (N + \frac{3}{2})$ .

Решение уравнения (11.7.17) имеет вид

$$K(x, y) = a(x)a(y) \sum_{n=0}^N \{F_n(x)w_n(y) - G_n(x)u_n(y)\},$$

где  $F_n(x), G_n(x)$  удовлетворяют уравнению

$$F_m(x) + \sum_{n=0}^N \{b_{mn}(x)F_n(x) - c_{mn}(x)G_n(x)\} + w_m(x) = 0, \quad (11.7.19)$$

$$G_m(x) + \sum_{n=0}^N \{c_{nm}(x)F_n(x) - d_{mn}(x)G_n(x)\} + u_m(x) = 0 \quad (11.7.20)$$

и

$$b_{mn}(x) = \int_0^x a^2(t)w_m(t)w_n(t)dt, \quad c_{mn}(x) = \int_0^x a^2(t)w_m(t)u_n(t)dt,$$

$$d_{mn}(x) = \int_0^x a^2(t)u_m(t)u_n(t)dt.$$

Заметим, что  $d_{mn}(\pi) = \delta_{mn}$ .

Важно отметить, что  $b(x)$ , порожденная в методе построения, всегда будет положительной. Мы покажем это, предположив, что  $b(x_0) = 0$  для некоторого  $x_0 \in [0, \pi]$ , и придя к противоречию. По аналогии с упр. 11.5.5 получим

$$a(x)F_n(x) = -\{\chi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\chi_n(y)\}, \quad (11.7.21)$$

$$a(x)G_n(x) = -\{\phi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\phi_n(y)\}, \quad (11.7.22)$$

где  $\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, c_1)$ ,  $\phi_n(x) = \phi(x, \lambda_n, c_2)$  и  $\phi(x, \lambda, c)$  обозначает решение для (11.7.3) при  $\phi(0) = c$ , удовлетворяющее (11.7.5). Однако,

если  $\chi_n, \phi_n$  являются решениями (11.7.3), то  $a(x)F_n(x), a(x)G_n(x)$  из (11.7.21), (11.7.22), являются решениями (11.7.8). Следовательно,

$$\begin{aligned} a(x)F_n(x) &= -b(x)v(x, \mu_n, c_1) \\ a(x)G_n(x) &= -b(x)v(x, \lambda_n, c_2), \end{aligned}$$

где  $v(x, \lambda, c)$  обозначает решение (11.7.7), удовлетворяющее условиям  $v(0) = c, v'(0) = 0$ . Заметим, что  $v(x, \mu_n, c_1)$  является неотнормированной собственной функцией новой системы. Это означает, что если  $b(x_0) = 0$ , то  $F_n(x_0) = 0 = G_n(x_0)$  для  $n = 0, 1, \dots, N$ , и, следовательно, из уравнений (11.7.19), (11.7.20)  $w_n(x_0) = 0 = u_n(x_0)$  для  $n = 0, 1, \dots, N$ . Однако  $u_n(x)$  является  $n$ -й собственной функцией для основной системы, и, когда  $n = 0$ ,  $u_0(x)$  не имеет нулей на отрезке  $[0, \pi]$ , исключая, возможно, случай  $x = \pi$ , где  $H = \infty$ . Следовательно, единственной возможностью является  $x_0 = \pi, H = \infty$ , и, значит  $w_n(\pi) = 0, n = 0, 1, \dots, N$ , также. Это означает, что  $(\mu_n)_0^N$  являются собственными значениями основной задачи и  $\mu_n = \lambda_n, n = 0, 1, \dots, N$ . Полученное противоречие дает  $b(x_0) \neq 0$ . Так как  $b(0) = 1$  и  $b(x)$  является непрерывной функцией, получим  $b(x) > 0$  для  $x \in [0, \pi]$ .

Завершая этот параграф, мы переходим к крайевым условиям. Основная задача, в форме  $S - L$  (11.7.3), имеет крайевые условия

$$\phi'(0) - h\phi(0) = 0 = \phi'(\pi) + H\phi(\pi).$$

В терминах  $u$  получаем

$$u'(0) = 0 = a(\pi)u'(\pi) + (a'(\pi) + Ha(\pi))u(\pi),$$

где рассматривается  $a'(0) = ha(0)$ . Краевые условия вида  $S - L$  для новой задачи имеют вид:

$$\psi'(0) - h'\psi(0) = 0 = \psi'(\pi) + H'\psi(\pi).$$

В терминах  $v$  получим

$$v'(0) = 0 = b(\pi)v'(\pi) + (b'(\pi) + (H - K(\pi, \pi))b(\pi))v(\pi),$$

где (11.6.18) дает  $H' = H - K(\pi, \pi)$ .

Заметим, что в то время как выбор условий (11.7.6), (11.7.14) для  $a(x), b(x)$  делает рассуждения простыми, нам необязательно фиксировать такой выбор. Снова, если мы знаем собственные значения для нового стержня для конца  $x = 0$ , свободного и фиксированного, то мы

можем найти  $(v_n(0))_0^N$ , как и в параграфе 11.6. Примеры восстановления могут быть найдены в работе Глэдвелла и Додса (Dods) (1987) [111]. См. также работы Андерсена (1988a) [6], (1988b) [7] для детального исследования обратной задачи для уравнения (11.7.1), см. работу Кнобеля (Кнобел) и Лове (1993) [195]. Касательно случая, где  $A(x)$  является грубой, см. статью Колемана (1989) [61], Колеман и МакЛафлин (1993a) [62], (1993b) [63].

## 11.8. Обратная задача для натянутой струны

В параграфе 10.1 мы показали, что три формы уравнения Штурма–Лиувилля, (10.1.1), (10.1.3) и (10.1.11), тесно связаны. Работая с натянутой струной, легче начать рассмотрение для уравнения (10.1.3) для стержня, нежели со стандартного вида (10.1.11). Мы повторим часть рассуждений в параграфе 10.1 и сделаем несколько изменений для того, чтобы нормализовать переменные.

Пусть  $u(x)$  удовлетворяет уравнению (11.7.1), т. е.

$$(A(x)u'(x))' + \lambda A(x)u(x) = 0 \quad (11.8.1)$$

и краевым условиям

$$u'(0) - hu(0) = 0 = u'(\pi) + Hu(\pi).$$

Домножим  $A(x)$  так, что

$$\int_0^\pi \frac{dt}{A(t)} = \pi$$

и введем новую переменную  $\xi$  при помощи уравнения

$$\xi = \int_0^x \frac{dt}{A(t)},$$

так что  $0 \leq \xi \leq \pi$  и  $\xi'(x) = 1/A(x)$ . Возьмем

$$u(x) = y(\xi), \quad A(x) = \rho(\xi),$$

тогда  $A(x)u'(x) = \dot{y}(\xi)$  и уравнение (11.8.1) принимает вид

$$\ddot{y}(\xi) + \lambda \rho^2(\xi)y(\xi) = 0.$$

Краевые условия принимают вид

$$\dot{y}(0) - hA(0)y(0) = 0 = \dot{y}(\pi) + HA(\pi)y(\pi).$$

Заметим, что новые пружинные константы являются скалярными кратными  $hA(0)$ ,  $HA(\pi)$  старых констант, однако краевые условия

$$u'(0) = 0 = u(\pi), \quad u(0) = 0 = u(\pi) \quad (11.8.2)$$

остаются инвариантными:

$$\dot{y}(0) = 0 = y(\pi), \quad y(0) = 0 = y(\pi). \quad (11.8.3)$$

Это означает, что при каждом из этих двух множеств краевых условий струна имеет те же собственные значения, что и стержень, и, в частности, асимптотический вид собственных значений не изменяется.

Следовательно, если нам даны две последовательности собственных значений  $(\mu_n)_0^\infty$ ,  $(\nu_n)_0^\infty$ , которые, по сути, являются собственными значениями натянутой струны при двух различных множествах краевых условий (11.8.2), мы должны сперва домножить их, чтобы эффективно найти длину  $L$  для струны, которой они соответствуют, так что они соответствуют струне длины  $\pi$ . Они, следовательно, будут иметь асимптотическую форму

$$\mu_n = [(n + \frac{1}{2})\pi]^2 + \alpha_n, \quad \nu_n = [(n + 1)\pi]^2 + \beta_n.$$

Для заданных  $(\mu_n)_0^\infty$ ,  $(\nu_n)_0^\infty$  мы найдем краевые значения  $y_n(0)$  нормированных собственных функций в силу того, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n^2(0)}{\lambda - \mu_n} = 0$$

имеет корни  $(\nu_n)_0^\infty$ . Мы будем использовать эту усеченную форму, как и в параграфе 11.6, для нахождения  $(y_n(0))_0^N$ . Заметим, что

$$\int_0^\pi \rho^2(\xi) y_n^2(\xi) d\xi = \int_0^\pi A(x) w_n^2(x) dx = 1$$

и  $y_n(0) = w_n(0)$ . Это означает, что у нас есть данные, необходимые для нахождения нового стержня  $B(x)$ , как и в (11.7.7).

Теперь мы обратим рассуждения, приведенные во введении к этой секции. Следовательно, мы домножим  $B(x)$  так, что

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{B(t)} = \pi,$$

а затем *введем* новую переменную  $\xi$  следующим образом:

$$\xi = \int_0^{\pi} \frac{dt}{B(t)}, \quad 0 \leq \xi \leq \pi.$$

Новая массовая плотность струны равна

$$\rho(\xi) = B(x).$$

## 11.9. Некоторые неклассические методы

В этом параграфе мы опишем с общих позиций теорию, на которой базируются аппроксимационные методы обращения для уравнения Штурма–Лиувилля. Эта теория в основном принадлежит Рунделю (Rundell) и Саксу (Sacks) (1992a) [292], (1992b) [293]; см. также Лове, Пилант и Рундель (1992) [216] и работу Рунделя (1997) [294]. Основная отличительная черта этих методов состоит в том, что они базируются более на гиперболическом уравнении, которому удовлетворяет  $K(x, y)$ , чем на интегральном уравнении Гельфанда–Левитана.

Мы напомним наши рассуждения из параграфа 11.2. Основная задача имеет вид

$$y'' + (\lambda - p)y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (11.9.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(\pi) + Hy(\pi). \quad (11.9.2)$$

Собственные функции  $(\phi_n)_0^\infty$  для этой задачи образуют п. о. с. Это означает, что если

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x),$$

то

$$a_n = (f, \phi_n).$$

Пусть  $(\mu_n)_0^\infty$  является новым спектром, и в обозначениях (11.5.4)

$$\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, 1).$$

Если мы разложим  $f(x)$  по этим функциям:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N b_n \chi_n(x),$$

тогда мы можем найти  $b_n$  из

$$a_m = (f, \phi_m) = \sum_{n=0}^N b_n (\chi_n, \phi_m) = \sum_{n=0}^N c_{nm} b_n, \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (11.9.3)$$

Мы показали в уравнении (11.5.25), что

$$(\lambda_m - \mu_n) c_{nm} = (\chi_n'(\pi) + H\chi_n(\pi)) \phi_m(\pi).$$

Конечное значение,  $\phi_m(\pi)$ , не является нулевым; мы предполагаем, что  $H$  является конечным. Как и в параграфе 11.5, если  $\chi_{n'}'(\pi) + H\chi_{n'}(\pi) = 0$ , для некоторого  $n'$ , то  $\mu_{n'}$  является собственным значением для основной системы, где  $\chi_{n'}(x)$  является (не обязательно отнормированной) собственной функцией; т. е.  $\chi_{n'}(x) = c\phi_{m'}(x)$ . В этом случае уравнение (11.9.3) при  $m = m'$  дает  $a_{m'} = b_{n'}$  и существует только  $N - 1$  уравнений для оставшихся  $b_n$ . В любом случае мы можем решить уравнение (11.9.3) для  $b_0, b_1, \dots, b_N$ . Это первый результат, который мы будем использовать.

В классическом методе мы предполагаем для начала, что имеется два спектра  $S - L$ -уравнений с (неизвестным) потенциалом  $q(x)$ , отвечающим двум множествам конечных условий

$$\begin{aligned} (\mu_n)_0^\infty \text{ для } y'(0) - h'y(0) = 0 = y'(\pi) + H'y(\pi) \\ (\nu_n)_0^\infty \text{ для } y'(0) - h_1'y(0) = 0 = y'(\pi) + H'y(\pi). \end{aligned} \quad (11.9.4)$$

Заметим, что условия при  $x = \pi$  совпадают, тогда как эти условия при  $x = 0$  различны. Мы тогда использовали уравнение (11.6.6) или предпочтительно, (11.6.11) для нахождения конечных условий  $(\psi_n(0))_0^\infty$ , отвечающих (11.9.4). (Конечно, мы ввели условие усечения так, чтобы нам нужно было получить только  $(\psi_n(0))_0^N$ .) Затем мы ввели оператор  $K$  и нашли  $K(x, y)$  так, что отнормированные собственные функции

$(\psi_n(x))_0^\infty$ , отвечающие (11.9.4), задавались уравнениями

$$\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, \psi_n(0)),$$

$$\psi_n(x) = \chi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\chi_n(y)dy.$$

Конкретное  $K(x, y)$ , которое преобразует  $(\chi_n(x))_0^\infty$  в п. о. с.  $(\psi_n(x))_0^\infty$ , является решением интегрального уравнения Гельфанда-Левитана (11.5.20). Потенциал  $q(x)$  задается равенством

$$q(x) = p(x) + \frac{2dK(x, x)}{dx},$$

значения  $h', H'$  даются равенствами (11.2.11) и (11.6.18):

$$h' = h + K(0, 0), \quad H' = H - K(\pi, \pi).$$

Рундель и Сакс действовали иначе. Они предположили, что у нас имеются два спектра  $(\mu_n)_0^N, (\nu_n)_0^N$ , отвечающие  $S - L$ -уравнению

$$y'' + (\lambda - q)y = 0 \quad (11.9.5)$$

при двух множествах конечных условий, которые отличаются при  $x = \pi$  (а не в 0, как в классическом методе):

$$(\mu_n)_0^N \text{ для } y'(0) - h'y(0) = 0 = y'(\pi) + H'_1 y(\pi), \quad (11.9.6)$$

$$(\nu_n)_0^N \text{ для } y'(0) - h'y(0) = 0 = y'(\pi) + H'_2 y(\pi). \quad (11.9.7)$$

Теперь мы найдем  $K(x, y)$  так, что

$$\chi_n(x) = \phi(x, \mu_n, 1),$$

$$\psi_n(x) = \chi_n(x) + \int_0^x K(x, y)\chi_n(y)dy$$

дает (неотнормированные) собственные функции для (11.9.5), отвечающие крайевым условиям (11.9.6), тогда как

$$\theta_n(x) = \phi(x, \nu_n, 1),$$

$$\tau_n(x) = \theta_n(x) + \int_0^x K(x, y)\theta_n(y)dy$$

дает (неотнормированные) собственные функции для (11.9.5), отвечающие граничным условиям (11.9.7). Заметим, что  $K(x, y)$  ищется с использованием теории, введенной в параграфе 11.2, а не в материале параграфа 11.5. Это означает, что  $K(x, y)$  будет удовлетворять гиперболическому уравнению (11.2.6) и граничным условиям (11.2.10).

Основная идея параграфа 11.2 заключается в том, что оператор преобразования переводит решение основного уравнения (11.9.1), удовлетворяющего условию (11.9.2 а), в решение уравнения (11.9.5) с условием (11.9.6 а). Это означает, что  $(\psi_n(x))_0^N$  будут собственными функциями для (11.9.5), удовлетворяющими краевым условиям (11.9.6), если

$$\psi'_n(\pi) + H'_1 \psi_n(\pi) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (11.9.8)$$

Аналогично  $(\tau_n(x))_0^N$  будут собственными функциями для (11.9.5), соответствующими граничным условиям (11.9.7), если

$$\tau'_n(\pi) + H'_2 \tau_n(\pi) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (11.9.9)$$

Тем самым задача состоит в том, чтобы найти решение гиперболического уравнения (11.2.6), которое удовлетворяет уравнениям (11.9.8), (11.9.9). Перед тем как разбираться, как это осуществить, мы сделаем некоторые предварительные упрощения.

Если заданные последовательности  $(\mu_n)_0^\infty$ ,  $(\nu_n)_0^\infty$  являются спектрами некоторого  $S - L$ -уравнения (11.9.5), отвечающего (11.9.6), (11.9.7), соответственно, то они должны иметь одну из асимптотических форм, перечисленных в параграфе 10.9: (10.9.47), если  $h'$  является конечным; упр. 10.9.1, если  $h' = \infty$ . Предположим, что  $h' = \infty$ , тогда, проверяя последовательность, мы можем восстановить  $\bar{q}$  из каждого из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\mu_n - \bar{q})^{\frac{1}{2}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\} &= 0 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\nu_n - \bar{q})^{\frac{1}{2}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.9.10)$$

Рассматривая найденное  $\bar{q}$ , построим  $q^*(x) = q(x) - \bar{q}$ , как в (10.9.44). Система со звездочками обладает собственными значениями  $\mu_n^* = \mu_n - \bar{q}$ ,  $\nu_n^* = \nu_n - \bar{q}$ , отвечающими (11.9.6), (11.9.7) соответственно. Заметим, что даже если уравнение (11.9.5) было получено из физической системы с положительными собственными значениями и пределы показывают,



что  $\mu_n, \nu_n$  в итоге превысят  $\bar{q}$ , нет уверенности, что все величины со звездами  $\mu_n^*, \nu_n^*$  будут положительны.

Рассмотрим теперь редуцированную, т. е. звездную, систему и освободимся от звездочек.

Как было показано в параграфе 11.2, если  $h' = \infty$ , то можно рассмотреть основную систему при  $h = \infty$ . Тогда  $K(x, 0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , так что  $K(x, y)$  продолжается как нечетная функция от  $y$  в нижний треугольник на рисунке 11.3.1. Для простоты рассмотрим  $p(x) = 0$ , так что уравнение (11.2.14) дает  $K(\pi, \pi) = 0$ . Выберем  $H = 0$  так, что основная система имеет вид

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ \phi(0) &= 0 = \phi'(\pi),\end{aligned}\tag{11.9.11}$$

с собственными значениями  $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и собственными функциями

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

Определим  $\phi(x, \lambda)$  как решение для (11.9.11), удовлетворяющее

$$\phi(0, \lambda) = 0, \quad \phi'(0, \lambda) = 1.$$

Это означает, что если  $\omega = |\lambda|^{\frac{1}{2}}$ , то

$$\phi(x, \lambda) = \frac{\sin\omega x}{\omega}, \text{ если } \lambda > 0; \quad \frac{\sinh\omega x}{\omega}, \text{ если } \lambda < 0.$$

Теперь определим

$$\begin{aligned}\chi_n(x) &= \phi(x, \mu_n), & n = 0, 1, \dots, N, \\ \theta_n(x) &= \phi(x, \nu_n), & n = 0, 1, \dots, N\end{aligned}$$

и построим  $\psi_n(x), \tau_n(x)$ , собственные функции для (11.6.3), отвечающие (11.9.6), (11.9.7) соответственно, используя оператор преобразований  $K(x, y)$ :

$$\psi_n(x) = \chi_n(x) + \int_0^x K(x, t)\chi_n(t)dt, \quad \tau_n(x) = \theta_n(x) + \int_0^x K(x, t)\theta_n(t)dt.\tag{11.9.12}$$

Рассмотрим уравнение (11.9.8). Из уравнения (11.9.12) получим

$$\psi_n(\pi) = \chi_n(\pi) + \int_0^\pi K(\pi, y)\chi_n(y)dy$$

и

$$\psi'_n(\pi) = \chi'_n(\pi) + \int_0^\pi K_x(\pi, y)\chi_n(y)dy + K(\pi, \pi)\chi_n(\pi).$$

Однако

$$\begin{aligned} 0 &= \psi'_n(\pi) + H'_1\psi_n(\pi) = \\ &= \chi'_n(\pi) + H'_1\chi_n(\pi) + \int_0^\pi \{K_x(\pi, y) + H'_1K(\pi, y)\}\chi_n(y)dy. \end{aligned} \quad (11.9.13)$$

Это уравнение дает скалярные произведения для функции  $f_1(y) = K_x(\pi, y) + H'_1K(\pi, y)$  относительно  $\chi_n(y)$ . Однако, зная это, мы можем воспользоваться рассуждениями, позволяющими доказать (11.9.3), для нахождения произведений относительно  $(\sin nt)_1^{N+1}$ , так как  $\sin nt$  является решением основной задачи при условиях Дирихле  $\phi(0) = 0 = \phi(\pi)$ . Продолжая рассуждения в точности аналогично в случае второго спектра,  $(\nu_n)_0^N$ , мы можем найти скалярные произведения функции  $f_2(y) = K_x(\pi, y) + H'_2K(\pi, y)$  относительно  $(\theta_n(y))_0^N$ , а следовательно, и относительно  $(\sin nt)_1^{N+1}$ . Рассматривая кратные  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$ , мы получим

$$K(\pi, y) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n \sin ny, \quad K_x(\pi, y) = \sum_{n=1}^{N+1} b_n \sin ny. \quad (11.9.14)$$

Заметим, что эти представления дают условия  $K(\pi, 0) = 0 = K(\pi, \pi)$  и  $K_x(\pi, 0) = 0$ , как и требуется (напомним, что  $K(x, 0) \equiv 0$ ), однако из них получаем  $K_x(\pi, \pi) = 0$ , это ограничение не является необходимым. Напомним, что, когда  $h = \infty$ ,  $K(x, y)$  является нечетной функцией от  $y$  и представления (11.9.14) являются нечетными функциями  $y$ .

Теперь перейдем сначала к уравнению (11.2.7), которое утверждает, что

$$q(x) = \frac{2dK(x, x)}{dx}, \quad (11.9.15)$$

а затем к уравнению (11.3.15), которое выражает  $K(x, y)$  через  $K$  и  $K_x$  на прямой  $x = \pi$  и через интеграл по треугольнику  $ABP$  на рисунке 11.3.3. Если  $x = y$ , этот треугольник имеет вид как на рисунке 11.9.1, поэтому из уравнения (11.3.15) получим

$$2K(x, x) = K(\pi, 2x - \pi) + K(\pi, \pi) - \int_{2x-\pi}^{\pi} K_x(\pi, t) dt + \int_x^{\pi} \left\{ \int_{2x-s}^s q(s) K(s, t) dt \right\} ds.$$

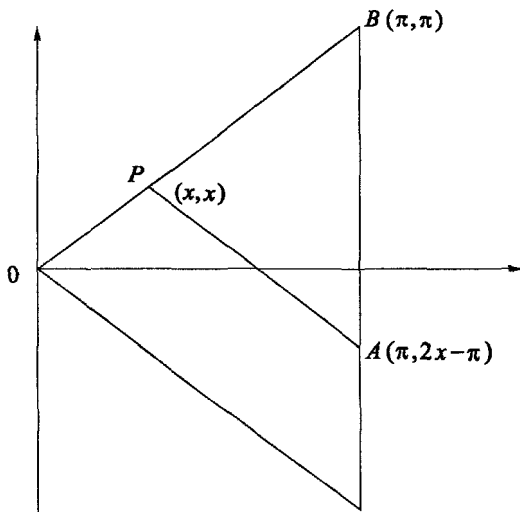


Рис. 11.9.1. Треугольник  $ABP$  при  $x = y$

Мы не располагаем местом для того, чтобы указать все остальные численные методы, см., например, работу Брауна, Самко (Samko), Кноулес (Knowles) и Мерлетта (Marletta) (2003) [41]. Дифференцируя по  $x$ , получим

$$\frac{2dK(x, x)}{dx} = 2K_y(\pi, 2x - \pi) + 2K_x(\pi, 2x - \pi) - 2 \int_x^{\pi} q(s) K(s, 2x - s) ds.$$

Это уравнение дает основание для итеративного решения задачи. Возьмем

$$G(x) = 2K_y(\pi, 2x - \pi) + 2K_x(\pi, 2x - \pi),$$

будем рассматривать уравнение в виде:

$$q_{m+1}(x) = G(x) - 2 \int_x^\pi q_m(s)K(s, 2x - s)ds \quad (11.9.16)$$

для получения нового значения  $q(x)$  из уже существующего. Рассматривая правую часть (11.9.16) как результат действия на  $q_m$  оператора  $T$ , получим

$$q_{m+1} = Tq_m.$$

Следовательно, потенциал  $q(x)$  находится как неподвижная точка отображения  $Tq$ .

Реальные численные реализации не являются нашей главной целью; их можно найти, скажем, в работе Рунделя (1997) [294]. В принципе можно действовать следующим образом.

**Шаг 1.** Начнем с некоторой первоначальной аппроксимации, например,  $q_0(x) = G(x)$ . Возьмем  $m = 0$ .

**Шаг 2.** Решим задачу Коши

$$K_{xx} - K_{yy} - q_m K = 0$$

при  $K, K_x$ , задаваемых равенствами (11.9.14) при  $x = \pi$ . Это можно сделать, используя стандартные численные методы.

**Шаг 3.** Рассмотрим  $q_{m+1}(x)$  из уравнения (11.9.16). Возьмем  $m = m+1$  и вернемся к шагу 2, пока не появится сходимость.

## 11.10. Другие теоремы единственности

Основная теорема единственности из параграфа 11.4 показывает, что потенциал  $q(x)$  и концевые константы  $h, H$  однозначно определяются двумя спектрами. Важный шаг в рассуждении состоит в том, что полнота собственных функций означает, что уравнение (11.4.6) дает  $K(\pi, y) = 0 = K_x(\pi, y)$  для  $0 \leq y \leq \pi$ . Однако это условия Коши для гиперболического уравнения (11.2.6); так как данные являются нулевыми,  $K(x, y) = 0$  для  $0 \leq y \leq x \leq \pi$  и  $p(x) = q(x)$ ,  $h_1 = h_2$ , а также  $H_1 = H_2$ .

Основная теорема единственности использует два спектра, отвечающие двум различным конечным константам, на одном конце. Покажем теперь, что если известен только один спектр, то существуют различные другие множества вспомогательных данных, которые дают единственную систему. Как и в параграфе 11.4, мы сформулируем теорему единственности в терминах краевых условий, т. е. конечных констант, которые не являются нулевыми и не являются бесконечными. Специальный случай, когда одна или обе конечные константы являются нулевыми или бесконечными, требует ряда простых модификаций приводимых утверждений.

**Теорема 11.10.1.** *Рассмотрим два потенциала  $p(x), q(x) \in C[0, \pi]$ , со следующими свойствами:*

- i)  $y'' + (\lambda - p)y = 0$ ,  $y'(0) - h_1 y(0) = 0 = y'(\pi) + H_1 y(\pi)$  обладает спектром  $(\lambda_n)_0^\infty$  и собственными функциями  $(\phi_n(y))_0^\infty$ ;
- ii)  $y'' + (\lambda - q)y = 0$ ,  $y'(0) - h_2 y(0) = 0 = y'(\pi) + H_2 y(\pi)$  обладает тем же спектром  $(\lambda_n)_0^\infty$  и собственными функциями  $(\psi_n(y))_0^\infty$ ; и справедливо **одно** из следующих свойств:
- iii)  $\frac{\psi_n(\pi)}{\psi_n(0)} = \frac{\phi_n(\pi)}{\phi_n(0)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- iv)  $\frac{\psi'_n(\pi)}{\psi'_n(0)} = \frac{\phi'_n(\pi)}{\phi'_n(0)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- v)  $\frac{\psi_n^2(\tau)}{\int_0^\pi \psi_n^2(x) dx} = \frac{\phi_n^2(\tau)}{\int_0^\pi \phi_n^2(x) dx}$ ,  $\tau = 0$  или  $\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- vi)  $\frac{\psi_n'^2(\tau)}{\int_0^\pi \psi_n'^2(x) dx} = \frac{\phi_n'^2(\tau)}{\int_0^\pi \phi_n'^2(x) dx}$ ,  $\tau = 0$  или  $\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- vii)  $p(x) = p(\pi - x)$ ,  $q(x) = q(\pi - x)$ ,  $h_1 = H_1$ ,  $h_2 = H_2$ , тогда  $p(x) = q(x)$ ,  $h_1 = h_2$ ,  $H_1 = H_2$ .

**Доказательство.** Функции  $\psi_n(x)$  связаны с  $\phi_n(x)$  посредством

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) + \int_0^x K(x, y) \phi_n(y) dy, \quad (11.10.1)$$

откуда

$$\psi'_n(x) = \phi'_n(x) + K(x, x)\phi_n(x) + \int_0^x K_x(x, y)\phi_n(y)dy, \quad (11.10.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_n(0) &= \phi_n(0), \\ \psi'_n(0) - h_2\psi_n(0) &= \phi'_n(0) - h_1\phi_n(0) + \{K(0, 0) + h_1 - h_2\}\phi_n(0), \\ \psi'_n(\pi) + H_2\psi_n(\pi) &= \phi'_n(\pi) + H_1\phi_n(\pi) + \{K(\pi, \pi) + H_2 - H_1\}\phi_n(\pi) + \\ &+ \int_0^\pi \{K_x(\pi, y) + H_2K(\pi, y)\}\phi_n(y)dy. \end{aligned} \quad (11.10.3)$$

Так как **i)** и **ii)** обладают одинаковым спектром,

$$h_1 + H_1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi p(x)dx = h_2 + H_2 + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x)dx,$$

однако

$$K(x, x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \{q(x) - p(x)\}dx,$$

откуда  $K(0, 0) + h_1 - h_2 = 0 = K(\pi, \pi) + H_2 - H_1$ .

Так как  $\psi'_n(\pi) + H_2\psi_n(\pi) = 0 = \phi'_n(\pi) + H_1\phi_n(\pi)$ , уравнение (11.10.3) дает  $K_x(\pi, y) + H_2K(\pi, y) = 0$ , аналогично (11.4.7).

Теперь рассмотрим некоторую дополнительную информацию.

**iii)** Так как  $\psi_n(0) = \phi_n(0)$ , получим  $\psi_n(\pi) = \phi_n(\pi)$ , следовательно, из (11.10.1):

$$\int_0^\pi K(\pi, y)\phi_n(y)dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и  $K(\pi, y) = 0$ , откуда  $K_x(\pi, y) = 0$ , утверждение следует как и ранее.

**iv)** Представляя  $\psi'_n(\pi)$  и  $\psi'_n(0)$  в терминах  $\phi_n$ , после некоторых преобразований получим, что

$$(h_1H_2 - h_2H_1)\phi_n(0)\phi_n(\pi) = \phi'_n(0) \int_0^\pi K_x(\pi, y)\phi_n(y)dy.$$

Пусть  $n \rightarrow \infty$ , тогда лемма Римана–Лебега утверждает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} K_x(\pi, y) \phi_n(y) dy = 0.$$

Следовательно,  $h_1 H_2 - h_2 H_1 = 0$  и  $K_x(\pi, y) = 0$ , затем продолжим наши рассуждения как и ранее.

**v)** Нам необходимо получить представление для  $\int_0^{\pi} \phi_n^2(x) dx = \rho_n$ .

Покажем, что собственные функции, удовлетворяющие i), являются ортогональными, т.е.  $\int_0^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$ . Это можно показать, рассматривая два уравнения

$$\phi_n'' + (\lambda_n - p)\phi_n = 0 = \phi_m'' + (\lambda_m - p)\phi_m,$$

домножая первое на  $\phi_m$  и второе на  $\phi_n$ , вычитая полученные уравнения и интегрируя разность по  $(0, \pi)$ . Для нахождения  $\rho_n$  нам необходимо рассмотреть уравнение  $\phi'' + (\lambda - p)\phi = 0$  для  $\lambda_n$  и для другого  $\lambda$ , бесконечно близкого к нему. Будем действовать следующим образом.

Пусть  $\phi = \phi(x, \lambda, c)$  является решением для

$$\phi'' + (\lambda - p)\phi = 0, \quad \phi'(0) - h_1 \phi(0) = 0, \quad \phi(0) = c. \quad (11.10.4)$$

Тогда, рассматривая  $\dot{\phi} = \partial/\partial\lambda$ , получим

$$\dot{\phi}'' + (\lambda - p)\dot{\phi} + \phi = 0, \quad \dot{\phi}'(0) - h_1 \dot{\phi}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0. \quad (11.10.5)$$

Умножая (11.10.4а) на  $\dot{\phi}$ , (11.10.5а) на  $\phi$ , вычитая и интегрируя по  $(0, \pi)$ , получим, что если выбрать  $\lambda = \lambda_n$  так, что  $\phi = \phi_n$ , найдем

$$[\dot{\phi}_n \phi_n' - \dot{\phi}_n' \phi_n]_0^{\pi} = \int_0^{\pi} \phi_n^2 dx.$$

Подставляя в левую часть значение нижнего предела интегрирования, получим ноль, в то время как подстановка верхнего предела интегрирования дает

$$-(\dot{\phi}_n'(\pi) + H_1 \dot{\phi}_n(\pi)) \phi_n(\pi) = \int_0^{\pi} \phi_n^2(x) dx. \quad (11.10.6)$$

Можно провести те же вычисления для  $\psi_n(x)$  и получить

$$-(\dot{\psi}'_n(\pi) + H_2 \dot{\psi}_n(\pi))\psi_n(\pi) = \int_0^\pi \psi_n^2(x) dx. \quad (11.10.7)$$

Так как  $K(x, y)$  не зависит от  $\lambda$ , уравнения (11.10.1), (11.10.2) после дифференцирования по  $\lambda$  дают

$$\dot{\psi}'_n(\pi) + H_2 \dot{\psi}_n(\pi) = \dot{\phi}'_n(\pi) + H_1 \dot{\phi}_n(\pi). \quad (11.10.8)$$

Следовательно, **v)** при условии (11.10.6), (11.10.7) позволяет получить

$$\frac{\psi_n^2(\tau)}{\phi_n^2(\tau)} = \frac{\psi_n(\pi)}{\phi_n(\pi)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если  $\tau = 0$ , то  $\psi_n(0) = \phi_n(0)$  дает  $\psi_n(\pi) = \phi_n(\pi)$ ; если  $\tau = \pi$ , тогда снова  $\psi_n(\pi) = \phi_n(\pi)$ . Однако если  $\psi_n(\pi) = \phi_n(\pi)$ , то уравнение (11.10.1) показывает, что

$$\int_0^\pi K(\pi, y) \phi_n(y) dy = 0,$$

так что  $K(\pi, y) = 0$ , и мы продолжим действовать как и ранее.

**vi)** Используя (11.10.6)–(11.10.8), получим

$$\frac{\psi_n'^2(\tau)}{\phi_n'^2(\tau)} = \frac{\psi_n(\pi)}{\phi_n(\pi)}.$$

Если  $\tau = 0$ , то левая часть имеет вид  $h_2^2/h_1^2$ . Следовательно,

$$\psi_n(\pi) = \phi_n(\pi) + \int_0^\pi K(\pi, y) \phi_n(y) dy = (h_2^2/h_1^2) \phi_n(\pi).$$

Снова  $K(\pi, y) = 0$ . Если  $\tau = \pi$ , то  $\psi_n(\pi) = (H_2^2/H_1^2) \phi_n(\pi)$ , и опять  $K(\pi, y) = 0$ .

**vii)** Потенциал и краевые условия инвариантны при преобразовании  $x \rightarrow \pi - x$ . Следовательно, все собственные функции должны



быть либо симметричными, либо антисимметричными относительно  $x = \frac{\pi}{2}$ . Более точно,  $\phi_{2n}(x), \psi_{2n}(x)$  являются симметричными, тогда как  $\phi_{2n+1}(x), \psi_{2n+1}(x)$  являются антисимметричными. Следовательно,

$$\frac{\psi_n(\pi)}{\phi_n(0)} = \pm 1 = \frac{\phi_n(\pi)}{\phi_n(0)},$$

значит, это частный случай **iii**). ■

В соответствии с каждым из множеств вспомогательных данных из **iii)–vii)** мы можем разработать методы оценивания  $K(\pi, y)$  и  $K_x(\pi, y)$  для  $0 \leq y \leq \pi$ . Для построения потенциала мы можем действовать как в параграфе 11.9.

Хохштадт и Либерман (1978) [181] рассмотрели задачу определения  $q(x)$  на  $[0, \frac{\pi}{2}]$  по данным о  $q(x)$  на  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  и одному спектру, скажем, для краевых условий Дирихле  $y(0) = 0 = y(\pi)$ . Неклассический метод, описанный в параграфе 11.9, хорошо подходит для этой задачи.

Пусть спектр Дирихле равен  $(\mu_n)_0^\infty$ ; он должен иметь асимптотическую форму (10.9.41), т. е.

$$\sqrt{\mu_n} = \omega_n = n + 1 + \frac{c}{n+1} + o(n^{-1}),$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(x) dx$$

известно.

Без ограничения общности можно рассмотреть  $p(x) = 0$  в основной задаче. Пусть  $\chi_n(x)$  является решением для

$$\chi_n'' + \mu_n \chi_n = 0, \quad \chi_n(0) = 0, \quad \chi_n'(\pi) = 1$$

и пусть

$$\psi_n(x) = \chi_n(x) + \int_0^x K(x, y) \chi_n(y) dy.$$

Уравнение  $\psi_n(\pi) = 0$  имеет вид

$$\chi_n(\pi) + \int_0^\pi K(\pi, y) \chi_n(y) dy = 0,$$

откуда  $K(\pi, y)$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ . Ядро  $K$  удовлетворяет условию  $K(x, 0) = 0$  и

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} q(x) dx.$$

Так как  $c$  известно и  $q(x)$  известно для  $x \geq \frac{\pi}{2}$ , можно найти также и  $K(x, x)$ .

Нам потребуется напомнить рассуждения, которые мы использовали в параграфе 11.3. Мы рассматривали задачу Гурса, в которой  $u(x, y)$  известна на характеристиках  $x = \pm y$  при  $0 \leq x \leq \pi$ , и мы показали, что  $u(x, y)$  определена единственным образом. При условиях Дирихле ядро  $K(x, y) = u(x, y)$  является нечетной функцией по  $y$  такой, что  $K(x, 0) = 0$ . Теорема единственности состоит в том, что  $K(x, y)$  определяется на множестве  $0 \leq y \leq x \leq \pi$ , если оно известно на двух частях границы:  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ; и  $x = y$  на  $0 \leq x \leq \pi$ .

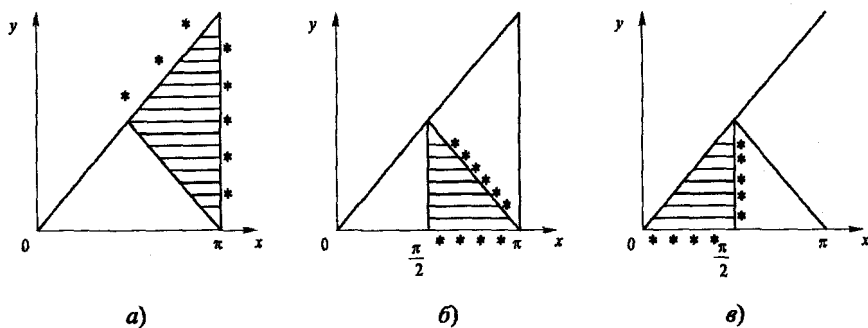


Рис. 11.10.1. Задача с граничными значениями на трех треугольниках

Однако, рассуждая в точности как мы это делали в параграфе 11.3, о том, что если ядро  $K(x, y)$  известно, что показано звездочками, на двух частях  $x = \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi$  и  $\frac{\pi}{2} \leq x = y \leq \pi$  границы темного фрагмента на рисунке 11.10.1а, тогда оно известно на всем этом фрагменте. Это означает, что мы можем найти  $K(x, y)$  на третьей части границы:  $y = \pi - x$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ . Теперь рассмотрим новый заштрихованный участок на рисунке 11.10.1б. Ядро  $K$  известно на двух частях  $y = 0$ ,  $y = \pi - x$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ , границы, что снова отмечено звездочками; следо-

вательно, оно известно на заштрихованном множестве, а значит  $K(\frac{\pi}{2}, y)$  и  $K_x(\frac{\pi}{2}, y)$  известны для  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . В итоге мы рассмотрим задачу Коши для заштрихованного множества на рисунке 11.10.1с;  $K$  и  $K_x$  известны на  $x = \frac{\pi}{2}$ , откуда  $K$  известно на всем протяжении. Следовательно,  $K(x, x)$  известно при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  и

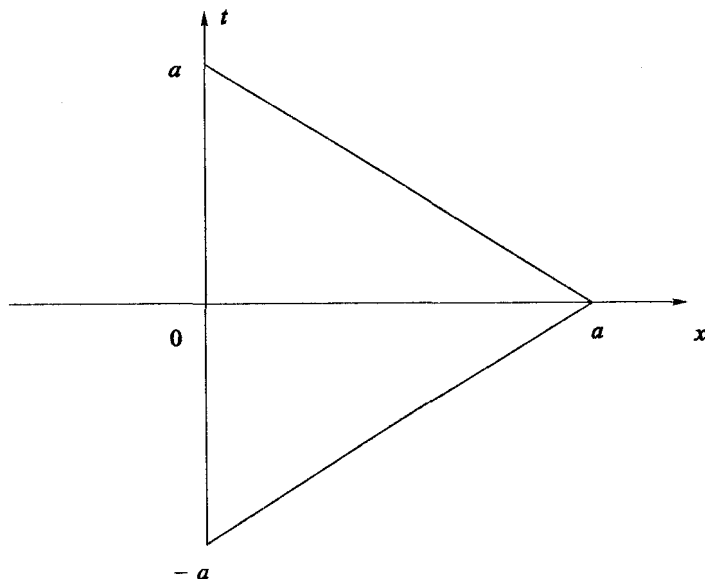
$$q(x) = \frac{2dK(x, x)}{dx}.$$

### 11.11. Восстановление по импульсной характеристике

В этом параграфе мы приводим исследования, проведенные Гупинафом и Сондхи, посредством которых  $A(x)$  может быть восстановлено по импульсному отклику  $\hat{h}(0, t)$  из параграфа 10.10. См. Гупинаф и Сондхи (1970) [136], (1971) [137], (1971) [308] и Сондхи (1984) [309]. Предположим, что единичный импульс применен к свободному концу,  $x = 0$ , в момент времени  $t = 0$ . Интуитивно ясно, что отклик  $\hat{h}(0, t)$  на конце стержня в момент времени  $t$  не зависит от формы стержня при  $x > \ell$ , где  $\ell = t/2$ . Это верно, так как воздействие формы стержня при  $x > t/2$  на  $\hat{h}(0, t)$  не может быть воспринято до момента времени *после*  $t$  — время, отведенное на достижение возмущением, движущимся с (масштабированной) скоростью 1, точки  $x = \ell$  и обратного движения. Сондхи и Гупинаф проверили обратное, а именно, что значение  $\hat{h}(t)$  при  $0 \leq t \leq 2$  является достаточным (и необходимым) для нахождения  $A(x)$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Решение основывается на следующем наблюдении. Пусть стержень свободен в момент времени  $t = t_0$ , т.е.  $v(x, t_0) = 0 = p(x, t_0)$  для  $0 \leq x \leq 1$ , и сила прилагается к свободному концу  $x = 0$ . В момент времени  $t = t_0 + a$  стержень по прежнему будет свободен при  $x \geq a$ , так как масштабированная скорость волны равна 1. Интегрируя первое из уравнений (10.10.10), получим

$$A(x)[v(x, t)]_{t_0}^{t_0+a} = A(x)v(x, t_0 + a) = \int_{t_0}^{t_0+a} \frac{\partial p}{\partial x} dt,$$

Рис. 11.11.1. Множество на  $x, t$ -плоскости

при повторном интегрировании по  $x$  мы найдем

$$\int_0^a A(x)v(x, t_0 + a)dx = \int_{t_0}^{t_0+a} p(0, t)dt. \quad (11.11.1)$$

Если теперь для любого  $a$  можно найти силу  $p(0, t)$  такую, что  $v(x, t_0 + a) = 1$  при  $0 \leq x \leq a$ , то в этом случае из уравнения (11.11.1) следует

$$\int_0^a A(x)dx = \int_{t_0}^{t_0+a} p(0, t)dt. \quad (11.11.2)$$

Следовательно, интеграл  $A(x)$ , а значит, и  $A(a)$  определяется как функция  $a$ . Покажем теперь, что такая сила существует и может быть найдена, если известна  $\hat{h}(0, t)$ .

Если  $v(x, t), p(x, t)$  удовлетворяют уравнению (10.10.10), то это же верно для  $v(x, -t), -p(x, -t)$ , и, рассматривая суперпозицию, найдем

$$V(x, t) = v(x, t) + v(x, -t), \quad P(x, t) = p(x, t) - p(x, -t).$$

Очевидно,  $V(x, t) = 2, P(x, t) = 0$  является таким решением. Исследования задачи Коши из параграфа 11.3 показывают, что это решение является единственным на треугольном множестве, изображенном на рис. 11.11.1, которое удовлетворяет условиям  $V(0, t) = 2, P(0, t) = 0$  при  $-a \leq t \leq a$ . Следовательно, если  $p(0, t)$  является таким, что  $V(0, t) = 2, P(0, t) = 0$  при  $-a \leq t \leq a$ , то всюду в треугольнике  $V(x, t) = 2, P(x, t) = 0$ . В частности, если  $t = 0$ , то  $V(x, 0) = 2v(x, 0) = 2$ , откуда  $v(x, 0) = 1$ ; это дает функцию  $v(x, t)$ , требуемую в уравнении (11.11.2), если взять  $t_0$  равным  $-a$ . Для нахождения требуемого давления  $p(0, t)$  заметим, что, так как стержень является свободным при  $t = -a$ , уравнение (10.10.11) дает

$$v(0, t) = \int_{-a}^t \hat{h}(0, t - \tau) p(0, \tau) d\tau,$$

а значит, если  $v(0, t) + v(0, -t) = 2$ , то

$$\int_{-a}^t \hat{h}(0, t - \tau) p(0, \tau) d\tau + \int_{-a}^{-t} \hat{h}(0, t - \tau) p(0, \tau) d\tau = 2.$$

Решения этого уравнения зависят от  $a$ ; следовательно, мы запишем

$$p(0, \tau) := f(a, \tau).$$

Теперь, используя тот факт, что  $p(0, \tau)$  является четным по  $\tau$  и что из уравнения (10.10.14) следует

$$\hat{h}(t) = \delta(t) + h(t),$$

получим

$$f(a, t) + \frac{1}{2} \int_{-a}^a h(|t - \tau|) f(a, \tau) d\tau = 1. \quad (11.11.3)$$

Если  $f(a, \tau)$  известно, уравнение (11.11.2) дает

$$\int_0^a A(x) dx = \int_0^a f(a, \tau) d\tau.$$

Уравнение (11.11.3) может быть записано в операторном виде

$$(I + H_a)f(a, t) = 1.$$

Сондхи и Гупинаф показали, что если  $\hat{h}(t)$  — импульсный отклик реального стержня, то оператор  $I + H_a$  положительно определен, так что уравнение (11.11.3) имеет единственное решение. Более того, они показали, что соответствующее значение  $A(a)$  будет положительно, при условии своей непрерывности. В дополнение они показали, что если  $I + H_a$  является положительно определенным, то существует стержень (т. е.  $A(x)$ ), который обладает этим импульсным откликом.

Применим этот метод к задаче из параграфа 11.6, т. е. для восстановления стержня, который, начиная с некоторого индекса, имеет те же собственные значения и краевые значения отнормированных собственных функций, что и равномерный стержень, т. е.

$$\omega_i = \omega_i^0, \quad u_i(0) = u_i^0(0), \quad i = n + 1, n + 2, \dots,$$

где

$$\omega_i^0 = \frac{(2i + 1)\pi}{2}, \quad [u_i^0(0)]^2 = 2.$$

В этом случае  $h(t)$  находится в упр. 10.10.2, и ядро  $h(|t - \tau|)$  является вырожденным. Так как  $f(a, t)$  является четной функцией по  $t$ , мы можем записать уравнение (11.11.3) в виде

$$f(a, t) + \frac{1}{2} \int_0^a \{h(|t - \tau|) + h(|t + \tau|)\} f(a, \tau) d\tau = 1, \quad 0 \leq t \leq a. \quad (11.11.4)$$

Ядро имеет вид

$$\begin{aligned} H(t, \tau) &= \frac{1}{2} \{h(|t - \tau|) + h(|t + \tau|)\} \\ &= \sum_{i=0}^n \{[u_i(0)]^2 \cos \omega_i t \cos \omega_i \tau - [u_i^0(0)]^2 \cos \omega_i^0 t \cos \omega_i^0 \tau\}. \end{aligned}$$

Так как ядро является вырожденным, решение можно найти путем простого обращения матрицы. Следовательно, уравнение (11.11.4) дает:

$$f(a, t) = 1 + \sum_{i=0}^n \{a_i(a)[u_i(0)]^2 \cos \omega_i t - b_i(a)[u_i^0(0)]^2 \cos \omega_i^0 t\},$$

при подстановке его в уравнение (11.11.4) получим

$$a_i + \int_0^a \cos \omega_i \tau d\tau + \sum_{j=0}^n (b_{ij} a_j - c_{ij} b_j) = 0,$$

$$b_i + \int_0^a \cos \omega_i^0 \tau d\tau + \sum_{j=0}^n (c_{ji} a_j - d_{ij} b_j) = 0,$$

где

$$b_{ij} = [u_j(0)]^2 \int_0^a \cos \omega_i \tau \cos \omega_j \tau d\tau,$$

$$c_{ij} = [u_j^0(0)]^2 \int_0^a \cos \omega_i \tau \cos \omega_j^0 \tau d\tau,$$

$$d_{ij} = [u_j^0(0)]^2 \int_0^a \cos \omega_i^0 \tau \cos \omega_j^0 \tau d\tau.$$

Если  $f(a, t)$  найдено,  $A(x)$  можно вычислить из уравнения (11.11.2). Это завершает обращение.

Эти рассуждения имеют прямую связь со всей областью обратного рассеяния; см., например, Бурридж (Burridge) (1980) [45], Буб (Bube) и Бурридж (1983) [43], Ландау (1983) [204], Брукштейн и Кайлаш (Bruckstein, Kailath) (1987) [42], Шадан и Сабатьер (Chadan, Sabatier) (1989) [52]. Другие ссылки можно найти в монографии Глэдвелла (1993) [120].

---

---

## ГЛАВА 12

# Различные обратные задачи

Симметрия, воспринимаемая с первого взгляда, основана и на том, что нет резона обходиться без нее, и на том, что телосложение человека тоже симметрично; именно поэтому мы привержены к симметрии в ширину, но не в глубину и высоту.

Блез Паскаль. *Мысли*, 28

### 12.1. Воссоздание кусочно-однородного стержня по двум спектрам

Все доказательства единственности и алгоритмы построения, описанные в главе 11, относятся к построению непрерывных систем (т.е. непрерывны  $q(x)$ ,  $A(x)$  или  $\rho(x)$ ). Основными данными являются две бесконечные последовательности, которые могут быть двумя спектрами, отвечающими различным краевым условиям, или один спектр с некоторыми дополнительными данными, как в теореме 11.10.1. Если заданы два конечных множества данных, то они либо дополняются на основе использования условий усечения, как в параграфе 11.5, или система аппроксимируется численно, как в параграфе 11.9. В этом параграфе мы покажем, как построить *кусочно-однородный* стержень, имеющий в точности два конечных спектра; мы не будем использовать условия усечения. Первый конструктивный алгоритм предложил Андерсен в 1990 году в работе [8]; мы будем следовать рассуждениям из работы Глэдвелла [118] (1991с), в которой алгоритм Андерсена рассматривается в контексте обратных алгоритмов сейсмологии и теории передаточных механизмов, см. работы Буба и Бурриджа [43] (1983), Брукштейна и Кайлаша [42] (1987), Глэдвелл [120] (1993).

Андерсен рассматривал колеблющийся стержень, т.е. уравнение (11.1.3)

$$(A(x)v'(x))' + \omega^2 A(x)v(x) = 0 \quad (12.1.1)$$



с краевыми условиями

$$i) \quad v'(0) = 0 = v'(L); \quad ii) \quad v(0) = 0 = v(L); \quad (12.1.2)$$

это соответствует свободно-свободным и фиксированно-свободным концам соответственно. Он показал, что если существуют заданная  $n + 1$ -частота  $(\omega_k)_0^n$ , удовлетворяющая неравенствам

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = \pi n / 2L, \quad (12.1.3)$$

причем четные  $\omega_j$  являются собственными числами уравнения (12.1.1) для случая i), а нечетные — для случая ii), то существует единственный стержень с кусочно-постоянной функцией  $A(x)$  такой, что

$$A(x) = A_j, \quad (j-1)\Delta \leq x \leq j\Delta \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.1.4)$$

где  $\Delta = L/n$ ,  $A_1 = 1$ , как показано на рисунке 12.1.1.

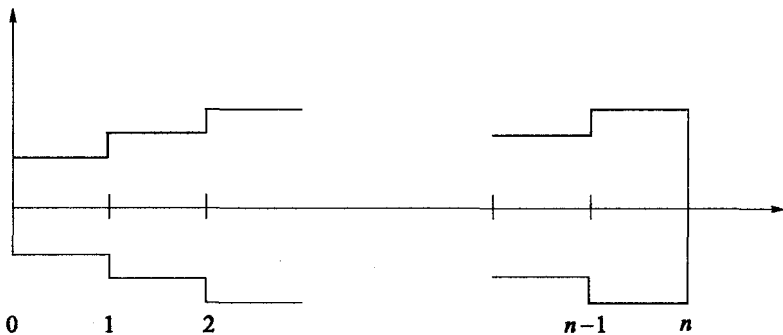


Рис. 12.1.1. Ступенчатый стержень с  $n$  сегментами

В сейсмологии и теории передаточных механизмов среда с параметрами, которые постоянны на равных интервалах глубины  $\Delta$ , как в (12.1.4), называется *средой Гупилларда*. В теории передаточных механизмов, как и во многих задачах про обратное рассеяние, набор данных не связан с собственными значениями; не существует собственных значений или так называемых пограничных состояний. Вместо этого данные связаны с откликом на вход. Один из способов представления данных использует отраженную волну  $U(t)$  на одинаковых интервалах  $2\Delta$ , полученную из входящей волны  $D(t)$ , также распределенной на

интервалах  $2\Delta$ . Одним из основных вопросов является следующий: когда данные отраженная волна и входящая волна действительно соответствуют среде Гупилларда. Это вопрос о реализуемости данных. Критерий реализуемости можно сформулировать посредством введения  $Z$ -преобразований,  $U(z)$  и  $D(z)$ , или  $U(t)$  и  $D(t)$ , и определения функции левого отражения

$$R(z) = \frac{U(z)}{D(z)},$$

выбирая

$$f_1(z) = z^{-1}R(z).$$

Критерием реализуемости является следующий:

$$M(f_1) \equiv \sup_{|z| \leq 1} |f_1(z)| \leq 1. \quad (12.1.5)$$

Шур в [300] (1917) построил алгоритм для проверки того, что функция  $f_1(z)$  удовлетворяет (12.1.5), т. е. ограничена единицей в единичном круге. Алгоритм основан на фундаментальном, см. Гилбарг (Gilbarg) и Традинггер (Trudinger) (1977) [102], *принципе максимума модуля*.

*Максимальный модуль функции  $f(z)$  (от комплексной переменной  $z = x + iy$ ), которая регулярна (голоморфна) в замкнутой области, всегда лежит на границе этой области.*

Заметим, что  $f(z)$  достигает *максимума модуля* в точке  $z_0$ , если  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  для всех  $z$  в некоторой окрестности  $|z - z_0| \leq \rho$  точки  $z_0$ . Важным следствием этого принципа является то, что *если  $f(z)$  имеет максимальный модуль во внутренней точке  $z_0$  некоторой области, где она регулярна, то  $f(z) = f(z_0)$  в этой области.*

Алгоритм Шура основывается на том факте, что если  $|\gamma| < 1$ , то

$$w = \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \quad (12.1.6)$$

отображает область  $|z| \leq 1$  на область  $|w| \leq 1$  и область  $|z| = 1$  на область  $|w| = 1$ . Этот алгоритм базируется на рекурсивной формуле

$$f_j(z) = \frac{1}{z} \times \frac{f_{j-1}(z) - \gamma_j}{1 - \bar{\gamma}_j f_{j-1}(z)}, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (12.1.7)$$

где  $\gamma_j = f_{j-1}(0)$ . Пусть  $M(f_{j-1}) \leq 1$ . Возможны два варианта: или  $|\gamma_j| = 1$ , в этом случае условие  $M(f_{j-1}) \leq 1$  и принцип максимума

модуля дает  $f_{j-1}(z) = \gamma_j$ , а значит, последовательность сходится при  $f_{j-1}(z)$ ; или  $|\gamma_j| < 1$  в каждом из случаев  $M(f_j) \leq 1$ . Следовательно, условие (12.1.5), используемое вместе с рекурсивным соотношением (12.1.7), дает бесконечную или конечную последовательность  $\gamma_2, \gamma_3, \dots$ , удовлетворяющую ограничению  $|\gamma_j| \leq 1$ , где неравенство является строгим, исключая, возможно, последний случай. Заметим, что в частном случае  $M(f_1) = 1$  отсюда следует  $M(f_j) = 1$  для всех  $j$ , и если последовательность сходится при  $j = n + 1$ , то она будет сходиться и при  $|f_n| = 1$ .

Сформулируем теперь задачу о колебаниях так, чтобы получить рекурсию вида (12.1.6). Для начала мы заменим уравнение (12.1.1) на два спаренных уравнения первого порядка, а именно:

$$v'(x) = i\omega p(x)/A(x), \quad p'(x) = i\omega A(x)v(x).$$

Заметим, что  $i\omega p(x) = A(x)v'(x)$ , откуда  $v(x)$  и  $p(x)$  непрерывны в точке разрыва  $A(x)$ . Возьмем  $\eta(x) = \{A(x)\}^{\frac{1}{2}}$  и определим *нижнюю* и *верхнюю* величины

$$D = \frac{1}{2}(\eta v + \eta^{-1}p), \quad U = \frac{1}{2}(\eta v - \eta^{-1}p). \quad (12.1.8)$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$D' = i\omega D + \eta' \eta^{-1}U, \quad U' = -i\omega U + \eta' \eta^{-1}D,$$

поэтому если  $A(x)$  постоянна, то  $\eta' = 0$  и

$$D' = i\omega D, \quad U' = -i\omega U.$$

Последние уравнения имеют решения

$$D = D_0 \exp(i\omega x), \quad U = U_0 \exp(-i\omega x). \quad (12.1.9)$$

Пусть  $A(x)$  имеет вид (12.1.4). Определим величины

$$D_j = D(j\Delta+), \quad U_j = U(j\Delta+), \quad D_j^* = D(j\Delta-), \quad U_j^* = U(j\Delta-), \quad (12.1.10)$$

где  $+$  или  $-$  являются значениями справа или слева от  $j\Delta$  соответственно. Уравнения (12.1.9) показывают, что

$$D_j^* = \exp(i\omega\Delta)D_{j-1}, \quad U_j^* = \exp(-i\omega\Delta)U_{j-1}.$$

Рассмотрим  $\exp(i\omega\Delta) = z^{\frac{1}{2}}$ , тогда

$$\begin{bmatrix} D_j^* \\ U_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & z^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{j-1} \\ U_{j-1} \end{bmatrix}. \quad (12.1.11)$$

Пусть

$$\mathbf{H}_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_j & \eta_j^{-1} \\ \eta_j & -\eta_j^{-1} \end{bmatrix},$$

тогда уравнение (12.1.8) и непрерывность  $v$  и  $p$ , вместе с разрывностью  $A(x)$ , дают:

$$\begin{bmatrix} D_{j-1} \\ U_{j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_j \begin{bmatrix} v_{j-1} \\ p_{j-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} D_{j-1}^* \\ U_{j-1}^* \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{j-1} \begin{bmatrix} v_{j-1} \\ p_{j-1} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} D_{j-1} \\ U_{j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_j \mathbf{H}_{j-1}^{-1} \begin{bmatrix} D_{j-1}^* \\ U_{j-1}^* \end{bmatrix}. \quad (12.1.12)$$

Матрица  $\Theta_j = \mathbf{H}_j \mathbf{H}_{j-1}^{-1}$  может быть записана в виде

$$\Theta_j = \frac{1}{\sigma_j} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_j \\ -\gamma_j & 1 \end{bmatrix}, \quad (12.1.13)$$

где

$$\sigma_j = (1 - \gamma_j^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_j = (A_{j-1} - A_j)/(A_{j-1} + A_j). \quad (12.1.14)$$

Из уравнений (12.1.11), (12.1.12) получим

$$\begin{bmatrix} D_j^* \\ U_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & z^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Theta_j \begin{bmatrix} D_{j-1}^* \\ U_{j-1}^* \end{bmatrix}. \quad (12.1.15)$$

Возьмем  $U_j^*/D_j^* = f_j(z)$ , тогда уравнение (12.1.15) позволяет получить

$$f_j(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{f_{j-1}(z) - \gamma_j}{1 - \gamma_j f_{j-1}(z)}, \quad (12.1.16)$$

а так как  $\gamma_j$  является вещественным числом ( $\gamma_j = \bar{\gamma}_j$ ), мы получим рекурсию Шура (12.1.7).

Перед тем как рассматривать обратную задачу восстановления площадей поперечных сечений  $A_j$  по спектру, мы изучим более простую задачу вычисления спектра по поперечным сечениям.

Пусть даны  $(A_j)_1^n$ ,  $A_1 = 1$ , и мы хотим найти собственные значения, отвечающие краевым условиям i) и ii). Предположим, что стержень колеблется с частотой  $\omega$  и условия  $v'(L) = 0$  выполнены. Тогда, без ограничения общности, мы можем выбрать  $v(L) = 1$ ; следовательно,  $p_n = 0$ ,  $v_n = 1$ , откуда  $D_n^* = \eta_n/2 = U_n^*$  и  $f_n(z) = 1$ . Значения  $v(0) = v_0$ ,  $p(0) = p_0$  связаны с  $D_0, U_0$  посредством

$$D_0 = \frac{1}{2}\{\eta_0 v_0 + \eta_0^{-1} p_0\}, \quad U_0 = \frac{1}{2}\{\eta_0 v_0 - \eta_0^{-1} p_0\},$$

откуда

$$\begin{aligned} \eta_0^2 \frac{v_0}{p_0} &= \frac{D_0 + U_0}{D_0 - U_0} = \frac{z^{-\frac{1}{2}} D_1^* + z^{\frac{1}{2}} U_1^*}{z^{-\frac{1}{2}} D_1^* - z^{\frac{1}{2}} U_1^*} \\ &= \frac{1 + g(z)}{1 - g(z)}, \end{aligned} \quad (12.1.17)$$

где

$$g(z) = z f_1(z). \quad (12.1.18)$$

В следующей задаче нам даны  $f_n(z) = 1$  и  $(\gamma_j)_2^n$ , где  $|\gamma_j| < 1$ . Тогда мы можем вычислить  $f_{n-1}(z), f_{n-2}(z), \dots, f_1$ , используя рекурсию (12.1.16) в обратную сторону:

$$f_{j-1}(z) = \frac{z f_j(z) + \gamma_j}{1 + \gamma_j z f_j(z)}, \quad j = n, n-1, \dots, 2. \quad (12.1.19)$$

Отображение  $z f_j(z)$  на  $f_{j-1}(z)$  имеет вид (12.1.6). Следовательно, область  $|z f_j(z)| \leq 1$  отображается на  $|f_{j-1}(z)| \leq 1$  и область  $|z f_j(z)| = 1$  отображается на  $|f_{j-1}(z)| = 1$ . Однако  $f_n(z) = 1$ , откуда каждый  $(f_j(z))_1^n$  равен  $|f_j(z)| = 1$  при  $|z| = 1$ , т.е. когда  $\omega$  является вещественным числом. Следовательно, функция  $w = g(z)$  отображает  $|z| \leq 1$  на  $|w| \leq 1$  и  $|z| = 1$  на  $|w| = 1$ . Если  $g(z)$  представляется при помощи  $z$ , то она имеет вид

$$g(z) = z P_{n-1}(z) / Q_{n-1}(z), \quad (12.1.20)$$

где  $P_{n-1}(z), Q_{n-1}(z)$  являются полиномами степени  $n - 1$ . Следовательно,  $g(z)$  отображает окружность  $|z| = 1$  в себя  $n$  раз.

Уравнение (12.1.19) показывает, что если  $f_j(z^{-1}) = 1/f_j(z)$ , то  $f_{j-1}(z^{-1}) = 1/f_{j-1}(z)$ . Однако  $f_n(z^{-1}) = 1 = 1/f_n(z)$ , а значит,

$$f_j(z^{-1}) = 1/f_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.1.21)$$

и, следовательно,

$$g(z^{-1}) = 1/g(z). \quad (12.1.22)$$

Отображение области  $|z| = 1$  в себя, задаваемое  $g(z)$ , дает два множества из  $n$  точек на окружности  $|z| = 1$ , которые являются важными, а именно:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{z; |z| = 1 \text{ и } g(z) = 1\}; \\ \mathcal{B} &= \{z; |z| = 1 \text{ и } g(z) = -1\}. \end{aligned}$$

Точки  $\mathcal{A}$  отвечают значениям  $z$ , для которых согласно (12.1.17)  $p_0 = 0$ ; значения  $z$  дают значения  $\omega$ , которые являются собственными значениями для  $i$ ). Аналогично значения  $z$ , принадлежащие множеству  $\mathcal{B}$ , дают такие  $v_0 = 0$ , что  $\omega$  отвечает собственному значению  $ii$ ). Чередование собственных значений из этих двух множеств, доказанное ранее, означает, что точки множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  чередуются на окружности  $|z| = 1$ . Уравнение (12.1.22) показывает, что если  $z$  является элементом одного из этих множеств, то  $z^{-1} = \bar{z}$  является элементом того же множества. Рисунок 12.1.2 показывает эти два множества при  $n = 2$  и  $n = 3$ . Так как  $f_n(1) = 1$ , рекурсия (12.1.19) показывает, что  $f_j(1) = 1$  для  $j = n, n-1, \dots, 1$ . Следовательно,  $g(1) = 1 : 1$  принадлежит  $\mathcal{A}$ . С другой стороны,  $f_j(-1) = (-1)^{n-j}$ , поэтому  $g(-1) = (-1)^n : -1$  принадлежит  $\mathcal{A}$ , если  $n$  является четным, и принадлежит  $\mathcal{B}$ , если  $n$  является нечетным. Легко проверить, что существуют  $n+1$  значений  $z$  в  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , которые удовлетворяют

$$0 \leq \arg(z) \leq \pi. \quad (12.1.23)$$

Если эти точки имеют вид  $z_k = \exp(i\theta_k)$ , где  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \pi$ , то  $\omega_k = \theta_k/(2\Delta) = n\theta_k/(2L)$ , откуда  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = n\pi/(2L)$ . Эти точки  $z$ , отличные от  $z = \pm 1$ , дают  $n-1$  точек  $\bar{z} = z^{-1}$  на нижней половине окружности. Следовательно, эта система также имеет собственные значения

$$\omega_{n+j} = \pi/\Delta - \omega_{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (12.1.24)$$

Так как  $z = \exp(2i\omega\Delta)$  является периодической функцией от  $\omega$  с периодом  $\pi/\Delta$ , то каждое значение  $z$  позволяет построить бесконечную последовательность собственных значений с равными промежутками  $\pi/\Delta$ , и каждое  $z^{-1}$  дает другую такую последовательность. Следовательно, эта система не только имеет собственные значения  $(\omega_j)_0^{2n}$ , но и

$$\omega_{mn+j} = \frac{m\pi}{\Delta} + \omega_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \text{ если } m \text{ является четным,} \quad (12.1.25)$$

$$\omega_{mn+j} = \frac{m\pi}{\Delta} + \omega_{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \text{ если } m \text{ является нечетным.} \quad (12.1.26)$$

Теперь рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении  $\gamma_j$  по спектру. Пусть даны  $n+1$  собственное значение  $\omega_j$ , удовлетворяющее (12.1.3). Мы должны использовать их, чтобы построить  $g(z)$  и, следовательно,  $f_1(z)$ , и тогда найти  $\gamma_j$ , которые в итоге дают  $f_n(z) = 1$ .

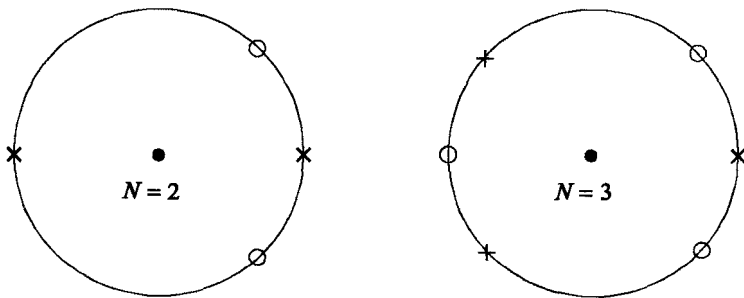


Рис. 12.1.2. Элементы  $A(\times)$  и  $B(\circ)$  чередуются на окружности

Для начала рассмотрим случай, когда  $n$  является четным числом:  $n = 2m$ . Из  $n+1 = 2m+1$  собственных значений  $m+1$  являются четными, отвечающими i),  $m$  являются нечетными, отвечающими ii). Множество  $\mathcal{A}$  состоит из  $2m$  точек:  $z_0 = 1, z_{2m} = -1$  и  $m-1$  пар  $z_{2j}, z_{2j}^{-1}, j = 1, 2, \dots, m-1$ .  $2m$  нечетных  $z$  в  $\mathcal{B}$  принадлежат  $m$  парам  $z_{2j-1}, z_{2j-1}^{-1}, j = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно, из уравнения (12.1.17) следует:

$$\frac{\eta_0^2 v_0}{p_0} = \frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \frac{C \prod_{j=1}^m (z - z_{2j-1})(z - z_{2j-1}^{-1})}{(z^2 - 1) \prod_{j=1}^{m-1} (z - z_{2j})(z - z_{2j}^{-1})}, \quad (12.1.27)$$

откуда  $g(z) = 1$ , если  $z$  является корнем знаменателя, и  $g(z) = -1$ , если  $z$  является корнем числителя. Константа  $C$  должна быть выбрана таким образом, что  $g(0) = 0$ , т.е.  $C = -1$ ; числитель  $g(z)$  в этом случае не будет содержать константу в качестве слагаемого, в то время как наивысшие степени  $z^{2m}$  в знаменателе взаимоуничтожатся, а значит  $g(z)$  будет иметь вид (12.1.20). Обозначим правую часть уравнения (12.1.27) через  $f(z)$ , откуда

$$\frac{1 + g(z)}{1 - g(z)} = f(z) = \zeta. \quad (12.1.28)$$

Функция  $f$  отображает открытую связную область  $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$  в открытую связную область в плоскости  $\zeta$ . Если  $|z| = 1$ , то легко проверить, что  $\overline{f(z)}$ , определенная формулой из (12.1.27), удовлетворяет условию  $\overline{f(z)} = -f(z)$ , поэтому  $\bar{\zeta} = -\zeta : \zeta$  лежит на мнимой оси. Функция  $f$  отображает  $z = 0$  на  $\zeta = 1$ , откуда мы можем заключить, что  $f$  отображает  $|z| \leq 1$  на замкнутую правую полуплоскость, т.е. если  $|z| \leq 1$ , то  $\mathcal{R}\{f(z)\} \geq 0$ ; если  $|z| = 1$ , то  $\mathcal{R}\{f(z)\} = 0$ . Так как заданные собственные числа  $\omega_j$ , отвечающие i) или ii), чередуются, элементы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  тоже чередуются. Тогда, так как мы действовали против часовой стрелки вокруг  $|z| = 1$ , начиная с  $z = 1$ , точки  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  последовательно отображаются в точки в бесконечности и начале координат на плоскости  $\zeta$ . Уравнение (12.1.28) дает

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}.$$

Однако если  $\mathcal{R}\{\zeta\} = \xi \geq 0$ , то  $|\zeta - 1| \leq |\xi + 1|$ , откуда  $|g(z)| \leq 1$ . Получаем, что  $g(z)$  и, следовательно, по лемме Шварца,  $f_1(z)$  ограничена единицей на единичном круге.

Теперь применим алгоритм Шура для получения последовательности  $(f_j(z))_1^n$ . Вид  $g(z)$ , определяемый (12.1.27), приводит к форме

$$f_1(z) = p_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) \quad (12.1.29)$$

с вещественными коэффициентами. Следовательно, все  $\gamma_j$  являются вещественными. Уравнение (12.1.27) показывает, что  $g(z)$  обладает свойствами

$$g(z^{-1}) = 1/g(z), \quad g(1) = 1.$$

Следовательно,  $f_1(z^{-1}) = 1/f_1(z)$  и  $f_1(1) = 1$ . Уравнение (12.1.16) показывает теперь, что

$$f_j(z^{-1}) = 1/f_j(z), \quad f_j(1) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.1.30)$$



так как утверждение справедливо для  $j = 1$ . Следовательно,  $f_j(z)$  имеет вид

$$f_j(z) = P_{n-j}(z)/Q_{n-j}(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.1.31)$$

а значит, последовательность заканчивается  $f_n(z) = 1$ , как и требовалось, и  $\gamma_j$  удовлетворяет неравенствам

$$-1 < \gamma_j < 1, \quad j = 2, 3, \dots, n; \quad \gamma_{n+1} = 1. \quad (12.1.32)$$

Так как  $A_1 = 1$  по условию, то величины  $\gamma_j$  дают единственное множество конечных положительных  $(A_j)_1^n$ , как и требовалось. Обратим внимание, что условие (12.1.5) гарантирует существование значения  $\gamma_j$ , удовлетворяющего (12.1.32).

С вычислительной точки зрения алгоритм Шура дает рекурсивное соотношение для коэффициентов полиномов  $P_{n-j}(z)$  и  $Q_{n-j}(z)$ . Пусть

$$P_{n-j}(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_{n-j,k} z^k, \quad Q_{n-j}(z) = \sum_{k=0}^{n-j} b_{n-j,k} z^k.$$

Из уравнения (12.1.27) на основе имеющихся данных можно найти значения  $a_{n-j,k}$  и  $b_{n-j,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-j$ ). Уравнение (12.1.31) утверждает, что

$$a_{n-j,k} = b_{n-j,n-j-k} \quad k = 0, 1, \dots, n-j,$$

следовательно, последовательности  $\{a_{n-j,k}\}_0^{n-j}$  и  $\{b_{n-j,k}\}_0^{n-j}$  состоят из одинаковых чисел, взятых в обратном порядке.

Из рекурсивного соотношения (12.1.16) следует

$$\begin{aligned} \gamma_j &= a_{n-j+1,0}/b_{n-j+1,0}, \\ a_{n-j,k} &= a_{n-j+1,k+1} - \gamma_j b_{n-j+1,k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-j, \\ b_{n-j,k} &= b_{n-j+1,k} - \gamma_j a_{n-j+1,k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-j. \end{aligned}$$

Наиболее простой вариант алгоритма имеет три шага; мы модифицировали метод Кайлаша и Лева-Ари [189] (1987):

**I.** Рассмотрим коэффициенты  $P_{n-1}(z)$  из уравнения (12.1.27) и построим  $G_0 \in M_{2,n}$ :

$$G_0 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad a_k = a_{n-1,k}.$$

II. Вычислим  $\gamma_n = a_0/a_{n-1}$  и построим

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{n-3} & a'_{n-2} \\ a'_{n-2} & a'_{n-3} & \dots & a'_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

III. Сдвинем верхнюю строку матрицы, построенной в II, влево и со-  
трем последний столбец, чтобы построить  $\mathbf{G}_1 \in M_{2,n-1}$ :

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} a'_0 & a'_1 & \dots & a'_{n-2} \\ a'_{n-2} & a'_{n-3} & \dots & a'_0 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к шагу I.

Брукштейн и Кайлаш (1987) [42] показали, что алгоритм Шура является эффективным и вычислительно-стабильным.

Заметим, что, делая незначительные модификации в рассуждениях (см. упр. 12.1.2), мы можем построить модель Гуппиларда из  $n$  чередующихся собственных значений  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n = n\pi/(2L)$ , отвечающих граничным условиям

$$\text{i) } v'(0) = 0 = v(L), \text{ нечетное } \omega_j, \quad \text{ii) } v(0) = 0 = v(L), \text{ четное } \omega_j. \tag{12.1.33}$$

Однако *невозможно* использовать, по существу, алгебраические методы, описанные здесь, для построения  $A_\pm$  из собственных чисел,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ , отвечающих краевым условиям общего вида

$$v'(0) = 0 = v'(L) + Hv(L); \quad v(0) = 0 = v'(L) + Hv(L).$$

Это происходит из-за того, что при таких условиях  $\omega$  появится в рассуждениях само по себе, а не только в виде  $\exp(2i\omega\Delta)$ .

Возможно модифицировать наши рассуждения (см. упр. 12.1.2) так, чтобы они были применимы к кусочно-равномерной струне, описываемой уравнением (10.1.1), однако теперь модель будет состоять из струны с плотностью  $\rho^2(x)$ , удовлетворяющей условию  $\rho(x) = \eta_j^2$ ,  $x_{j-1} < x < x_j$ , где  $\eta_j^2 * (x_j - x_{j-1})$  постоянна при  $j = 1, 2, \dots, n$ .

### Упражнения 12.1

- 1) Сделайте необходимые изменения в рассуждениях этого параграфа, чтобы они были применимы к случаю, когда  $n$  является нечетным

числом. Рассмотрите  $n = 2m - 1$ . Покажите, что  $\mathcal{A}$  состоит из  $z_0 = 1$  и  $m - 1$  пар  $z_{2j}, z_{2j}^{-1}, j = 1, 2, \dots, m - 1$ , а  $\mathcal{B}$  состоит из  $z_{2m-1} = -1$  и  $m - 1$  пары  $z_{2j-1}, z_{2j-1}^{-1}, j = 1, 2, \dots, m - 1$ . Следовательно, покажите, что

$$\frac{\eta_0^2 v_0}{p_0} = \frac{1 + g(z)}{1 - g(z)} = C \frac{z + 1}{z - 1} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \frac{(z - z_{2j-1})(z - z_{2j-1}^{-1})}{(z - z_{2j})(z - z_{2j}^{-1})},$$

здесь снова  $g(0) = 0$  влечет  $C = -1$ .

- 2) Сделайте изменения, необходимые для того, чтобы рассуждения были применимы к (12.1.33).
- 3) Для струны, которая описывается уравнением (10.1.1) при  $\rho(x) = \eta^2(x)$ , подходящие нижняя и верхняя величины задаются уравнением (12.1.8), где теперь

$$v'(x) = i\omega p(x), \quad p'(x) = i\omega \eta^4(x)v(x).$$

Обратите внимание, что  $v$  и  $v'$ , т.е.  $p$ , являются непрерывными в точках разрыва  $\rho(x)$ . Покажите, что

$$D' = i\omega \eta^2 D + \eta' \eta^{-1} U, \quad U' = -\omega \eta^2 U + \eta' \eta^{-1} D$$

и при постоянной функции  $\eta$

$$D = D_0 \exp(i\omega \eta^2 x), \quad U = U_0 \exp(-i\omega \eta^2 x).$$

Это означает, что мы должны выбрать промежутки равномерности так, чтобы  $\eta_j^2 * (x_j - x_{j-1}) = \text{const}$ . Теперь, когда  $\gamma_j$  уже найдены, найдите также точки разрыва  $x_j$ .

## 12.2. Изоспектральные стержни и преобразование Дарбу

Мы обозначим спектр стержня, описываемого при помощи уравнения

$$(Av')' + \lambda Av = 0 \tag{12.2.1}$$

и краевых условий

$$A(0)v'(0) - kv(0) = 0 = A(\pi)v'(\pi) + Kv(\pi), \tag{12.2.2}$$

как  $\sigma(A, k, K)$ . Если два таких стержня имеют одинаковый спектр, т. е.

$$\sigma(A_1, k_1, K_1) = \sigma(A_2, k_2, K_2), \quad (12.2.3)$$

то мы будем говорить, что они являются *изоспектральными*.

Простейший, почти тривиальный, пример пары изоспектральных стержней получается посредством физического поворота стержня вместе с механизмами закрепления его концов таким образом, что

$$A_2(x) = A_1(\pi - x), \quad k_2 = K_1, \quad K_2 = k_1.$$

Это никак не отразится на спектре, поэтому

$$\sigma(A(x), k, K) = \sigma(A(\pi - x), K, k). \quad (12.2.4)$$

Для того чтобы избежать усложнений, мы будем в дальнейшем предполагать, что  $A(x) = a^2(x)$  является положительной, дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $x$ . Это ограничение не является обязательным, однако к этому моменту нам уже не актуально обсуждать более тонкие детали анализа. Мы оставляем читателю проверку того, какие условия регулярности являются достаточными в различных местах наших рассуждений.

Для получения следующей простой пары мы заметим, что если  $v$  удовлетворяет (12.2.1), то  $w = Av'$  удовлетворяет

$$(A^{-1}w')' + \lambda A^{-1}w = 0,$$

что есть в точности (12.2.1), если  $A$  заменить на  $A^{-1}$ . Теперь рассмотрим краевые условия. Получим

$$w = Av', \quad w' = -\lambda Av.$$

Следовательно, если исходный стержень является консолью, при  $v(0) = 0 = v'(\pi)$ , то новый стержень удовлетворяет условиям  $w'(0) = 0 = w(\pi)$ , а значит, он является обратной консолью. Консоль не может обладать нулевым собственным значением, откуда мы получаем, что

$$\sigma(A, \infty, 0) = \sigma(A^{-1}, 0, \infty),$$

и, используя (12.2.4), мы также получаем, что

$$\sigma(A(x), \infty, 0) = \sigma(A^{-1}(\pi - x), \infty, 0).$$

Этот результат известен давно, см. Эйснер (Eisner) [83] (1967), Бенате (Benade) [26] (1976), и был недавно переоткрыт снова Рамом и Элхаем [285] (1995); они исследовали и многие другие интересные дуальности.

Если исходный стержень является свободным, т.е.  $v'(0) = 0 = v'(\pi)$ , то  $w(0) = 0 = w(\pi)$ , а значит, новый стержень является опертым. Однако свободный стержень имеет нулевое собственное число с собственной функцией  $v = 1$ , для которой  $w = 0$ . Следовательно, нулевое собственное значение не появится в спектре при рассмотрении опертого стержня. В итоге мы получим, что

$$\sigma'(A, 0, 0) = \sigma(A^{-1}, \infty, \infty),$$

где ' показывает, что нулевое собственное число было пропущено.

Для проведения более систематического исследования изоспектральных пар мы редуцируем (12.2.1) к стандартной форме Штурма–Лиувилля, как в параграфе 10.1. Запишем

$$A = a^2, \quad y = av, \quad (12.2.5)$$

тогда

$$Av' = a^2v' = ay' - a'y, \quad (12.2.6)$$

значит, (12.2.1) редуцируется к форме Штурма–Лиувилля

$$y'' + (\lambda - p)y = 0, \quad (12.2.7)$$

где

$$a'' - pa = 0. \quad (12.2.8)$$

Для заданного  $A$  или  $a$  существует единственное такое  $p$ , однако для заданного  $p$  существует много значений  $a$ . Это позволяет найти еще ряд изоспектральных множеств. В то же время достаточно простая и замеченная еще Бернулли и Эйлером неопределенность, появляющаяся при преобразовании Лиувилля в обратной задаче собственных значений, кажется впервые систематически изучалась Хохштадтом [177] (1975а). Он доказал, что классические теоремы единственности для задачи Штурма–Лиувилля справедливы с *точностью до* преобразования Лиувилля: если  $a_0$  соответствует заданному  $p$ , то изменение параметров дает общее решение

$$a(x) = a_0(x) \left\{ d_0 + d_1 \int_0^x \frac{ds}{a_0^2(s)} \right\}, \quad d_0, d_1 - \text{константы.}$$

Условие нормализации  $a(0) = 1$  влечет  $d_0 = 1$ , откуда

$$a(x) = a_0(x) \left\{ 1 + d_1 \int_0^x \frac{ds}{a_0^2(s)} \right\}. \quad (12.2.9)$$

Константа  $d_1$  должна быть выбрана так, что  $A > 0$  для  $0 \leq x \leq \pi$ ; это возможно тогда и только тогда, когда

$$1 + d_1 \rho > 0, \text{ где } \rho = \int_0^\pi \frac{ds}{a_0^2(s)}. \quad (12.2.10)$$

Если  $v_0, v$  являются решениями (12.2.1), отвечающими одному  $y$ , то

$$a_0 v_0 = y = av.$$

Простые вычисления показывают, что если  $v_0$  удовлетворяет условиям

$$A_0(0)v_0'(0) - k_0 v_0(0) = 0 = A_0(\pi)v_0'(\pi) + K_0 v_0(\pi), \quad (12.2.11)$$

то  $v$  удовлетворяет (12.2.2) при

$$k = k_0 - d_1 \quad K = K_0(1 + d_1 \rho) + d_1 a_0(\pi), \quad (12.2.12)$$

где  $\rho$  определяется формулами (12.2.10). Следовательно, при условии, что  $d_1$  удовлетворяет

$$-j_0 < d_1 < k_0, \quad j_0 = \frac{K_0}{K_0 \rho + a_0(\pi)}, \quad (12.2.13)$$

мы получили однопараметрическое семейство стержней с положительными пружинными связями:

$$\sigma(A, k, K) = \sigma(A_0, k_0, K_0).$$

В частности, если  $k_0 = \infty = K_0$ , то  $k = \infty = K$  и

$$\sigma(A, \infty, \infty) = \sigma(A_0, \infty, \infty)$$

только при условии, что  $d_1$  удовлетворяет (12.2.10).

В цикле статей Исааксона (Isaacson) и Трубовича (Trubowitz) [186] (1983), Исааксона, МакКена (McKeon) и Трубовича [187] (1984), Дахлберга (Dahlberg) и Трубовича [68] (1984), Трубович и его соавторы получили полную характеризацию изоспектральных потенциалов  $p(x)$  для задачи Штурма–Лиувилля (12.2.7) с различными множествами граничных условий. Колеман и МакЛафлин в работах [62] (1993а), [63] (1993b) обобщили эти рассуждения на уравнение (12.2.1) с граничными условиями Дирихле. В этом параграфе у нас более простая цель: показать, как получать семейства стержней, которые являются изоспектральными к заданному стержню, на основе работы Глэдвелла и Мораси (1995) [122].

Рассуждения основываются на фундаментальном результате о том, что если  $A$  и  $B$  — линейные операторы, то  $AB + \mu$  и  $BA + \mu$  имеют одинаковые собственные значения, исключая, возможно,  $\mu$ . Иначе, если  $AB + \mu$  обладает собственным значением  $\lambda$ , то существует вектор  $u \neq 0$  такой, что  $(AB + \mu)u = \lambda u$ . Следовательно,  $ABu = (\lambda - \mu)u$ , значит  $\lambda \neq \mu$  дает  $Bu \neq 0$ .  $B(ABu) = BA(Bu) = (\lambda - \mu)Bu$ , т. е.  $(BA + \mu)Bu = \lambda(Bu)$ . Так как  $Bu \neq 0$ , элемент  $\lambda$  является собственным значением для  $BA + \mu$ .

Для применения этого факта к нашей ситуации разложим оператор

$$D^2 - p + \mu = (D + \alpha)(D - \alpha) = D^2 - \alpha' - \alpha^2.$$

Следовательно,  $p = \alpha' + \alpha^2 + \mu$ . Возьмем  $\alpha = g'/g$  так, что  $p = (g''/g) + \mu$ . Это означает, что  $g$  удовлетворяет уравнению

$$g'' + (\mu - p)g = 0. \quad (12.2.14)$$

Кроме того,  $y$  удовлетворяет уравнению

$$y'' + (\lambda - p)y = 0, \quad (12.2.15)$$

тогда

$$0 = (D^2 - p + \lambda)y = \{(D + \alpha)(D - \alpha) + \lambda - \mu\}y = 0,$$

а значит,  $z = (D - \alpha)y$  удовлетворяет

$$\{(D - \alpha)(D + \alpha) + \lambda - \mu\}z = 0,$$

т. е.  $(D^2 + \alpha' - \alpha^2 + \lambda - \mu)z = 0$ . Запишем это как

$$z'' + (\lambda - q)z = 0, \quad (12.2.16)$$

где

$$q = -\alpha' + \alpha^2 + \mu = p - 2\alpha' = p - 2(\ln g)'' \quad (12.2.17)$$

Мы можем интерпретировать эти рассуждения, называемые леммой Дарбу или преобразованием Дарбу в честь Дарбу [69] (1882), [70] (1915), различными способами. Можно утверждать, что, начав с некоторой системы, имеющей потенциал  $p$  и решение  $y$ , мы можем найти другую систему с потенциалом  $q$  и решением

$$z = (D - \alpha)y = y' - \frac{g'y}{g} = \frac{[g, y]}{g}, \quad (12.2.18)$$

где *скобка* определяется следующим образом:

$$[g, y] := gy' - g'y. \quad (12.2.19)$$

Иначе, можно утверждать, что для заданных  $y$  — решение уравнения (12.2.15) и  $g$  — решение уравнения (12.2.14) мы можем построить решение  $z$  уравнения (12.2.16), задаваемое формулой (12.2.18), где  $q$  связано с  $p$  при помощи формулы (12.2.17).

Заметим, что  $\lambda \neq \mu$ . Можно показать (упр. 12.2.1), что при  $\lambda = \mu$  общее решение для (12.2.16) имеет вид

$$z = \frac{1}{g} \left( 1 + d \int_0^x g^2(s) ds \right), \quad d = \text{const.} \quad (12.2.20)$$

Предположим, что у нас есть стержень  $A(x)$  со спектром  $\{\lambda_n\}_0^\infty$ , отвечающим краевым условиям (12.2.2). Переходя к форме Штурма-Лиувилля, мы получим множество собственных функций  $y_n$ , удовлетворяющих уравнению

$$y_n'' + (\lambda_n - p)y_n = 0, \quad (12.2.21)$$

где  $p$  определяется уравнением (12.2.8), и краевыми условиями

$$y_n'(0) - hy_n(0) = 0 = y_n'(\pi) + Hy_n(\pi), \quad (12.2.22)$$

где

$$h = k + a'(0)/a(0) \quad H = K - a'(\pi)/a(\pi). \quad (12.2.23)$$

В частности, нулевые собственные функции  $y_0$  удовлетворяют уравнению

$$y_0'' + (\lambda_0 - p)y_0 = 0. \quad (12.2.24)$$



Рассматривая  $\mu = \lambda_0$ ,  $g = y_0$ , получим, что

$$z_n = \frac{1}{y_0} [y_0, y_n] \quad (12.2.25)$$

является решением

$$z_n'' + (\lambda_n - q)z_n = 0, \quad (12.2.26)$$

где

$$q = p - 2(\ell n y_0)''. \quad (12.2.27)$$

Мы можем применять этот результат, только если величина  $y_0$  положительна при  $0 \leq x \leq \pi$ . Это условие выполняется, если  $k, K$  являются конечными. Так как  $y_0, y_n$  удовлетворяют тем же условиям (12.2.22),  $z_n$  удовлетворяет

$$z_n(0) = 0 = z_n(\pi). \quad (12.2.28)$$

Это означает, что собственная функция новой системы Штурма–Лиувилля удовлетворяет краевым условиям Дирихле. Теперь нам надо найти функцию  $b(x)$  или на самом деле семейство таких функций  $b(x)$ , соответствующих  $q$ .

Исходная система Штурма–Лиувилля имеет вид (12.2.7). Как было показано ранее, существует семейство стержней с площадями поперечных сечений  $A(x) = a^2(x)$ , ассоциированных с  $p$ . Если,  $a_0(x)$  принадлежит этому семейству, то каждый элемент семейства можно записать в виде

$$a(x) = a_0(x) \left\{ 1 + d_1 \int_0^x \frac{ds}{a_0^2(s)} \right\}. \quad (12.2.29)$$

Заметим, что если  $d_1$  удовлетворяет (12.2.10), то функция  $a(x)$  является положительной на  $[0, \pi]$ ; иначе,  $a(x)$  один раз меняет знак на  $[0, \pi]$ . Все функции  $a(x)$  удовлетворяют уравнению (12.2.8). Заменяя  $\lambda$  на 0 в предыдущем рассуждении, мы получим, что

$$b = \frac{1}{y_0} [y_0, a] \quad (12.2.30)$$

удовлетворяет  $b'' - qb = 0$ . Для того чтобы таким образом определенная функция  $b$  отвечала именно стержню, она должна иметь постоянный знак на  $[0, \pi]$ . Вначале покажем, что  $b(x)$  может иметь не более одного нуля в любом интервале, в котором  $a(x)$ , определенная формулой (12.2.29), имеет постоянный знак. Иначе предположим, что  $b(x)$  имеет

два нуля,  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  на этом интервале, тогда по теореме Ролля функция  $[y_0, a]'$  должна быть нулевой в промежуточной точке. Однако

$$[y_0, a]' = (y_0 a' - y_0' a)' = y_0 a'' - y_0'' a = -\lambda_0 y_0 a \neq 0,$$

получили противоречие.

Возможны два случая:

- i) функция  $a$ , определяемая формулой (12.2.29), является положительной на  $[0, \pi]$ . Для  $a > 0$ ,  $1 + d_1 \rho > 0$  (см. 12.2.10)). Тогда функция  $b$  имеет не более одного нуля на  $[0, \pi]$ , а значит, она не может иметь нулей, если она имеет одинаковые знаки в 0 и  $\pi$ . Простые вычисления показывают, что

$$b(0) = -ka(0), \quad b(\pi) = Ka(\pi). \quad (12.2.31)$$

Так как  $k, K$  связаны с  $k_0, K_0$  посредством формулы (12.2.12),  $b(x)$  будет иметь постоянный знак при условии

$$d_1 > k_0 \text{ или } -\frac{1}{\rho} < d_1 < -j_0, \quad (12.2.32)$$

где  $j_0$  задается условиями (12.2.13).

- ii) функция  $a(x)$ , определяемая формулой (12.2.29), обладает одним нулем на промежутке  $[0, \pi]$ . В этом случае  $a(\xi) = 0$  для некоторого  $\xi \in [0, \pi]$  и  $d_1 \leq -1/\rho$ . Так как  $b(\xi) = d_1/a_0(\xi) < 0$ ,  $b(\xi)$  имеет постоянный знак тогда и только тогда, когда  $b(0) < 0, b(\pi) < 0$ , т. е. если  $d_1 < -j_0$ . Однако так как  $d_1 \leq -1/\rho$ , это условие выполнено автоматически. Получаем, что формулы (12.2.29), (12.2.30) задают собственный стержень с фиксированными краевыми условиями, если  $d_1 > k_0$  или  $d_1 < -j_0$ . Заметим, что в обоих случаях промежуточная система, определяемая  $a(x), k, K$ , не является собственной, так как неравенства (12.2.13) не выполняются.

Заметим, что ограничение  $\lambda \neq \mu$ , возникшее из рассмотрения  $AB + \mu$  и  $BA + \mu$ , означает, что новый стержень  $b(x)$  с фиксированными концами не обладает собственным значением  $\lambda_0$ , поэтому

$$\sigma'(A_0, k_0, K_0) = \sigma(B, \infty, \infty), \quad (12.2.33)$$

где штрих показывает, что  $\lambda_0$  было удалено.

Если исходный стержень является свободным ( $k_0 = 0 = K_0$ ), то  $\lambda_0 = 0$  и  $y_0 = g$ . Теперь уравнение (12.2.20) утверждает, что общее уравнение  $b'' - qb = 0$  имеет вид

$$b = \frac{1}{g} \left( 1 + d \int_0^x g^2(s) ds \right). \quad (12.2.34)$$

Это решение является положительным на  $[0, \pi]$  при условии  $1 + d \int_0^\pi g^2(s) ds > 0$ . Снова

$$\sigma'(A_0, 0, 0) = \sigma(B, \infty, \infty). \quad (12.2.35)$$

Покажем теперь, что  $\lambda_n$  и  $w_n = z_n/b$ , задаваемые уравнением (12.2.25), являются на самом деле  $(n-1)$ -ми собственным значением и собственной функцией стержня  $B$ . Сначала покажем, что существует ноль функции  $y_n$  между двумя нулями  $z_n$ . Если  $x_1, x_2$  являются последовательными нулями функции  $z_n$ , то

$$0 = [y_0, y_n] \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (y_0 y_n'' - y_0'' y_n) ds = (\lambda_0 - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} y_0 y_n ds.$$

Однако  $y_0$  обладает постоянным знаком на промежутке  $[0, \pi]$ , откуда следует, что функция  $y_n$  должна менять знак и обладает нулем между  $x_1$  и  $x_2$ . Теперь покажем, что существует ноль  $z_n$  между последовательными нулями функции  $y_n$ . Это следует из формулы (12.2.25), а именно:

$$z_n = y_n' - \frac{y_0'}{y_0} y_n,$$

где  $y_n = 0, z_n = y_n'$ . Однако функция  $y_n'$  имеет противоположные знаки на последовательных нулях  $y_n$ . Следовательно,  $z_n$  меняет знак и поэтому обладает нулем между нулями  $y_n$ . Получаем, что нули  $y_n$  и  $z_n$  чередуются. Однако  $y_n$  имеет  $n$  нулей на промежутке  $(0, \pi)$ , в то время как  $z_n(0) = 0 = z_n(\pi)$ . Следовательно,  $z_n$  имеет  $(n-1)$  нулей на  $(0, \pi)$ ; она является  $(n-1)$ -ой собственной функцией. Тогда мы можем переписать (12.2.33) в виде:

$$\lambda_n(A_0, k_0, K_0) = \lambda_{n-1}(B, \infty, \infty). \quad (12.2.36)$$

Последующие рассуждения ломаются, если  $y_0$  имеет ноль на конце, что имеет место в случае, когда один или другой конец исходного стержня является фиксированным. В таких случаях, а также для того, чтобы снять символ ' в (12.2.33), нам потребуется модифицировать наши рассуждения о двойной перестановке порядка сомножителей в дифференциальном уравнении. Крум (Crum) [65] (1955) приводит другой подход к поиску пар решений уравнения Штурма–Лиувилля.

### Упражнения 12.2

- 1) Покажите, что общее решение уравнения (12.2.16) удовлетворяет уравнению (12.2.20).
- 2) Уравнение (12.2.36) утверждает, что  $(n - 1)$ -е собственное значение одного стержня равно  $n$ -у собственному значению для другого. Это означает, что  $(n - 1)$ -е собственное значение уравнения (12.2.26) равно  $n$ -ому собственному значению уравнения (12.2.21). Исследуйте асимптотическую форму двух спектров из уравнений (10.9.19) и (10.9.20) для того, чтобы показать, что они совместны с этим утверждением.

## 12.3. Двойное преобразование Дарбу

Рассмотрим стержень  $A_0(x)$  со спектром  $\{\lambda_n\}_0^\infty$ , соответствующий краевым условиям (12.2.2). Преобразуя к  $S - L$ -форме, мы получаем множество собственных функций  $y_n$ , удовлетворяющих

$$y_n'' + (\lambda_n - p)y_n = 0,$$

и некоторые граничные условия

$$y_n'(0) - h y_n(0) = 0 = y_n'(\pi) + H y_n(\pi),$$

как и ранее. Выберем теперь некоторое собственное число и собственную функцию  $\lambda_m, y_m$ ;  $m$  не обязательно является нулевой. Следовательно,  $y_m$  удовлетворяет уравнению  $y_m'' + (\lambda_m - p)y_m = 0$ . Применяя лемму Дарбу, найдем нетривиальное решение

$$z_n = \frac{1}{y_m} [y_m, y_n], \quad n \neq m, \quad (12.3.1)$$

для

$$z_n'' + (\lambda_n - q)z_n = 0, \quad (12.3.2)$$

где

$$q = p - 2(\ell n y_m)''. \quad (12.3.3)$$

С другой стороны, вторая часть леммы Дарбу, формула (12.2.20), утверждает, что общее решение для уравнения

$$z_m'' + (\lambda_m - q)z_m = 0 \quad (12.3.4)$$

имеет вид

$$z_m = \frac{1}{y_m} \left( 1 + d \int_0^x y_m^2(s) ds \right). \quad (12.3.5)$$

Применим лемму Дарбу к уравнениям (12.3.2), (12.3.4) и получим, что если  $n \neq m$ , то

$$w_n = \frac{1}{z_m} [z_m, z_n] \quad (12.3.6)$$

является нетривиальным решением уравнения

$$w_n'' + (\lambda_n - r)w_n = 0, \quad (12.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} r &= q - 2(\ell n z_m)'' \\ &= p - 2(\ell n (y_m z_m))''. \end{aligned} \quad (12.3.8)$$

Теперь изучим  $w_n$  и  $r$ . Для начала заметим, что уравнение (12.3.5) влечет

$$y_m z_m = 1 + d \int_0^x y_m^2(s) ds. \quad (12.3.9)$$

Если  $y_m$  отнормировано таким образом, что  $\int_0^\pi y_m^2(s) ds = 1$ , то произведение  $y_m z_m$  положительно, а значит, функция  $r$  непрерывна при  $d > -1$ . Теперь вычислим функцию  $w_n$ : она равна

$$w_n = \frac{1}{z_m} (z_m z_n' - z_m' z_n) = z_n' - \frac{z_m'}{z_m} z_n.$$

Однако уравнение (12.3.1) показывает, что

$$z'_n = \frac{y_m y_n'' - y_m'' y_n}{y_n} - \frac{y_m'}{y_m} z_n = (\lambda_m - \lambda_n) y_n - \frac{y_m'}{y_m} z_n,$$

значит,

$$w_n = (\lambda_m - \lambda_n) y_n - \frac{(y_m z_m)'}{(y_m z_m)} z_n.$$

Однако так как  $z_n(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{y_m y_n' - y_m' y_n}{y_m} = \frac{1}{y_m} \int_0^x (y_m y_n'' - y_m'' y_n) ds \\ &= \frac{(\lambda_m - \lambda_n)}{y_m} \int_0^x y_m y_n ds. \end{aligned}$$

Это означает, что  $w_n$  обладает множителем  $(\lambda_m - \lambda_n)$ ; определим

$$w_n^0 = \frac{w_n}{\lambda_m - \lambda_n}$$

и воспользуемся (12.3.9), чтобы получить  $y_m z_m$ , найдем

$$w_n^0 = y_n - \frac{dy_m \int_0^x y_m(s) y_n(s) ds}{1 + d \int_0^x y_m^2(s) ds}. \quad (12.3.10)$$

Теперь видно, что это нетривиальное решение (12.3.7), даже если индекс  $n$  в этом уравнении равен  $m$ . Можно показать (упр. 12.3.1), что  $w_n^0$  отнормировано так, что  $\int_0^\pi [w_n^0(s)]^2 ds = 1$ .

Теперь нам необходимо найти соответствующие стержни. Начнем со стержня для  $a(x)$ , удовлетворяющего уравнению

$$a'' - pa = 0. \quad (12.3.11)$$

Применяя лемму Дарбу к этому уравнению и  $y_m'' + (\lambda_m - p)y_m = 0$ , получим, что

$$b = \frac{1}{y_m} [y_m, a] \quad (12.3.12)$$

удовлетворяет уравнению

$$b'' - qb = 0. \quad (12.3.13)$$

Теперь применим лемму Дарбу к этому уравнению и (12.3.5) и найдем, что

$$c = \frac{1}{z_m} [z_m, b] \quad (12.3.14)$$

удовлетворяет уравнению

$$c'' - rc = 0. \quad (12.3.15)$$

Можно найти  $c$  так же, как и  $w_n^0$ :

$$c(x) = a(x) - \frac{dy_m(x)[y_m, a]}{\lambda_m \left\{ 1 + d \int_0^x y_m^2(s) ds \right\}}. \quad (12.3.16)$$

Заметим, что аналогично тому, как  $a(x)$  является решением (12.3.11) и  $b(x)$  является решением (12.3.13), то и  $c(x)$  является решением (12.3.15); другие решения могут быть найдены как и в параграфе 12.2, см. уравнение (12.2.9).

Выясним теперь, когда  $c(x)$  имеет постоянный знак на  $[0, \pi]$ . Пусть краевые условия для исходного стержня имеют вид (12.2.2), т. е.

$$A(0)v'(0) - k_1v(0) = 0 = A(\pi)v'(\pi) + K_1v(\pi).$$

Уравнения (12.2.5), (12.2.6) показывают, что они переходят в

$$[a, y](0) - k_1y(0)/a(0) = [a, y](\pi) + Ky(\pi)/a(\pi),$$

поэтому краевые условия для  $c(x)$  из (12.3.16) удовлетворяют равенствам

$$\frac{c(0)}{a(0)} = 1 + \frac{dk_1y_m^2(0)}{\lambda_m a^2(0)} = \beta_0, \quad (12.3.17)$$

$$\frac{c(\pi)}{a(\pi)} = 1 - \frac{dK_1y_m^2(\pi)}{\lambda_m(1+d)a^2(\pi)} = \beta_1. \quad (12.3.18)$$

Заметим, что, если только исходный стержень не является зафиксированным ( $y_m(0) = 0$ ) или не является свободным ( $k = 0$ ) на левом конце, новая функция  $c(x)$  не будет отнормирована таким образом, что  $c(0) = 1$ . Покажем теперь, что если  $d > -1$ , то оба значения  $\beta_0$  и  $\beta_1$  являются положительными. Пусть  $v_m$  является  $m$ -той формой колебания исходного стержня; тогда  $(Av'_m)' + \lambda_m Av_m = 0$ , откуда

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \lambda_m \int_0^\pi Av_m^2 dx = - \int_0^\pi v_m (Av'_m)' dx \\ &= [-v_m (Av'_m)]_0^\pi + \int_0^\pi Av_m'^2 ds \\ &= k_1 v_m^2(0) + K_1 v_m^2(\pi) + \int_0^\pi Av_m'^2 dx,\end{aligned}$$

значит  $\lambda_m > k_1 v_m^2(0) + K_1 v_m^2(\pi)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned}\beta_0 &> \frac{(1+d)k_1 v_m^2(0) + K_1 v_m^2(\pi)}{\lambda_m} > 0, \\ \beta_1 &> \frac{(1+d)k_1 v_m^2(0) + K_1 v_m^2(\pi)}{\lambda_m(1+d)} > 0.\end{aligned}$$

Эти неравенства справедливы при условии, что  $k_m m_m^2(0)$  и  $K_1 v_m^2(\pi)$  не являются оба нулевыми, т.е. необходимо, чтобы не более чем один конец стержня являлся свободным ( $k_1$  или  $K_1$  равны нулю) или фиксированным ( $v_m(0)$  или  $v_m(\pi)$  равны нулю).

Мы получили однопараметрическое семейство стержней  $c(x) = c(x, d)$ , определенное при  $x \in [0, \pi]$ ,  $d > -1$ ; каждый элемент семейства является положительным при  $x = 0$  и  $x = \pi$ , а если  $d = 0$ ,  $c(x, 0) = a(x)$ , то является положительным при  $x \in [0, \pi]$ . Чтобы установить положительность  $c(x, d)$  для всех  $x \in [0, \pi]$ ,  $d > -1$ , мы воспользуемся следующей леммой о деформации.

**Лемма 12.3.1.** Пусть  $h_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , является семейством вещественнозначных функций на  $a \leq x \leq b$ , которые одновременно непрерывно дифференцируемы по  $t$  и  $x$ . Предположим, что для каждого  $t$   $h_t$  имеет конечное число нулей на  $[a, b]$ , все они являются простыми



и имеют граничные значения, знаки которых не зависят от  $t$ . Тогда  $h_0$  и  $h_1$  имеют одинаковое число нулей на  $[a, b]$ .

Это немного расширенная версия леммы 3 из работы [269] (1987) (стр. 41) Пошела и Трубовича (Pöschel and Trubowitz); они просто предполагали, что  $h_i$  имеет граничные значения, не зависящие от  $t$ , однако непосредственно проверяется, что их доказательство справедливо уже, если знаки этих граничных значений не зависят от  $t$ .

Легко видеть, что  $c(x, d)$  может обладать только конечным числом нулей, и что эти нули должны быть простыми (упр. 12.3.2), значит, лемма дает, что  $c(x, d)$ , так же как и  $c(x, 0) = a(x)$ , не должны иметь нулей и, следовательно, являются положительными при  $x \in [0, \pi]$  и  $d > -1$ . Мы можем использовать лемму о деформации для того, чтобы показать, что функция  $c(x)$  является положительной в предельных случаях, в которых каждый конец стержня является либо свободным, либо опертым.

Проверим теперь краевые условия для нового стержня. Собственные функции нового стержня имеют вид  $u_n = w_n^0/c$ .

Технические, но прямолинейные вычисления показывают, что новый стержень имеет краевые условия

$$C(0)u'(0) - k_2u(0) = 0 = C(\pi)u'(\pi) + K_2u(\pi),$$

где  $C(x) = c^2(x)$  и

$$k_2 = \beta_0 k_1, \quad K_2 = \beta_1 K_1.$$

Следовательно,

$$\sigma(A, k_1, K_1) = \sigma(C, k_2, K_2)$$

и, в частности,

$$\sigma(A, 0, 0) = \sigma(C, 0, 0),$$

а

$$\sigma(A, \infty, \infty) = \sigma(C, \infty, \infty).$$

Необходимо помнить, что конкретное  $C$ , построенное по данному  $A$ , зависит от краевых условий, отвечающих исходному стержню, и значения  $m$ , выбранного в преобразовании Дарбу.

### Упражнения 12.3

1) Покажите, что  $w_n^0$  из (12.3.10) отнормирована так, что

$$\int_0^\pi [w_n^0(s)]^2 = 1.$$

2) Покажите, что нули  $c(x, d)$  из (12.3.16) являются простыми.

## 12.4. Исследования Готтлиба

Х. П. В. Готтлиб (H. P. W. Gottlieb) вел исследования различных колебательных систем — стержней, струн, балок, мембран, площадок, и т. д. среди других вопросов начиная с 1984. В этой главе мы даем беглое описание некоторых из этих исследований, которые относятся к струнам, стержням и балкам.

Начнем с описания одной из ранних статей Готтлиба (1986), [138], которая основывается на более ранних работах Левинсона [208] (1976) и Саката и Саката (Sakata, Sakata) [299] (1980). Сделаем замечание касательно работы Готтлиба [138] (1986) в параграфе 11.1; работа Готтлиба была мотивирована тем фактом, центральным для исследований из главы 11, что два спектра, отвечающие двум различным условиям на одном конце струны, необходимы для того, чтобы определить плотность струны единственным образом.

Рассмотрим струну, показанную на рисунке 12.4.1, ее плотность,  $\rho^2(x)$ , имеет одну ступеньку при  $x = 0$ .

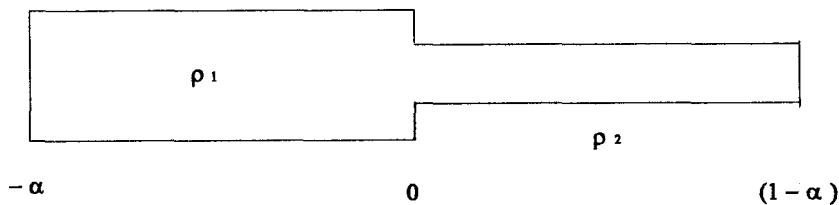


Рис. 12.4.1. Ступенчатая струна

Для фиксированных концов в  $-\alpha$  и  $(1-\alpha)$  краевые условия и условия непрерывности имеют вид

$$u(-\alpha) = 0 = u(1-\alpha), \quad [u]_0 = 0 = [u']_0.$$

Следовательно,

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{при } x \in [\alpha, 0], \\ u_2(x) & \text{при } x \in [0, 1-\alpha], \end{cases}$$

где

$$u_1'' + \rho_1^2 \omega^2 u_1 = 0 = u_2'' + \rho_2^2 \omega^2 u_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= A \sin\{\rho_1 \omega(x + \alpha)\}, \\ u_2(x) &= B \sin\{\rho_2 \omega(1 - \alpha - x)\}, \end{aligned}$$

значит, условия непрерывности в  $x = 0$  дают

$$\begin{aligned} A \sin(\rho_1 \omega \alpha) &= B \sin\{\rho_2 \omega(1 - \alpha)\}, \\ \rho_1 A \cos(\rho_1 \omega \alpha) &= -\rho_2 B \cos\{\rho_2 \omega(1 - \alpha)\}. \end{aligned}$$

Получаем частотное уравнение

$$\rho_2 \sin(\rho_1 \omega \alpha) \cos\{\rho_2 \omega(1 - \alpha)\} + \rho_1 \sin\{\rho_2 \omega(1 - \alpha)\} \cos(\rho_1 \omega \alpha) = 0. \quad (12.4.1)$$

Это частотное уравнение в общем случае струны с одной ступенью, как показано на рисунке 12.4.1. Готтлиб проверил частный случай, в котором

$$\rho_1 \alpha = \rho_2(1 - \alpha). \quad (12.4.2)$$

Теперь (12.4.1) редуцируется к уравнению

$$(\rho_1 + \rho_2) \sin(2\rho_1 \omega \alpha) = 0,$$

которое имеет спектр

$$\omega_n = n\pi/(2\rho_1 \alpha), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.4.3)$$

Спектр является гармоническим:  $\omega_n = n * \omega_1$ . Для того чтобы сравнить этот спектр со спектром равномерной струны, обладающей равномерной плотностью  $\rho^2$ , зафиксированной при  $x = -\alpha, 1 - \alpha$ , заметим, что уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид:

$$u'' + \rho^2 \omega^2 u = 0, \quad u(-\alpha) = 0 = u(1 - \alpha),$$

откуда

$$u = A \sin\{\rho \omega(x + \alpha)\},$$

где

$$\sin(\rho \omega) = 0.$$

Теперь

$$\omega_n = n\pi/\rho, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.4.4)$$

Если  $\rho = 2\rho_1 \alpha$ , то два спектра, (12.4.3) и (12.4.4), совпадают.

Для того чтобы различать эти две струны, мы должны сравнить их спектры для фиксированных-свободных концов. Теперь (см. упр. 12.4.1) частотное уравнение для ступенчатой струны имеет вид:

$$\cos(2\rho_1 \omega \alpha) = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1), \quad (12.4.5)$$

поэтому спектр является равномерно распределенным, но не является гармоническим. Частотное уравнение для равномерной струны имеет вид  $\cos \rho\omega = 0$  с гармоническим спектром  $\omega_n = (n - \frac{1}{2})\pi/\rho$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Готтлиб в работе [138] (1986) рассматривает и другие струны и обобщает свои рассуждения на мультисегментные струны, некоторые из которых имеют гармонический спектр, в работе Готтлиба (1987а) [139].

В частном случае (12.4.2) разрывная струна на рисунке 12.4.1 является изоспектральной с однородной струной при фиксированных-фиксированных концах. В работе [141] (1988а) и в несколько более простой статье [149] (2002) Готтлиб рассматривает непрерывные изоспектральные струны, которые мы тоже сейчас опишем. Начнем со струны, которая описывается уравнением

$$\nu''(\xi) + \lambda\phi(\xi)\nu(\xi) = 0, \quad (12.4.6)$$

при фиксированных концах в 0 и 1, удовлетворяющих условиям

$$\nu(0) = 0 = \nu(1). \quad (12.4.7)$$

Будем искать преобразования к новой координате  $x$  и новое смещение  $u$ , которые сохраняют структурную форму управляющего уравнения и фиксированные краевые условия. Пусть

$$x = x(\xi), \quad v(\xi) = \gamma(x)u(x), \quad (12.4.8)$$

где  $\gamma(x)$  является некоторой положительной невырожденной функцией от  $x$ . Мы хотим найти  $x(\xi)$  и  $\gamma(x)$  так, чтобы новое смещение  $u$  удовлетворяло уравнению

$$\ddot{u}(x) + \lambda f(x)u(x) = 0, \quad (12.4.9)$$

где  $f(x)$  является некоторой новой плотностью, дуальной к функции плотности  $\phi(\xi)$ , и  $\dot{\phantom{x}} = d/dx$ . Далее:

$$v' = \frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = x'\dot{v} = x'(\gamma\dot{u} + \dot{\gamma}u)$$

и

$$\begin{aligned} v'' &= x''(\gamma\dot{u} + \dot{\gamma}u) + (x')^2(\gamma\ddot{u} + 2\dot{\gamma}\dot{u} + \ddot{\gamma}u) \\ &= \gamma(x')^2\ddot{u} + (x''\gamma + 2(x')^2\dot{\gamma})\dot{u} + (x''\dot{\gamma} + (x')^2\ddot{\gamma})u. \end{aligned} \quad (12.4.10)$$

Чтобы сохранился вид уравнений, должны быть справедливы равенства

$$x''\dot{\gamma} + (x')^2\ddot{\gamma} = 0, \quad (12.4.11)$$

$$x''\gamma + 2(x')^2\dot{\gamma} = 0. \quad (12.4.12)$$

Уравнение (12.4.11) может быть записано в виде  $(x'\dot{\gamma})' = 0$ ; и, так как  $x'\dot{\gamma} = \gamma'$ , получим  $\gamma'' = 0$  и

$$\gamma(x(\xi)) = -a\xi + b. \quad (12.4.13)$$

Уравнение (12.4.12) позволяет получить

$$x''\gamma^2 + 2(x')^2\gamma\dot{\gamma} = 0,$$

т. е.  $(x'\gamma^2)' = 0$ , так что  $x' = c/\gamma^2$ , значит,

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{c}{(-a\xi + b)^2}, \quad x(\xi) = \frac{-c}{a(-a\xi + b)} + d.$$

Требования  $x(0) = 0$  и  $x(1) = 1$  дают:

$$c = abd, \quad ad = a - b,$$

значит, выбирая  $ad = -1$ , получим

$$x = \frac{\xi}{1 + a(1 - \xi)}, \quad \xi = \frac{(1 + a)x}{1 + ax}, \quad \gamma = \frac{1 + a}{1 + ax}; \quad (12.4.14)$$

легко видеть, что необходимо взять  $a > -1$ . Теперь из (12.4.10) следует:

$$f(x) = \phi(\xi(x))/x'^2 = \xi^2\phi(\xi(x)),$$

а так как  $\xi = (1 + a)/(1 + ax)^2$ , получим

$$f(x) = \frac{(1 + a)^2}{(1 + ax)^4} \phi \left( \frac{(1 + a)x}{1 + ax} \right). \quad (12.4.15)$$

Соответствие между решениями  $u(x)$  и  $v(\xi)$  имеет вид:

$$u(x) = \frac{(1 + ax)}{1 + a} v \left( \frac{(1 + a)x}{1 + ax} \right). \quad (12.4.16)$$

Обратим внимание, что система (12.4.9) с фиксированными крайними условиями является изоспектральной к (12.4.6), (12.4.7) для всех  $a > -1$ .

Преобразование от одной координаты  $\xi$  к другой координате,  $x$ , имеет групповую структуру. Для начала заметим, что если  $\xi = \frac{(1+a)x}{1+ax}$ , то  $x = \frac{\xi}{1+a(1-\xi)} = \frac{(1+a')\xi}{1+a'\xi}$ , где  $a' = -a/(1+a)$ . Следовательно, если  $a$  характеризует  $\xi \rightarrow x$ , то  $a'$  характеризует  $x \rightarrow \xi$ . Заметим, что если  $a' = -a/(1+a)$ , то  $a = -a'/(1+a')$ , а  $a > -1$  дает  $a' > -1$  и *наоборот*. Это показывает, что каждое преобразование обладает обратным. Теперь рассмотрим произведение преобразований. Пусть

$$x_1 = \frac{(1+a_1)x_2}{1+a_1x_2}, \quad x_2 = \frac{(1+a_2)x_3}{1+a_2x_3},$$

тогда

$$x_1 = \frac{(1+a_1+a_2+a_1a_2)x_3}{1+(a_1+a_2+a_1a_2)x_3} = \frac{(1+a_{1,2})x_3}{1+a_{1,2}x_3},$$

где

$$a_{1,2} = a_1 + a_2 + a_1a_2 = a_2 + a_1 + a_2a_1. \quad (12.4.17)$$

Заметим, что

$$(1+a_{1,2}) = (1+a_1)(1+a_2), \quad (12.4.18)$$

так что  $a_1 > -1, a_2 > -1$  дает  $a_{1,2} > -1$ : произведение двух преобразований является преобразованием и равенство (12.4.17) показывает, что произведение является коммутативным. Существует тождественное преобразование,  $a = 0$ , и справедлив закон ассоциативности (упр. 12.4.2): эти преобразования образуют группу, которая является одно-параметрической группой Ли.

Теперь рассмотрим функции плотности. Если  $f$  и  $\phi$  связаны посредством (12.4.15), то мы будем говорить, что  $f$  является *дуальной* к  $\phi$  относительно  $a$ . Так как  $1+ax = 1/(1+a'\xi)$  и  $1+a = 1/(1+a')$ , уравнение (12.4.15) можно переписать в виде

$$\phi(\xi) = \frac{(1+a')^2}{(1+a'\xi)^4} f\left(\frac{(1+a')\xi}{1+a'\xi}\right).$$

Это показывает, что  $\phi$  является дуальным к  $f$  относительно  $a'$ . Мы можем представить это в символьном виде:

$$f = D(\phi, a) \rightarrow \phi = D(f, a')$$

и теперь проверим (упр. 12.4.3), что если

$$f_2 = D(f_1, a_1), \quad f_3 = D(f_2, a_2), \quad \text{то } f_3 = D(f_1, a_{1,2}). \quad (12.4.20)$$

Это означает, что преобразование, дуальное относительно  $a_2$  к преобразованию, дуальному к  $f_1$  относительно  $a_1$ , является просто другим преобразованием  $f_1$ , дуальным к  $f_1$  относительно  $a_{1,2}$ .

Готтлиб в работе [138] (1986) предлагает некоторые примеры. Для построения простейшего из них рассмотрим  $\phi(\xi) = 1$ , тогда

$$f(x) = (1+a)^2/(1+ax)^4. \quad (12.4.21)$$

Обе эти системы имеют спектр  $\lambda_n = \omega_n^2$ , где

$$\omega_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для фиксированных-фиксированных концов. Собственные функции имеют вид

$$v_n(\xi) = \sin(n\pi\xi), \quad u(x) = \frac{(1+ax)}{1+a} \sin \left\{ \frac{n\pi(1+a)x}{1+ax} \right\}.$$

Заметим, что в то время как узлы первых являются равноотстоящими точками

$$\xi_m = m/n, \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

узлы последних имеют вид

$$x_m = m/\{n+a(n-m)\}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Готтлиб называет (12.4.21) плотностью Борга, так как она обсуждалась в работе Борга (Borg) (1946) [39]. Другой пример предложен в упр. 12.4.4. В работе [140] (1987b) Готтлиб изучает изоспектральные балки. В обозначениях параграфа 13.7 рассмотрения Готтлиба имеют следующий вид. Рассматривается управляющее уравнение (13.1.4):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( r(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \lambda a(x) u(x) \quad (12.4.22)$$

и вводится новая переменная  $s = s(x)$  так, что (12.4.22) редуцируется к стандартному виду

$$\frac{d^4 v(s)}{ds^4} + \frac{d}{ds} \left( A(s) \frac{dv}{ds} \right) + B(s)v(s) = \lambda v(s). \quad (12.4.23)$$

Как и в параграфе 13.7, запишем

$$b(s) = \left( \frac{a(x)}{r(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad c^2(s) = (a(x)r^3(x))^{\frac{1}{4}},$$

откуда

$$r(x) = c^2(s)b^{-1}(x), \quad a(x) = c^2(s)b^3(s),$$

где

$$\frac{ds}{dx} = b(s). \quad (12.4.24)$$

В терминах  $s$  уравнение (12.4.22) имеет вид

$$(b(c^2(bu')')')' = \lambda b^2 c^2 u, \quad (12.4.25)$$

где  $' = d/ds$ . Возьмем

$$u(x) = v(s)/\{b(s)c(s)\},$$

тогда

$$bu' = (v' - \theta v)/c, \quad (12.4.26)$$

$$c^2(bu')' = c\{v'' - (\theta + \gamma)v' - (\theta' - \theta\gamma)v\}, \quad (12.4.27)$$

$$(c^2(bu')')' = c\{v''' - \theta v'' - (2\theta' + \phi)v' + (-\theta'' + \theta\phi)v\}, \quad (12.4.28)$$

$$(b(c^2(bu')')')' = bc\{v'' + (Av')' + Bv\}, \quad (12.4.29)$$

где

$$\frac{b'}{b} = \beta, \quad \frac{c'}{c} = \gamma, \quad \theta = \beta + \gamma, \quad \phi = \gamma' + \gamma^2,$$

$$A = -3\theta' - \theta^2 - \phi, \quad B = (-\theta'' + \theta\phi)' + (-\theta'' + \theta\phi)\theta. \quad (12.4.30)$$

Это означает, что преобразованная система (12.4.23) соответствует равномерной балке, если  $A = 0 = B$ . Нам будет, конечно, необходимо проверить, какие из краевых условий сохраняются и имеются ли таковые



краевые условия. Единственным краевым условием, сохраняющимся во всех случаях, является условие закрепленности:

$$u = 0 = \frac{du}{dx} \implies v = 0 = \frac{dv}{ds}.$$

Уравнения (12.4.30) показывают, что одним из решений уравнений  $A = 0 = B$  является  $\theta = 0 = \phi$ . В силу (12.4.26) уравнение (12.4.28) демонстрирует, что при  $\theta = 0 = \phi$  справедливо

$$bu' = v'/c, \quad (c^2(bu')')' = cv''',$$

любое такое решение будет сохранять условие скользящего конца. Мы рассмотрим это решение:  $\theta = (bc)'/bc$ , откуда  $\theta = 0$  влечет постоянство произведения  $bc$ ; тогда  $\phi = c'/c$ , значит  $\phi = 0$  дает  $c(s) = ps + q$ , где  $p, q$  являются постоянными. Координатное преобразование принимает вид

$$\frac{ds}{dx} = (ps + q)^{-1},$$

откуда

$$\frac{(ps + q)^2}{2p} = x + d.$$

Выберем константы так, что  $x = 0, 1$  отвечают  $s = 0, 1$  соответственно:

$$1 + ks = (1 + Kx)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 + k = (1 + K)^{\frac{1}{2}}.$$

Исходная балка задается уравнениями

$$r(x) = r_0(1 + Kx)^{\frac{3}{2}}, \quad a(x) = a_0(1 + Kx)^{-\frac{1}{2}}.$$

Как мы отмечали ранее, эта балка имеет тот же спектр, что и однородная балка при закрепленном-закрепленном и закрепленном-скользящем краевых условиях.

Другое решение дается уравнением  $b(s) = \text{const}$ . Рассмотрим  $\theta = \gamma$ , откуда  $A = 0$  влечет  $2\gamma' + \gamma^2 = 0$  и, следовательно,  $\gamma'' + \gamma\gamma' = 0$  и  $-\theta'' + \theta\phi = -\gamma'' + \gamma(\gamma' + \gamma^2) = 0$ , откуда  $B = 0$ . Теперь  $2\gamma' + \gamma^2 = 2c'/c - c^2/c^2 = 0$  и  $c = (ps + q)^2$ . Так как  $x = s$ , мы получим

$$r(x) = r_0(px + q)^4, \quad a(x) = a_0(px + q)^4.$$

Другие примеры приводятся в упражнениях. Готтлиб в [140] (1987b) подробно изучает много других случаев; см. также Абрате (Abrate) (1995) [1].

Готтлиб изучает изоспектральные мембраны и площадки в работах [142] (1988), [144] (1991), [146] (1992b), [147] (1993), [148] (2000), [150] (2004a). В недавней статье Готтлиб показал, что единственными отображениями, переводящими уравнение мембраны в другое уравнение мембраны, являются обсужденные выше отображения.

### Упражнения 12.4

- 1) Установите частотное уравнение для ступенчатой струны, рис. 12.4.1, при фиксированно-свободных краевых условиях и получите (12.4.5); найдите  $\omega_n$ .
- 2) Покажите, что произведение преобразований, определенных посредством (12.4.14), является ассоциативным, т. е.  $a_{(1,2),3} = a_{1,(2,3)}$ .
- 3) Проверьте (12.4.17).
- 4) Покажите, что если  $\phi(\xi) = (1 + b\xi)^n$ , то

$$f(x) = (1 + a)^2(1 + cx)^n / (1 + ax)^{n+4},$$

где  $c = a + b + ab$ .

- 5) Покажите, что в частном случае  $n = -2, c = 0$  дуальная струна совпадает с перевернутой исходной струной, т. е.  $f(x) = \{1 + b(1 - x)\}^{-2}$ .
- 6) Закон композиции для группы преобразований имеет вид (12.4.17). Покажите, что если  $\alpha = \ell n(1 + a)$ , то тогда правило композиции становится аддитивным:  $\alpha_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_2$ .
- 7) Другое возможное решение (12.4.30) задается  $A = 0, \theta'' = \theta\phi$ . Исследуйте это решение.
- 8) Исследуйте решения для  $A = 0 = B$ , подыскивая  $b = b_0 S^\mu, c = c_0 S^\nu$ , где  $S = ps + q$ , и  $\mu, \nu$  должны быть определены.

## 12.5. Явная формула для потенциалов

Мы подробно обсудили в главах 10, 11, что спектральные данные необходимы для определения *потенциала* в уравнении Штурма–Лиувилля. Потенциалом мы называем или  $q(x)$  в формуле (10.1.14), или  $\rho(x)$  (или  $\rho^2(x)$ ) в формуле (10.1.8), или  $A(x)$  в формуле (10.1.3). В общем случае, как мы установили, явной формулы для потенциалов не существует; точнее, потенциал можно найти в результате длительной процедуры, включающей рассмотрение интегральных и/или дифференциальных уравнений. В этом параграфе мы даем описание некоторых явных формул, которые были найдены в различных частных случаях. Мы приведем лишь некоторые выводы, так как сами они являются очень длинными; вместо этого мы дадим ссылки на первоисточники.

Мы начнем с работы Гельфанда и Левитана (1953) [101]. Они рассматривали уравнение (10.1.14) при свободных-свободных краевых условиях  $y'(0) = 0 = y'(1)$ , где  $q(x) \in C^1(0, 1)$  и

$$\int_0^1 q(x) dx = 0. \quad (12.5.1)$$

Было установлено, что если  $(\lambda_n)_1^\infty$  обозначают собственные значения уравнения (10.1.14) и  $(\mu_n)_1^\infty$  — соответствующие собственные значения того же уравнения при  $q(x) \equiv 0$ , т. е.

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) = 0 = y'(1),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(1)). \quad (12.5.2)$$

Халберг (Halberg) и Крамер (1960) [158] обобщили этот результат на краевые условия

$$y'(0) - hy(0) = 0 = y'(1) + Hy(1). \quad (12.5.3)$$

Если  $h, H$  являются конечными, то справедливо равенство (12.5.2); если  $h$  является конечным и  $H = \infty$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}(q(0) - q(1)); \quad (12.5.4)$$

если  $h = \infty$  и  $H$  является конечным, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}(q(1) - q(0)); \quad (12.5.5)$$

и если  $h = \infty = H$  (концы закреплены), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{4}(q(0) + q(1)). \quad (12.5.6)$$

Барсилон (Bacilon) в [17] (1974d) приводит другой метод доказательства этих результатов. Заметим, что все эти формулы дают сумму или разность значений  $q$  в крайних точках, как функцию воздействия  $q$  на собственные значения.

В работе [22] (1983) Барсилон изучил уравнение струны (10.1.8) и рассмотрел собственные функции для *части* струны; мы изменим несколько его формулировку. Барсилон доказывает

**Теорема 12.5.1.** Пусть  $(\lambda_n)_1^{\infty}$  является спектром

$$u'' + \lambda \rho u = 0, \quad (12.5.7)$$

$$u(0) = 0 = u(1) \quad (12.5.8)$$

и  $(\mu_n)_1^{\infty}$  является спектром

$$u'' + \lambda \rho u = 0,$$

$$u(0) = 0 = u'(1). \quad (12.5.9)$$

Если функция  $\rho(x)$  является непрерывной и ограниченной вне нуля, то

$$\rho(1) = \frac{1}{\mu_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{\mu_{n+1} \mu_n}. \quad (12.5.10)$$

Мы можем провести довольно слабую проверку этого утверждения, рассматривая случай  $\rho \equiv 1$  (упр. 12.5.1).

Теперь рассмотрим струну с концами в нуле и  $x$  и найдем спектр путем простого домножения координаты, при котором струна занимает интервал  $(0, 1)$ . Откуда получаем

**Следствие 12.5.1.** Если  $(\lambda_n(x))_1^\infty$  и  $\{\mu_n(x)\}_1^\infty$  являются спектрами (12.5.7) с крайвыми условиями  $u(0) = 0 = u(x)$ ,  $u'(0) = 0 = u'(x)$ , соответственно, то

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2 \mu_1(x)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda_n(x)]^2}{\mu_{n+1}(x) \mu_n(x)}. \quad (12.5.11)$$

Формула Барсилона (12.5.11) содержит два спектра, отвечающих двум различным крайвым условиям при  $x$ . Прангер (Pranger) (1989) [270] представляет  $\rho(x)$  в терминах только одного спектра  $\{\lambda_n(x)\}$  уравнения (12.5.7) при условии  $u(0) = 0 = u(x)$ . Он показывает, что если

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n(x)\}^{-1}, \quad (12.5.12)$$

а также  $\rho(x)$  является положительной, обладает непрерывной первой производной и имеет вторую производную из класса  $L^2$ , то  $\rho(x)$  задается следующей замечательной явной формулой:

$$\rho(x) = \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \right) s(x). \quad (12.5.13)$$

Готтлиб в [145] (1992a) рассматривает некоторые примеры и контрпримеры к этой формуле. Во-первых, если  $\rho(x) \equiv 1$ , то  $\lambda_n(x) = (n\pi/x)^2$ , откуда

$$s(x) = \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

и подстановка в (12.5.13) дает  $\rho(x) = 1$ . См. также упр. 12.5.2. Прангер рассматривает некоторые другие явные формулы.

В работе [145] (1992a) Готтлиб рассматривает также некоторые классы непрерывных функций  $\rho(x)$  для того, чтобы установить, как сам Прангер думал, что его формула справедлива при более общих условиях, чем он предполагал.

### Упражнения 12.5

- 1) Рассмотрите  $\rho \equiv 1$  из (12.5.7) и найдите собственные значения  $\lambda_n$  и  $\mu_n$  для (12.5.7) при условиях (12.5.8) и (12.5.9) соответственно.

Проверьте, что уравнение (12.5.10) дает  $\rho(1) = 1$ . [Используйте тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

указанное в 0.2622, см. Градштейн (Gradshteyn) и Рыжик (Ryzhik) [152] (1965).]

2) Струна с плотностью из формулы (12.4.21), т. е.

$$\rho(y) = (1+a)^2/(1+ay)^4, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

является изоспектральной к однородной струне. Используйте масштабирование  $xy = \xi$ , чтобы найти  $\lambda_n(x)$  и найти  $\rho(x)$  из уравнения (12.5.13).

## 12.6. Исследования Рама и других

Более или менее вся научная работа Рама была связана с различными аспектами обратных задач в широком смысле этого слова. Так как большая часть этих исследований не подпадает под одну категорию, мы решили уделить им этот параграф. Однако, в силу ограниченности места, мы уделяем основное внимание вопросам, которыми он и его коллеги задавались, и методам, которые они использовали для их решения. Мы ограничим наше внимание его статьями по невозмущенным колебательным системам.

Одна из наиболее ранних статей принадлежит Раму, Брауну и Блеху (Ram, Braun, Blech), см. [272] (1988). Эта статья написана в традициях узлового анализа, см., например, работу Бермана (Bergman) [27] (1984). Авторы задаются следующим вопросом. Пусть система имеет *неизвестные* матрицы масс и жесткостей  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ , однако ее первые  $n$  собственных форм колебаний и ее собственные значения известны. Можно ли найти аппроксимации для первых  $n$  собственных форм колебаний и собственных значений для модифицированной системы  $\mathbf{M} + \delta\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K} + \delta\mathbf{K}$ ? Они показали, что верхние границы собственных значений даются при помощи задачи о собственных значениях

$$(\mathbf{A} + \Phi^T \delta \mathbf{K} \Phi) \mathbf{x} = \tau (\mathbf{I} + \Phi^T \mathbf{M} \Phi) \mathbf{x}. \quad (12.6.1)$$

Авторы иллюстрируют свои рассуждения на примере колеблющейся балки. Оценки, полученные в этой статье, являются верхними границами

собственных значений модифицированной структуры, так как они находятся как стационарные значения для отношения Рэлея в связанном подпространстве. Рам и Браун в работе [273] (1990а) получили верхние и нижние оценки при помощи толкового использования независимого определения собственных значений из параграфа 2.10 и того факта, что уменьшение (увеличение) жесткости, т. е. энергии деформации, структуры уменьшает (увеличивает) собственные значения. Более того, они показали, что как верхняя, так и нижняя оценки, найденные ими, являются оптимальными. Эта статья дает прозрачайшее введение в вопросы поиска верхних и нижних оценок. В работе Рама и Брауна [274] (1990b) авторы расширяют свои результаты для получения верхних и нижних границ на  $n$  собственных чисел, не обязательно для наименьшего  $n$ , используя оптимальные промежутки Лехмана (см. Парлет (Parlett) [264] (1980), стр. 198–202). В работе Рама, Блеха и Брауна [275] (1990) эти рассуждения применяются для абстрактных матриц и связываются с другими предыдущими матрично-аналитическими результатами. Браун и Рам, см. [40] (1991), приводят различные примеры применения этих рассуждений. Рам и Блех в [277] (1991) доказывают замечательный результат относительно прибавления *осциллятора* с жесткостью  $k$  и массой  $m$  к колебательной системе с одним выделенным пространственным направлением движения: *собственные значения исходной системы, которые меньше чем  $k/m$ , увеличиваются, тогда как большие, чем  $k/m$ , уменьшаются*. Они начинают свои рассмотрения на примере из упр. 12.6.1.

Рам и Браун в [278] (1991) применяют методы, полученные в работе Рама, Брауна и Блеха [272] (1988), к следующей обратной задаче: найти  $\delta M$ ,  $\delta K$  для получения заданного спектра. Они применяют свои результаты к некоторым простым примерам. См. также работу Рама и Брауна [280] (1993), где содержатся многие другие примеры.

В работе [279] (1992) Рам и Колдвелл (Caldwell) рассматривают задачу восстановления пружинно-массовой системы с единственным направлением движения, в которой массы не являются просто расположенными прямолинейно, как в системе Якоби, однако образуют мультипликативно-связную систему. Данные состоят из различных спектров, полученных при прикреплении одной или более масс к земле. Полученное решение не является единственным; заметим, что граф системы не является деревом, как в системе, рассмотренной Дуарте (Duarte) в [81] (1989) и описанной в параграфе 5.7.

Мы уже упоминали работу Рама [276] (1993) в параграфе 4.5. Он применяет результаты Рама и Блеха [277] (1991) к ситуации, в кото-

рой *осциллятор* с жесткостью  $k$  и массой  $m$  добавляется к свободно-му концу прямолинейной пружинно-массовой системы. Рам и Глэдвелл в [289] (1994) рассматривают модель конечных элементов для колеблющейся струны, для которой как матрица жесткости, так и матрица масс являются трехдиагональными, и показывают, что обе эти матрицы могут быть построены по одному собственному значению и двум собственным векторам. Так как этот метод экстремально чувствителен к погрешностям, они рассматривают также переопределенное множество данных. В работе [281] (1994a) Рам обсуждает восстановление пружинно-массовой модели балки в трансверсальных колебаниях, описанных в параграфе 2.3, по трем собственным векторам, одному собственному значению и общей массе и длине балки. К сожалению, не дается критериев, позволяющих решить, когда данные о формах колебаний/собственных значениях соответствуют реальной модели; см. работу Глэдвелла, Виллмса (Willms), Хи (He) и Уонга (Wang) [115] (1989) для обсуждения этих вопросов. В работе Рама [282] (1994b) автор возвращается к идее, предложенной в статье Рама и Блеха [277] (1991), состоящей в увеличении *спектрального пробела*, т.е. модифицировании системы таким образом, чтобы модифицированные собственные значения  $\lambda_i^*$ ,  $\lambda_{i+1}^*$  удовлетворяли  $\lambda_i^* < \lambda_i$ ,  $\lambda_{i+1}^* > \lambda_{i+1}$ . Он показывает, что это можно завершить, с умом добавляя *два* осциллятора  $k_1, m_1$  и  $k_2, m_2$ , для которых  $k_1/m_1 > \lambda_{i+1}$  и  $k_2/m_2 < \lambda_i$ . Некоторые специальные условия, которые он формулирует, должны быть выполнены.

В статье Рама [283] (1994c) рассматривается непрерывная модель для вспомогательного колеблющегося стержня, имеющего вид

$$(ru')' + \lambda au = 0, \quad (12.6.2)$$

показано, что  $r$  и  $a$  могут быть восстановлены по двум собственным значениям, соответствующим формам колебаний и общей массе стержня. Автор формулирует условия на заданные формы колебаний, которые гарантируют, что  $r(x)$ ,  $a(x)$  будут положительными, и приводит ряд примеров.

Рам и Елхай (Elhay), см. [285] (1995a), пытаются решить сложную задачу восстановления матриц масс и жесткостей системы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  по данным о формах колебаний и спектре в предположении, что  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  являются симметрическими и ленточными матрицами. Этот метод построения все еще оставляет много важных открытых вопросов для дальнейшего исследования.

Рам и Елхай в [284] (1996) рассматривают теорию динамических амортизаторов и их использование в задачах динамической модификации.



В важной статье Сивана и Рама, [306] (1997), авторы противопоставляют реализации того, что матрицы масс и жесткостей для заданного типа систем будут иметь специальный вид. Они рассматривают формы, ассоциированные с общими пружинно-массовыми системами, как в работе Рама и Колдвелла [279] (1992); матрица масс является диагональной, в то время как матрица жесткостей обладает отрицательными (или положительными) внедиагональными элементами и является диагонально-доминантной.

Они начинают рассмотрение с необработанных спектральных данных  $\Lambda^* = \text{diag}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$  и данных о формах колебаний  $\Phi^*$ . В теории матрицы масс и жесткостей  $\mathbf{M}, \mathbf{K}$  должны удовлетворять уравнениям

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda,$$

а значит, в теории

$$\mathbf{M} = \Phi^{-T} \Phi^{-1}, \quad \mathbf{K} = \Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1}.$$

Однако в общем случае заданные матрицы  $\Phi^*, \Lambda^*$  не приводят к диагональным  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  с требуемыми свойствами положительности. Тогда авторы ставят задачу нахождения  $\Phi, \Lambda$ , близких в некотором смысле к заданным  $\Phi^*, \Lambda^*$ , так, что  $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ , вычисленные согласно (12.6.3), обладают требуемым видом. Они делят задачу на две части:

**Задача 1.** Для заданного  $\Phi^*$  определить  $\Phi$  таким образом, что  $\mathbf{M} = \Phi^{-T} \Phi^{-1}$  является положительной диагональной матрицей, минимизирующей  $\|\Phi^* - \Phi\|$ .

**Задача 2.** Для заданных  $\Lambda^*$  и  $\Phi$  определить  $\Lambda$ , которая минимизирует  $\|\Lambda^* - \Lambda\|$  так, что  $\mathbf{K} = \Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1}$  обладает требуемым видом.

Они приводят алгоритмы для решения обоих этих задач. Эта статья дает многообещающий старт для реальных процедур построения.

В работе [287] (1998) Рам и Елхай рассматривают вопросы, связанные с изоспектральными якобиевыми системами, и приводят новый метод неподвижной точки для построения конкретных матриц Якоби.

Сиван и Рам, см. [307] (1999), возвращаются к рассмотрению Рама и Брауна [278] (1991). Они рассматривают уравнения  $\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Lambda$  и разбивают  $\Phi, \Lambda \in M_n$  на

$$\Phi = [\Phi_1 | \Phi_2], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

где  $\Phi_1 \in M_{n,m}$ ,  $\Lambda_1 \in M_m$  являются заданными. Они ставят вопрос нахождения  $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 \mathbf{W}$  и  $\tilde{\Lambda}_1 = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i)$ , а также матриц масс и жесткостей  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}$  для минимизации нормы

$$R = (\tilde{\mathbf{M}})^{-1/2} (\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Lambda}_1),$$

эти рассуждения применяются к некоторым простым пружинно-массовым задачам. Наиболее сложная для решения задача состоит в проверке того, что матрицы  $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{K}}$  имеют описанный вид.

Бурак (Burak) и Рам в [44] (2001) рассмотрели уравнение на собственные значения  $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , записывая матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  в виде сумм

$$\mathbf{K} = \sum \alpha_i \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{M} = \sum \beta_i \mathbf{M}_i,$$

где  $\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i$  являются матрицами с постоянными коэффициентами, которые отражают *связность* и *граф* системы, а  $\alpha_i, \beta_i$  являются неизвестными параметрами. Когда система является линейной пружинно-массовой, параметры могут быть найдены по двум волнам и собственному значению, как в работе Рама и Глэдвелла [289] (1994).

В [288] (2004) Рам и Элишаков возвращаются к задаче восстановления площади поперечного сечения стержня по форме колебания для дискретной и непрерывной моделей. Для непрерывной модели управляющее уравнение (10.1.3) имеет вид:

$$(A(x)u'(x))' + \lambda A(x)u(x) = 0.$$

Они изучают задачу нахождения  $A(x)$ , когда  $u(x)$  является *многочленом*, и обсуждают многочлены малых степеней для основного и нескольких первых обертонов свободно-свободного стержня.

В заключение мы заметим, что исследования Рама и его коллег демонстрируют сложность обратных задач: данные должны быть известны по экспериментам, и не только, алгоритмы построения должны быть робастными, построенная модель должна быть *реалистичной* — она должна удовлетворять всем необходимым ограничениям касательно *положительности* и *связности*.

Рама и его коллеги сделали важные продвижения в разных аспектах этих вопросов; тем не менее все еще остаются обширные возможности для последующих исследований касательно выполнения всех требований, предъявляемых к решениям многих обратных задач теории колебаний.

**Упражнения 12.6**

- 1) Рассмотрите равномерную натянутую струну единичной длины, зафиксированную при  $x = 0$  и свободную при  $x = 1$  (конец  $x = 1$  присоединен к кольцу, не имеющему массы, которое скользит под прямыми углами к пружине). Найдите ее собственные значения. Теперь замените ползун на осциллятор с массой  $m$  и жесткостью  $k$ . Покажите, что собственные значения, удовлетворяющие  $\lambda_i < k/m$ , возрастают, в то время как те собственные значения, для которых  $\lambda_i > k/m$ , убывают.

---

## ГЛАВА 13

# Балка Эйлера-Бернулли

В мире достаточно света для тех, кто хочет видеть, и достаточно тьмы для тех, кто склонен к обратному.

Блез Паскаль. *Мысли*, 430

### 13.1. Введение

Свободные незатухающие бесконечно малые колебания с частотой  $\omega$  тонкой прямой балки, имеющей длину  $L$ , задаются уравнением Эйлера-Бернулли

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) = A(x) \rho \omega^2 u(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (13.1.1)$$

Здесь  $E$  обозначает модуль Юнга,  $\rho$  является плотностью; предполагается, что они постоянны;  $A(x)$  обозначает площадь поперечного сечения  $x$ ,  $I(x)$  обозначает второй момент этого сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости колебания (нейтральной оси). Возьмем

$$x = Ls, \quad u(s) = u(x), \quad r(s) = \frac{I(x)}{I(x_c)}, \quad a(s) = \frac{A(x)}{A(x_c)}, \quad (13.1.2)$$

$$\lambda = A(x_e) \rho L^4 \omega^2 / (EI(x_c)), \quad (13.1.3)$$

где  $x_c \in [0, L]$ . Уравнение (13.1.1) принимает вид

$$(r(s)u''(s))'' = \lambda a(s)u(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (13.1.4)$$

где  $' = d/ds$ . С этого момента мы будем использовать  $x$ , а не  $s$  для обозначения безразмерной независимой переменной.  $r(x)$  и  $a(x)$  являются положительными, т. е.

$$r(x) > 0, \quad a(x) > 0, \quad x \in [0, 1].$$

Далее мы будем предполагать, что  $a(x), r(x) \in C^2[0, 1]$ ; т. е. они являются дважды непрерывно дифференцируемыми на  $[0, 1]$ .

Для балки наиболее распространенные краевые условия имеют один из следующих видов:

$$\text{свободные: } u'' = 0 = u''', \quad (13.1.5)$$

$$\text{шарнирные: } u = 0 = u'', \quad (13.1.6)$$

$$\text{скользящие: } u' = 0 = (ru'')', \quad (13.1.7)$$

$$\text{закрепленные: } u = 0 = u'. \quad (13.1.8)$$

Существуют некоторые комбинации этих краевых условий, которые допускают смещение балки, как твердого тела:

$$\text{свободно-свободные: } u = 1 \text{ и } u = x, \quad (13.1.9)$$

$$\text{свободно-скользящие: } u = 1, \quad (13.1.10)$$

$$\text{скользяще-скользящие: } u = 1, \quad (13.1.11)$$

Заметим, что свободно-свободная балка обладает двумя *формами колебаний твердого тела*. Обе формы, приведенные выше, не являются ортогональными, однако можно проверить, что комбинация  $ax + c$  является ортогональной к первой, т. е.  $u = 1$ . (См. упр. 13.1.1.)

Концы балки могут быть возмущены посредством сдвига и вращения пружинных механизмов. В этом случае краевые условия принимают вид:

$$(r(x)u''(x))'_0 + h_1u(0) = 0 = (r(x)u''(x))'_1 - h_2u(1), \quad (13.1.12)$$

$$r(0)u''(0) - k_1u'(0) = 0 = r(1)u''(1) + k_2u'(1). \quad (13.1.13)$$

Здесь  $h_1, h_2$  являются жесткостями сдвига, а  $k_1, k_2$ , являются жесткостями вращения. Условия (13.1.5)–(13.1.8) относятся соответственно к  $h = 0 = k$ ;  $h = \infty, k = 0$ ;  $h = 0, k = \infty$ ;  $h = \infty = k$ . Мы будем говорить, что система, подчиняющаяся уравнениям (13.1.4), (13.1.12), (13.1.13), является *положительной*, если

$$h_1 + h_2 > 0, \quad k_1 + k_2 > 0. \quad (13.1.14)$$

Так как  $h_1, h_2, k_1, k_2 \geq 0$ , получаем, что одна из величин  $h_1, h_2$  и одна из величин  $k_1, k_2$  должна быть строго положительной; это исключает колебания твердого тела.

Папаникалао (Ραπαϊσάλαου) [261] (1995) рассматривает спектральную теорию *периодической* балки; мы не собираемся ее обсуждать.

**Теорема 13.1.1.** *Оператор Эйлера–Бернулли*

$$\mathcal{B}u \equiv (r(x)u''(x))''$$

является самосопряженным, т. е.

$$(\mathcal{B}u, v) = (u, \mathcal{B}v)$$

при краевых условиях (13.1.12), (13.1.13).

**Доказательство.**  $(\mathcal{B}u, v) - (u, \mathcal{B}v) = \int_0^1 \{(ru'' )''v - (rv'' )''u\} dx =$   
 $= [(ru'' )'v - ru''v' - (rv'' )'u + rv''u']_0^1.$

При любом из условий (13.1.12), (13.1.13), выражение в скобках является нулевым на каждом конце. ■

**Теорема 13.1.2.** *Собственные значения системы Эйлера–Бернулли являются неотрицательными, они положительны тогда и только тогда, когда система является положительной.*

**Доказательство.** Пусть  $u(x)$  является собственной функцией уравнения (13.1.4), отвечающей  $\lambda$ , тогда

$$\mathcal{B}u = \lambda u.$$

Следовательно,  $(\mathcal{B}u, \bar{u}) = \lambda(au, \bar{u})$ . Однако  $(\mathcal{B}u, \bar{u}) = (u, \mathcal{B}\bar{u}) = (\bar{u}, \mathcal{B}u) = (\bar{u}, \lambda au) = \bar{\lambda}(u, a\bar{u}) = \bar{\lambda}(au, \bar{u})$ . Значит,  $\lambda = \bar{\lambda}$  и  $\lambda$  являются вещественными. Имеем

$$(\mathcal{B}u, u) = [(ru'' )'u - ru''u']_0^1 + \int_0^1 r(u'')^2 dx,$$

значит,

$$\lambda(au, u) = h_1u^2(0) + h_2u^2(1) + k_1[u'(0)]^2 + k_2[u'(1)]^2 + \int_0^1 r(u'')^2 dx. \quad (13.1.15)$$

Так как  $u(x)$  является собственной функцией,  $(au, u) > 0$ . Нулевое собственное значение может появиться, только если правая часть (13.1.15)

является тождественно нулевой. Интеграл является нулевым, если только  $u''(x) \equiv 0$ , т. е.  $u(x) = cx + d$ . Все остальные слагаемые могут обращаться в нуль по отдельности, так что

$$h_1 d^2 = 0 = h_2 (c + d)^2 = k_1 c^2 = k_2 c^2. \quad (13.1.16)$$

Пусть  $h_1, h_2, k_1, k_2$  являются *конечными*. Уравнение (13.1.16) дает, что *или*  $k_1 = 0 = k_2$ , в этом случае система не является положительной, *или*  $c = 0$ . Если  $c = 0$ , то *или*  $h_1 = 0 = h_2$ , в этом случае система не является положительной; *или*  $d = 0$ , в этом случае  $u(x) \equiv 0$ , так что  $u(x)$  не является собственной функцией. В заключение заметим, что если  $h_1, h_2, k_1, k_2$  являются конечными, то собственные значения являются положительными, только если система является положительной. Случаи, где одно или более из  $h_i, k_i$  являются бесконечными, рассматриваются аналогично (упр. 13.1.2).

Перед тем как ввести *функцию Грина* в общей ситуации, мы рассмотрим частный случай консольной балки, т. е. балки, закрепленной при  $x = 0$  и свободной при  $x = 1$ . Если единичную сосредоточенную нагрузку (безразмерной, как в равенствах (13.1.2)) применить к балке при  $x = s$  ( $0 < s \leq 1$ ), то отклонение  $u(x)$  и его первые две производные будут непрерывными на  $[0, 1]$ , тогда как третья производная будет иметь скачок при  $x = s$ . Равновесие требует, чтобы

$$[(r(x)u''(x))' ]_{x=s-}^{x=s+} = 1.$$

Краевые условия при  $x = 1$ , а именно:

$$u''(1) = 0 = u'''(1),$$

тогда дают

$$(r(x)u''(x))' = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < s, \\ 0, & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

и

$$r(x)u''(x) = \begin{cases} s - x, & 0 \leq x < s, \\ 0, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u'(x) = \int_0^{x_0} \frac{(s-t)}{r(t)} dt,$$

где  $x_0 = \min(x, s)$ , значит смещение, т. е. функция Грина  $G(x, s)$ , имеет вид

$$G(x, s) = \int_0^{x_0} \frac{(x-t)(s-t)}{r(t)} dt. \quad (13.1.17)$$

При краевых условиях общего вида (13.1.12), (13.1.13) функция Грина обладает следующими свойствами:

1. При фиксированном  $s$  функция  $G(x, s)$  является непрерывной по  $x$  и удовлетворяет краевым условиям (13.1.12), (13.1.13).

2. Исключая  $x = s$ , первые четыре производные  $G(x, s)$  по  $x$  являются непрерывными на  $[0, 1]$ . При  $x = s$  третья производная имеет скачок вида

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r(x) \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2} \right) \right]_{x=s^-}^{x=s^+} = 1. \quad (13.1.18)$$

3.  $B_x G(x, s) = 0$  для  $0 \leq x < s$  и  $s < x \leq 1$ . ■

**Теорема 13.1.3.** *Функция Грина является симметричной, т. е.  $G(x, s) = G(s, x)$ .*

**Доказательство.** См. упр. 13.1.3. ■

**Теорема 13.1.4.** *Если  $f(x)$  является кусочно-непрерывной, то*

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds \quad (13.1.19)$$

*является решением*

$$B u = f(x) \quad (13.1.20)$$

*и удовлетворяет краевым условиям (13.1.12), (13.1.13). Наоборот, если  $u(x)$  удовлетворяет (13.1.20) и краевым условиям (13.1.12), (13.1.13), то она может быть представлена посредством (13.1.19).*

Следует непосредственно из свойств (1)–(3).

Процедура построения консольной балки допускает обобщения. Можно показать (упр. 13.1.5), что

$$G(x, s) = \begin{cases} \phi(x)\theta(s) + \psi(x)\chi(s), & 0 \leq x \leq s, \\ \phi(s)\theta(x) + \psi(s)\chi(x), & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (13.1.21)$$



где  $\phi(x), \psi(x)$  являются линейно независимыми решениями  $\mathcal{B}u = 0$ , удовлетворяющими краевым условиям при  $x = 0$ , тогда как  $\theta(x), \chi(x)$  являются линейно независимыми решениями для  $\mathcal{B}u = 0$ , удовлетворяющими краевым условиям при  $x = 1$ . Заметим, что для (13.1.17) эти функции имеют вид:

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{(s-t)dt}{r(t)}, \quad \psi(x) = \int_0^x \frac{t(x-t)dt}{r(t)}, \quad \theta(x) = x, \quad \chi(x) = -1. \quad (13.1.22)$$

Теорема 13.1.4 позволяет нам заменить дифференциальное уравнение (13.1.4) и краевые условия (13.1.12), (13.1.13) посредством интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 a(s)G(x, s)u(s)ds. \quad (13.1.23)$$

### Упражнения 13.1

- 1)  $\phi_{1,1} = 1$  и  $\phi_{1,2} = cx + d$  будут являться ортогональными формами колебаний свободной-свободной балки как твердого тела, если

$$\int_0^1 a(x)\phi_{1,1}(x)\phi_{1,2}(x)dx = 0.$$

Покажите, что когда  $a(x)$  является симметричной относительно  $x = \frac{1}{2}$ , т. е.  $a(x) = a(1-x)$ , то  $\phi_{1,2}(x) = c(x - \frac{1}{2})$ .

- 2) Покажите, что собственные функции  $\phi_i(x), \phi_j(x)$  для (13.1.4), (13.1.12), (13.1.13), отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_i, \lambda_j$ , ортогональны, т. е.

$$(\phi_i, a\phi_j) = \int_0^1 a(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}.$$

Покажите также, что

$$(\phi_i'', r\phi_j'') = \int_0^1 r(x)\phi_i''(x)\phi_j''(x)dx = \lambda_i\delta_{ij}.$$

- 3) Покажите, что функция Грина  $G(x, s)$  для (13.1.4) при краевых условиях (13.1.12), (13.1.13) является симметричной.
- 4) Покажите, что функция Грина для скользящей-скользящей балки имеет вид

$$G(x, s) = \left\{ s \int_s^1 \frac{(1-t)^2 dt}{r(t)} \right\} + \left\{ (1-x) \int_0^x \frac{t^2 dt}{r(t)} + x \int_x^1 \frac{t(1-t) dt}{r(t)} \right\} (1-s),$$

где  $x \leq s$ . Найдите  $\theta, \phi, \psi, \chi$  для такой  $G(x, s)$ . Установите, что  $G(x, s) > 0$ , если  $x, s \in (0, 1)$ , и что для  $y(x) = G(x, s)$  справедливо  $y'(0) > 0, y'(1) < 0$ .

- 5) Установите (13.1.21). Используйте тот факт, что  $u(x) = G(x, s)$  для

$$u(x) = \begin{cases} c(s)\phi(x) + d(s)\psi(x), & 0 \leq x < s, \\ e(s)\theta(x) + f(s)\chi(x), & s < x \leq 1. \end{cases}$$

Теперь воспользуйтесь тем обстоятельством, что  $u, u', u''$  являются непрерывными от  $s$ , тогда как третья производная имеет скачок вида (13.1.18).

## 13.2. Осцилляторные свойства функции Грина

Сначала докажем ряд предварительных результатов.

**Теорема 13.2.1.** При краевых условиях (13.1.12), (13.1.13) для конечных положительных  $h_1, h_2, k_1, k_2$ , функция Грина  $u(x) = G(x, s)$  для  $0 \leq s \leq 1$  удовлетворяет уравнению

$$M'(x) := (r(x)u''(x))' = \begin{cases} -c, & 0 \leq x < s, \\ 1-c, & s < x \leq 1, \end{cases} \quad (13.2.1)$$

где  $0 < c < 1$ .

**Доказательство.** Свойства (2) и (3) функции Грина позволяют заключить, что (13.2.1) справедливо для некоторого  $c$ ; докажем, что  $0 < c < 1$ .

Рассмотрим значения  $M(x) \equiv r(x)u''(x)$ . Краевые условия (13.1.13) исключают случай, когда  $M(0) \leq 0$  и  $M(1) \leq 0$ , в этом случае  $u'(0) \leq 0, u'(1) \geq 0$  так, что  $u''(x_0) \geq 0$ , т. е.  $M(x_0) \geq 0$ , для некоторого  $x_0 \in (0, 1)$ .

Однако  $M(x)$  является линейной на каждом из промежутков  $(0, s)$  и  $(s, 1)$ , значит  $M(s) \geq 0$ ,  $M'(s-) = (M(s) - M(0))/s \geq 0$ ,  $M'(s+) = (M(1) - M(s))/(1 - s) \leq 0$  и, следовательно,  $[M'(s)]_{\pm}^{\pm} \leq 0$ , противоречие с (13.1.18).

Далее, если  $c \leq 0$  или  $c \geq 1$ , т. е. если  $M'(x)$  сохраняет знак (возможно также обращение в ноль) на всем отрезке  $[0, 1]$ , то случай  $M(0) \geq 0$ ,  $M(1) \geq 0$  исключается. Иначе,  $M(x) \geq 0$  на  $[0, 1]$ , тогда как краевые условия дают  $u'(0) \geq 0$ ,  $u'(1) \leq 0$ , что противоречит  $u''(x) \geq 0$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Очевидно, случай  $u(x) \equiv 0$  исключается.

Пусть  $c \leq 0$ , так что  $M'(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , тогда  $M(0) \leq 0$ ,  $M(1) \geq 0$ , так как все остальные случаи исключены. Следовательно, краевые условия (13.1.13) дают  $u'(0) \leq 0$ ,  $u'(1) \leq 0$ , и так как  $M(x)$  является кусочно-линейной, мы можем получить, как и ранее, что  $u'(x) \leq 0$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Однако,  $M'(0) \geq 0$ ,  $M'(1) \geq 0$  и краевые условия (13.1.12) дают  $u(0) \leq 0$ ,  $u(1) \geq 0$ , что противоречит  $u'(x) \leq 0$  для всех  $x \in [0, 1]$ . Случай  $u'(x) \equiv 0$  исключается согласно (13.1.18).

Если  $c \geq 1$ , то  $M'(x) \leq 0$ ,  $x \in [0, 1]$  и  $M(0) \geq 0$ ,  $M(1) \leq 0$ , краевые условия позволяют получить  $u'(0) \geq 0$ ,  $u'(1) \geq 0$  и, как и ранее,  $u'(x) \geq 0$  для  $x \in [0, 1]$ . Однако теперь  $u(0) \geq 0$ ,  $u(1) \leq 0$ , противоречие.

Получаем, что  $0 < c < 1$ . ■

**Следствие 13.2.1.**  $M(x)$  не может иметь постоянный знак на  $[0, 1]$ .

**Доказательство.** Если  $M(x) \leq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , то  $M(0) \leq 0$  и  $M(1) \leq 0$ , что было исключено. Если  $M(x) \geq 0$ , то  $M(0) \geq 0$ ,  $M(1) \geq 0$ , значит, краевые условия (13.1.13) дают  $u'(0) \geq 0$ ,  $u'(1) \leq 0$ , что противоречит неравенству  $M(x) \geq 0$ . ■

В этой теореме и ее следствии мы предполагали, что  $h_1, h_2, k_1, k_2$  являются конечными и положительными, однако результаты остаются в силе, даже если некоторые из них или все они являются бесконечными и  $h_1 + h_2 > 0$ ,  $k_1 + k_2 > 0$ , т. е. при предположении, что система является *положительной*. См. упр. 13.2.1.

**Теорема 13.2.2.** При краевых условиях (13.1.12), (13.1.13) функция Грина удовлетворяет условиям

$$G(x, s) \geq 0, \quad x, s \in [0, 1], \quad (13.2.2)$$

$$G(x, s) > 0, \quad x, s \in I. \quad (13.2.3)$$

**Доказательство.** Здесь  $I$  означает то же самое, что и в главе 10: это  $[0, 1]$ , если  $h_1, h_2$  конечны;  $(0, 1]$ , если  $h_1 = \infty$ , т. е.  $u(0) = 0$ ; и так далее.

Теорема 13.2.1 и ее следствие показывают, что  $M(x)$  не может иметь постоянный знак на  $[0, 1]$ ; существует один нуль влево от  $s$  и/или один нуль вправо. Если  $u(x) = G(x, s)$ , тогда три возможные формы  $M'(x), M(x), u'(x), u(x)$  показаны на рисунке 13.2.1. ■

Превосходящая последующий результат, мы напомним классическую теорему и докажем некоторое ее улучшение.

**Теорема Ролль.** Пусть  $\phi(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$  и дифференцируемой на  $(a, b)$ . Если  $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ , то  $\exists c \in (a, b)$  такое, что  $\phi'(c) = 0$ , т. е.  $\phi'(x)$  имеет ноль на  $(a, b)$ . Нам потребуется следующее улучшение.

**Теорема 13.2.3.** Пусть  $\phi(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$  и дифференцируемой на  $(a, b)$ . Если  $\phi(a) = 0 = \phi(b)$  и  $\phi(x)$  не является тождественно нулевой на  $[a, b]$ , тогда  $\phi'(x)$  имеет узловую точку на  $(a, b)$ .

Напомним, что  $f(x)$  имеет узел в точке  $c$ , если в любой двусторонней окрестности  $c$  существуют точки  $\xi_1, \xi_2$  такие, что  $\xi_1 < c < \xi_2$  и  $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ . Иначе,  $f(x)$  может иметь узловой промежуток  $[c, d]$  такой, что в любой двусторонней окрестности  $[c, d]$  существуют точки  $\xi_1, \xi_2$  такие, что  $\xi_1 < c < d < \xi_2$  и  $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ .

**Доказательство.** Так как  $\phi(x)$  является непрерывной на  $[a, b]$ , она принимает свое максимальное и минимальное значения на  $[a, b]$ . Так как функция  $\phi(x)$  не является тождественно нулевой, одно из них должно быть ненулевым. Без ограничения общности мы можем предполагать, что это максимум; следовательно, он достигается в одной или нескольких точках  $\xi \in (a, b)$  или на промежутке  $[c, d] \in (a, b)$ . В первом случае,  $\xi$  является узлом для  $\phi'(x)$ , во втором случае  $[c, d]$  — узловой промежуток. ■

**Теорема 13.2.4.** Пусть  $\phi(x), \phi'(x)$  являются непрерывными на  $[a, b]$ , и  $\phi'(x)$  имеет  $n$  узлов  $(\xi_i)_1^n$  таких, что  $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = b$ , тогда функция  $\phi(x)$  имеет не более одного нуля на каждом из промежутков  $[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_n, b]$  и не более  $n + 1$  нуля на их объединении. Если  $\phi(a)\phi'(a) > 0$ , то  $\phi(x)$  не имеет нулей на  $[a, \xi_1]$ , тогда как если  $\phi(b)\phi'(b) < 0$ , то  $\phi(x)$  не имеет нулей на  $[\xi_n, b]$ . Выполнение каждого из этих неравенств уменьшает число нулей  $\phi(x)$  на 1.

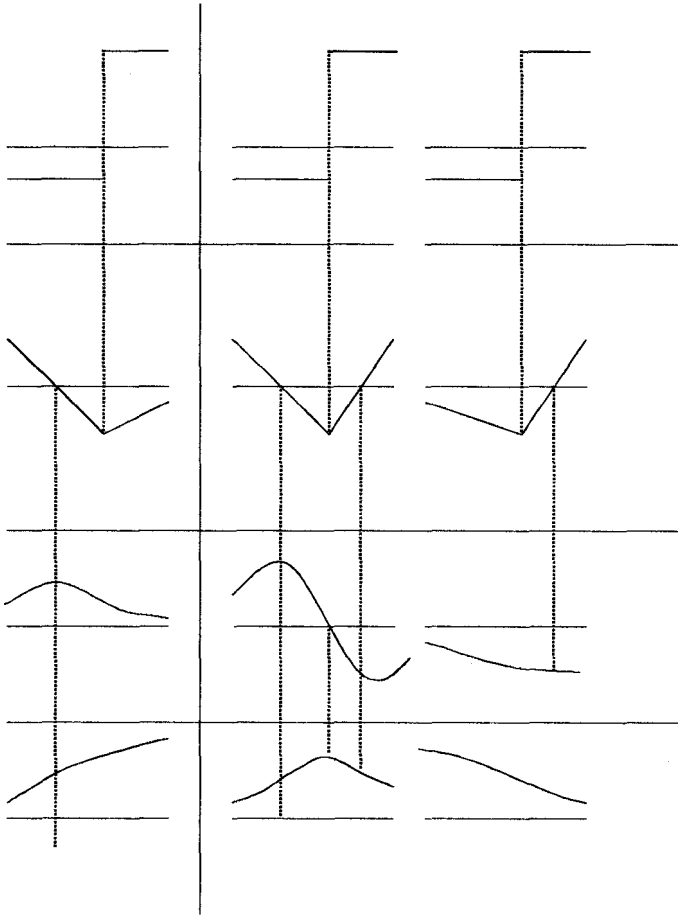


Рис. 13.2.1. Вид функции Грина, показывающий  $M'(x)$ ,  $M(x)$ ,  $u'(x)$ ,  $u(x)$  на отрезке  $[0, 1]$

**Доказательство.** Первая часть следует из теоремы 13.2.4: если  $\phi(x)$  имеет два нуля на  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ , тогда  $\phi'(x)$  будет иметь узловую точку на  $(\xi_i, \xi_{i+1})$ , что противоречит предположениям.

Для доказательства второй части заметим, что если  $\phi(a)\phi'(a) > 0$ , то  $\phi(a)\phi'(\xi) > 0$  для  $\xi \in [a, \xi_1)$ . Теорема о среднем значении утвержда-

ет, что для любого  $x \in [a, \xi_1]$  существует  $\xi \in (a, x)$  такое, что

$$\phi(a)\phi(x) = \phi(a)[\phi(a) + (x - a)\phi'(\xi)] > 0.$$

Следовательно,  $\phi(x)$  не имеет нулей на  $[a, \xi_1]$ . Аналогично  $\phi(b)\phi'(b) < 0$ , тогда  $\phi(x)$  не имеет нулей на  $[\xi_n, b]$ . ■

**Следствие 13.2.2.** Если вместо непрерывности и наличия узлов в  $(\xi_i)_1^n$  функция  $\phi'(x)$  является непрерывной и знакопостоянной на каждом интервале  $[a, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_n, b]$ , имеет скачки и может, следовательно, менять знак только в точках  $(\xi_i)_1^n$ , то результаты про  $\phi(x)$  остаются справедливыми.

Теперь перейдем к следующему результату.

**Теорема 13.2.5.** Под действием  $n$  сил  $(F_i)_1^n$ , примененных к  $(s_i)_1^n$ , где  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq 1$ , балка может поменять свой знак не более чем  $n - 1$  раз.

**Доказательство.** Мы предполагаем, что балка является положительной системой, как было описано в параграфе 13.1. Во-первых, предположим, что  $h_1, h_2, k_1, k_2$  являются положительными,  $s_1 > 0$  и  $s_n < 1$ . Отклонение балки имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^n F_i G(x, s_i),$$

и в силу (13.1.18) она удовлетворяет

$$M'(x) = \begin{cases} c_0, & x \in [0, s_1), \\ c_i, & x \in (s_i, s_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ c_n, & x \in (s_n, 1], \end{cases}$$

где

$$c_i = c_0 + \sum_{j=1}^i F_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,  $M'(x)$  обладает свойством, сформулированным в теореме 13.2.5, значит,  $M(x)$  имеет не более  $n + 1$  нулей, не более одного в каждом из промежутков  $[0, s_1], [s_1, s_2] \dots [s_n, 1]$ . Следовательно,  $M(x)$ , а значит, и  $u''(x)$  имеют не более  $n + 1$  узлов на  $(0, 1)$ , значит, по теореме 13.2.5,  $u'(x)$  имеет не более  $n + 2$  узлов и  $u(x)$  имеет не более  $n + 3$  узлов на  $(0, 1)$ .

Теперь рассмотрим последовательности

$$M'(0), M(0), u'(0), u(0) \text{ и } M'(1), M(1), u'(1), u(1),$$

т. е.

$$-h_1 u(0), k_1 u'(0), u'(0), u(0) \text{ и } h_2 u(1), -k_2 u'(1), u'(1), u(1).$$

Во-первых, предположим, что  $u(0), u'(0), u(1), u'(1)$  все являются ненулевыми, тогда уравнение (13.1.13) показывает, что

$$u'(0)u''(0) > 0 \text{ и } u'(1)u''(1) < 0.$$

Тогда теорема 13.2.5 дает, что  $u'(x)$  имеет не более  $n$  узлов,  $u(x)$  имеет не более  $n + 1$  узлов. Теперь

$$M'(0)M(0) = -h_1 k_1 u'(0)u(0),$$

$$M'(1)M(1) = -h_2 k_2 u'(1)u(1),$$

значит, либо  $M'(0)M(0) > 0$ , либо  $u'(0)u(0) > 0$ , а значит, либо  $M'(1)M(1) > 0$ , либо  $u'(1)u(1) > 0$ . Если выполнено одно из неравенств в левой части, то  $M(x)$  имеет на один узел меньше, чем ранее, тогда как если выполнено одно из неравенств в правой части, то  $u(x)$  имеет на один узел меньше. Следовательно, в любом случае  $u(x)$  обладает не более чем  $n - 1$  узлами.

Детальное рассмотрение частных случаев мы оставляем в качестве упражнений, однако в самом типичном случае  $h_1 = 0$ ,  $k_1$  является конечным и ненулевым, мы можем рассуждать следующим образом.  $M'(0) = 0$ , значит,  $M'(x) \equiv 0$  на  $[0, s_1]$ ,  $M(x) = k_1 u'(0)$  на  $[0, s_1]$ , значит,  $M(x)$  не имеет узлов на  $[0, s_1]$ ;  $u''(0)u'(0) > 0$ , поэтому оставшиеся рассуждения будут проходить. ■

Теорема 13.2.6 справедлива, ключом к доказательству является тот факт, что функция Грина является ядром осцилляции. Однако для того, чтобы это доказать, мы должны продолжить исследования осцилляторных систем функций, начатое в параграфе 10.5. Для начала рассмотрим

**Определение 13.2.1.** *Функция  $\phi(x)$  меняет свой знак  $k$  раз на промежутке  $I$ , это будет обозначаться как  $s\phi = k$ , если существуют  $k + 1$  точек  $(x_i)_{i=1}^{k+1}$  на  $I$  таких, что  $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$  и*

$$\phi(x_i)\phi(x_{i+1}) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k + 1,$$

и не существует  $k + 2$  точек с этим свойством. Очевидно, если  $\phi(x)$  является непрерывной на  $[0, 1]$  и  $s\phi = k$ , то  $\phi(x)$  обладает  $k$  узловыми точками на  $(0, 1)$ .

Перед тем как двигаться дальше, сформулируем основную композиционную формулу. Предположим, что  $\{\phi_i(x)\}_1^n$  являются непрерывными на  $[0, 1]$ ,  $M(x, s)$  является непрерывной на  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,

$$\psi_i(x) = \int_0^1 M(x, s)\phi_i(s)ds,$$

тогда

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \int \int \int \dots \int_V M(\mathbf{x}; \mathbf{s})\Phi(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{s}, \quad (13.2.4)$$

где  $V$  является симплексом, определяемым условиями  $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq 1$ ,

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \det(\psi_i(x_j)) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n),$$

$$M(\mathbf{x}; \mathbf{s}) = \det(M(x_i, s_j)),$$

$$\Phi(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}) = \det(\phi_i(s_j)) = \Phi(s_1, s_2, \dots, s_n; 1, 2, \dots, n),$$

$ds = ds_1 ds_2 \dots ds_n$ , и  $\boldsymbol{\theta} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Теорема 13.2.6.** Пусть  $\phi(x)$  непрерывна на  $[0, 1]$  и  $s\phi \leq n - 1$ . Если  $M(x, s)$  — непрерывное ядро со свойством

$$M(\mathbf{x}; \mathbf{s}) > 0 \text{ для } \mathbf{x}; \mathbf{s} \in Q,$$

то

$$\psi(x) = \int_0^1 M(x, s)\phi(s)ds$$

не обнуляется более чем  $n - 1$  раз на  $[0, 1]$ .

**Доказательство.**  $Q$  было введено в определении 10.5.1.

По предположению, существуют  $n + 1$  точек  $\{\xi_i\}_0^n$  таких, что  $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 1$  и  $\phi(x)$  имеет постоянный знак и не является тождественно нулевым на каждом из промежутков  $(\xi_{i-1}, \xi_i)$ ,  $1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим

$$\psi_i(x) = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} M(x, s)\phi(s)ds,$$



тогда

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)$$

и для всех  $(x_i)_1^n$  таких, что  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$ , получим (упр. 13.2.2)

$$\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \dots \int_{\xi_0}^{\xi_1} M(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \phi(s_1) \phi(s_2) \dots \phi(s_n) ds. \quad (13.2.5)$$

Подынтегральное выражение не является тождественно нулевым, и его ненулевые значения имеют одинаковый знак, откуда функция  $\Psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  является строго знакопостоянной, а следовательно,  $(\psi_i(x))_1^n$  образуют последовательность Чебышева (определение 10.6), и  $\psi(x)$  не обнуляется более чем  $n - 1$  раз на  $[0, 1]$ . ■

Важное ядро, удовлетворяющее условиям теоремы 13.2.7, дается формулой

$$M_\varepsilon(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\{-(x-y)^2/\varepsilon^2\}.$$

Это ядро обладает важным свойством. Пусть  $\phi(x) \in C[0, 1]$ , определим

$$\psi(x, \varepsilon) = \int_0^1 M_\varepsilon(x, s) \phi(s) ds. \quad (13.2.6)$$

Если положить  $\phi(s) = 0$  при  $x > 1$ , то

$$\begin{aligned} \psi(x, \varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^\infty \exp\{-(x-s)^2/\varepsilon^2\} \phi(s) ds, \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\xi^2) \phi(x + \varepsilon\xi) d\xi \end{aligned}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(x, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\xi^2) d\xi \cdot \phi(x) = \phi(x). \quad (13.2.7)$$

Используя это ядро, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 13.2.7.** Пусть  $\{\phi_i(x)\}_1^n$  являются линейно независимыми функциями на  $C[0, 1]$ , определим

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x).$$

Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы  $s\phi \leq n-1$  было выполнено на  $[0, 1]$  для всех  $c_i$ , не все из которых равны нулю, являются условия того, что функции

$$\Phi(\mathbf{x}; \theta) \equiv \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{x} \in Q,$$

должны иметь постоянный знак, т. е. один и тот же знак, во всех точках, где значение не равно нулю.

**Доказательство.** Если для некоторых  $c_i$ , не все из которых нулевые,  $s\phi \leq n-1$  и

$$\psi_i(x, \varepsilon) = \int_0^1 M_\varepsilon(x, s) \phi_i(s) ds,$$

то теорема 13.2.7 показывает, что

$$\psi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \varepsilon)$$

обнуляется на  $[0, 1]$  не более  $n-1$  раз.

Обратно, уравнение (13.2.7) показывает, что если  $\psi(x, \varepsilon)$  обнуляется не более чем  $n-1$  раз, то  $s\phi \leq n-1$ . Следовательно,  $s\phi \leq n-1$  для всех  $c_i$ , не все из которых нулевые, тогда и только тогда, когда  $\{\psi_i(x, \varepsilon)\}_1^n$  образуют систему Чебышева на  $[0, 1]$ , т. е. тогда и только тогда, когда

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}; \theta) := \det(\psi_i(x_j, \varepsilon))$$

строго знакопостоянна при  $\mathbf{x} \in Q$ . Если  $\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}; \alpha)$  строго знакопостоянна, то

$$\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}; \theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}; \theta)$$

строго знакопостоянна. С другой стороны, так как  $\{\phi_i(x)\}_1^n$  являются линейно независимыми,  $\Phi$  не будет тождественно нулевым. Следовательно, (13.2.4) при  $M = M_\varepsilon$  показывает, что если  $\Phi$  знакопостоянна, то и все функции  $\Psi_\varepsilon$  знакопостоянны. ■

Мы получили уже все результаты, необходимые для доказательства следующей теоремы.

**Теорема 13.2.8.** *Функция Грина положительной системы Эйлера–Бернулли является осцилляторной.*

**Доказательство.** Имеются три условия в определении 10.5.1, которые должны быть выполнены. Теорема 13.2.2 дает i); воспользовавшись энергией деформации, получаем iii). Осталось доказать ii). Теорема 13.2.5 утверждает, что если

$$u(x) = \sum_{i=1}^n F_i G(x, s_i),$$

то  $su \leq n - 1$ . Рассмотрим  $\phi_i(x) = G(x, s_i)$ , тогда так как  $\{\phi_i(x)\}_1^n$  являются линейно независимыми, то теорема 13.2.8 утверждает, что

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; 1, 2, \dots, n) = G(\mathbf{x}; \mathbf{s}) \geq 0$$

для  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in Q$ . Это и есть ii). ■

Следующая теорема показывает, какие определители из ii) являются нулевыми, а какие являются ненулевыми; она является аналогом теоремы 10.5.4 для балки.

**Теорема 13.2.9.**  *$G(\mathbf{x}; \mathbf{s}) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathcal{I}$  и  $x_i < s_{i+2}$  а,  $s_i < x_{i+2}$  для  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .*

**Доказательство.** Первое условие является необходимым; иначе один из  $x_1, x_n, s_1, s_n$  не принадлежит  $\mathcal{I}$ , например, если  $x_1 = 0$ , то  $G(x_1, s_i) = 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  и определитель является нулевым.

Теперь допустим существование индекса  $k$  такого, что  $1 \leq k \leq n - 2$  и  $x_k \geq s_{k+2}$ . Тогда  $x_i \geq s_j$  для  $i = k, k + 1, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, k + 2$ . Рассмотрим коэффициенты подматрицы, образованной строками с индексами  $k, k + 1, \dots, n$  и столбцами, имеющими индексы  $1, 2, \dots, k + 2$  для матрицы  $(G(x_i, s_j))$ . Так как  $x_o \geq s_j$  для каждого коэффициента, уравнение (13.1.21) показывает, что

$$G(x_i, s_j) = \phi(s_j)\theta(x_i) + \psi(s_j)\chi(x_i),$$

значит, матрица имеет ранг  $\leq 2$ . Если  $n = 3$ , то  $k = 1$  и подматрица является полной матрицей ранга 2, а следовательно, имеет нулевой определитель. Если  $n \geq 4$ , тогда мы вычислим  $n \times n$ -определитель, используя

разложение Лапласа относительно миноров порядка  $k + 2$ , выбранных из первых  $k + 2$  столбцов; каждый такой минор, имеющий  $k + 2 \geq 3$  строк, будет нулевым, так что и определитель является нулевым. Следовательно, условие  $x_i < s_{i+2}$  является необходимым для того, чтобы  $G(\mathbf{x}; \mathbf{s})$  являлась положительной, и аналогично  $s_i < x_{i+2}$ .

Теперь докажем достаточность. Пусть  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathcal{I}$ .  $x_i < s_{i+2}$ , и  $s_i < x_{i+2}$  для  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ . Мы докажем, что определитель является положительным, по индукции. Если  $n = 1$ , то все верно по теореме 13.2.2. Предположим, если это возможно, что утверждение справедливо для  $n - 1$ , однако не для  $n$ , т.е. существуют  $(x_i^0)_1^n, (s_i^0)_1^n$  из  $I$ , удовлетворяющие условиям  $x_i^0 < s_{i+2}^0, s_i^0 < x_{i+2}^0$  для  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , откуда  $G(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) = 0$ , однако  $G(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0; s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-1}^0) > 0$  и  $G(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0; s_2^0, s_3^0, \dots, s_n^0) > 0$ . Теперь выберем произвольные точки  $(x_i)_1^n, (s_i)_1^n$  такие, что

$$x_1^0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq x_n^0, \quad s_1^0 \leq s_1 < x_2 < \dots < s_n \leq s_n^0,$$

и перенумеруем  $(x_i)_1^n, (x_i^0)_1^n$  по возрастанию  $(x_i^0)_1^{2n}$ .  $2n \times 2n$ -матрица  $(G(x_i^0, s_i^0))$  обладает свойством TN и миноры, отвечающие  $(x_i^0)_1^n$  и  $(s_i^0)_1^n$ , удовлетворяют критерию из теоремы 6.6.6. Следовательно, матрица имеет ранг  $n - 1$ , откуда

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n; s_1, s_2, \dots, s_n) = 0. \quad (13.2.8)$$

Возможны два случая:  $n \geq 3$  и  $n = 2$ . В первом случае неравенства  $x_1^0 < s_3^0 \leq s_n^0$  и  $s_1^0 < x_3^0 \leq x_n^0$  позволяют заключить, что промежутки  $(x_1^0, x_n^0)$  и  $(s_1^0, s_n^0)$  перекрываются. Следовательно, мы можем рассмотреть  $x_i = s_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ , поэтому из (13.2.8) следует  $G(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) = 0$ , что противоречит условию iii) определения 10.5.1.

Если  $n = 2$ , уравнение (13.2.8) утверждает, что  $G(x_1, x_2; s_1, s_2) = 0$  для всех  $x_1, x_2, s_1, s_2$ , удовлетворяющих неравенствам  $x_1^0 \leq x_1 < x_2 \leq x_2^0, s_1^0 \leq s_1 < s_2 \leq s_2^0$ . Без ограничения общности мы можем выбрать  $x_2^0 \leq s_1^0$ , тогда  $x_1 < s_1 < s_2, x_2 \leq s_1 < s_2$  и

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; s_1, s_2) &= \begin{vmatrix} \phi(x_1)\theta(s_1) + \psi(x_1)\chi(s_1) & \phi(x_1)\theta(s_2) + \psi(x_1)\chi(s_2) \\ \phi(x_2)\theta(s_1) + \psi(x_2)\chi(s_1) & \phi(x_2)\theta(s_2) + \psi(x_2)\chi(s_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \phi(x_1) & \psi(x_1) \\ \phi(x_2) & \psi(x_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \theta(s_1) & \chi(s_1) \\ \theta(s_2) & \chi(s_2) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Один или другой множитель в этом уравнении должен быть нулевым. Предположим, что для некоторых  $s_1, s_2$  второй множитель не является нулевым, тогда первый должен быть равен нулю для всех  $x_1, x_2$  таких, что  $x_1^0 \leq x_1 < x_2 \leq x_2^0$ . Однако это означает, что  $\phi(x), \psi(x)$  являются пропорциональными, что противоречит тому факту, что существуют линейно независимые решения  $(EIy'')'' = 0$ , удовлетворяющие краевым условиям при  $x = 0$ . Аналогично, если первый множитель не является нулевым для некоторых  $x_1, x_2$ , то второй множитель будет тождественно нулевым, это снова невозможно. Следовательно, мы получаем противоречие. Указанные условия являются достаточными для того, чтобы выполнялось  $G(x_1, x_2, \dots, x_n; s_1, s_2, \dots, s_n) > 0$ . ■

### Упражнения 13.2

- 1) Установите теорему 13.2.1 в случае, если некоторые из  $h_i, k_i$  являются нулевыми или  $\infty$ , однако система является положительной.
- 2) Проверьте (13.2.4) при условии  $n = 2$ . Покажите, что

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2; 1, 2) &= \int_0^1 \int_0^1 M(x_1, x_2; s_1, s_2) \phi(s_1) \phi(s_2) ds_2 ds_1 \\ &= \frac{1}{2_0^1} \int_0^1 \int_0^1 M(x_1, x_2; s_1, s_2) \Phi(s_1, s_2; 1, 2) ds_2 ds_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^{s_1} M(x_1, x_2; s_1, s_2) \Phi(s_1, s_2; 1, 2) ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

- 3) Обоснуйте уравнение (13.2.5) для  $n = 2$ .
- 4) Обоснуйте следствие к теореме 13.2.5.
- 5) Проверьте справедливость теоремы 13.2.6 в случае, когда некоторые из  $h_i, k_i$  являются нулевыми или  $\infty$ , однако система остается положительной.

### 13.3. Узлы и нули консольной балки

Для консольной балки управляющее уравнение имеет вид:

$$(r(x)u''(x))'' = \lambda a(x)u(x), \quad (13.3.1)$$

$$u(0) = 0 = u'(0), \quad u''(1) = 0 = u'''(1). \quad (13.3.2)$$

Теория из параграфа 13.2 показывает, что функция Грина для балки является ядром осцилляции на  $I = (0, 1]$ , значит, собственные значения  $(\lambda_i)_1^\infty$  являются различными, а собственные функции  $(\phi_i(x))_1^\infty$  обладают свойствами (1)–(3), сформулированными в теореме 10.6.4.

Нам потребуется усилить этот классический результат. Для того, чтобы это сделать, мы предположим, как и в параграфе 13.1, что  $a(x), r(x) \in C^2[0, 1]$ , и возьмем  $M(x) = r(x)u''(x)$ . Уравнения (13.3.1)–(13.3.2) показывают, что  $M(x)$  удовлетворяет условиям

$$(b(x)M''(x))'' = \lambda s(x)M(x), \quad (13.3.3)$$

$$M''(0) = M'''(0), \quad M(1) = 0 = M'(1), \quad (13.3.4)$$

где  $b(x) = 1/a(x)$ ,  $s(x) = 1/r(x)$ . Следовательно,  $M(x)$  является собственной функцией для обратной консоли на  $(0, 1)$  и, следовательно, является собственной функцией ядра осцилляции на  $[0, 1)$ .

**Теорема 13.3.1.** *Если  $\{\phi_i(x)\}_1^\infty$  являются собственными функциями консольной балки, то*

- 1)  $\phi_1(x), \phi_1'(x)$  не имеет нулей на  $(0, 1]$ ,
- 2)  $\phi_i(x), \phi_i'(x)$  имеет  $(i - 1)$  узлов на  $(0, 1)$  и не имеет других нулей на  $(0, 1]$ ,
- 3) если

$$\phi(x) = \sum_{i=j}^k c_i \phi_i(x), \quad 1 \leq j \leq k, \quad \sum_{i=j}^k c_i^2 > 0,$$

то  $\phi(x)$  и  $\phi'(x)$  имеют не менее  $(j - 1)$  узлов и не более  $(k - 1)$  нулей на  $(0, 1]$ ,

- 4)  $M_i(x) := r(x)\phi_i''(x)$  и  $M_i'(x)$  обладает свойствами 2) и 3) на  $[0, 1)$ .

**Доказательство.** Сформулированные свойства  $\phi_i(x), M_i(x)$  следуют из теоремы 10.6.4. Мы проверим их для  $\phi_i'(x), M_i'(x)$ .

1)  $\phi_1'(0) = 0$  если,  $\phi_1'(x_0) = 0$  для некоторого  $x_0 \in (0, 1]$ , тогда по теореме Ролля (теорема 13.2.3) существует точка  $\xi \in (0, x_0)$  такая, что  $\phi_1'(\xi) = 0$ , что противоречит условию о том, что  $M_1(x)$  не имеет нулей на  $[0, 1)$ .

2)  $\phi_i(x)$  имеет  $i-1$  узлов  $(x_j)_1^{i-1}$  на  $(0, 1)$  и нуль  $x_0 = 0$ . По теореме 13.2.4,  $\phi'_i(x)$  имеет  $i-1$  узлов  $(\xi_j)_1^{i-1}$ , удовлетворяющих  $x_{j-1} < \xi_{j-1} < x_j$ ,  $j = 1, \dots, i-1$ ; он также имеет нуль при  $x = 0$ . Если  $\phi'_i(x)$  имеет какой-то другой ноль на  $(0, 1]$ , то  $\phi''_i(x)$  будет иметь более чем  $i-1$  нулей на  $(0, 1]$ , что противоречит условию 4) для  $M_i$ .

3) Часть, относящаяся к  $\phi'_i(x)$ , доказывается аналогично. См. упр. 13.3.1.

4) Следует из того, что  $M_i(x)$  является собственной функцией обратной консоли. ■

**Теорема 13.3.2.** Если  $\phi_i(x)$  является собственной функцией консольной балки, то  $\phi_i(1)\phi'_i(1) > 0$ .

**Доказательство.** Теорема 13.3.1 показывает, что  $\phi_i(1)\phi'_i(1) > 0 \neq 0$ ; покажем, что  $\phi_i(1)$  и  $\phi'_i(1)$  имеют одинаковый знак. Функция Грина для консоли задается уравнением (13.1.17) и

$$\phi_i(x) = \lambda_i \int_0^1 G(x, s) a(s) \phi_i(s) ds,$$

откуда

$$\phi_i(x) = \lambda_i \int_0^1 \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} a(s) \phi_i(s) ds.$$

Так как

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, s) = \int_0^{\min(x, s)} \frac{(s-t) dt}{r(t)},$$

получим

$$[\phi'_i(1)]_x^1 = \lambda_i \int_x^1 a(s) \left\{ \int_x^s \frac{(s-t)\phi_i(t) dt}{r(t)} \right\} ds. \quad (13.3.5)$$

Пусть  $x^*$  является наибольшим нулем для  $\phi_i(x)$ ; она будет узлом, если  $i \geq 2$ , и 0, если  $i = 1$ . Так как  $\phi_i(1) > 0$ , получаем  $\phi'_i(x^*) > 0$ , а следовательно,  $\phi_i(x) > 0$  для  $x \in (x^*, 1]$ . Значит, уравнение (13.3.5) дает

$$\phi'_i(1) - \phi'_i(x^*) > 0,$$

т. е.  $\phi'_i(1) > 0$ . ■

**Следствие 13.3.1.** Если  $\phi_i(x)$  является собственной функцией консольной балки, то  $M_i(0)M_i'(0) > 0$ .

### Упражнения 13.3

- 1) Проверьте часть 3) теоремы 13.3.1, относящейся к  $\phi_i'(x)$ .

## 13.4. Фундаментальные условия на начальные данные

Теперь мы можем доказать важную теорему.

**Теорема 13.4.1.** Пусть  $a(x), r(x)$  имеет производные всех порядков (это ограничение может быть ослаблено, однако его достаточно для наших целей), тогда бесконечная матрица

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \lambda_3 u_3 & \dots \\ \lambda_1 \theta_1 & \lambda_2 \theta_2 & \lambda_3 \theta_3 & \dots \\ \lambda_1^2 u_1 & \lambda_2^2 u_2 & \lambda_3^2 u_3 & \dots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

обладает свойством ТР. Здесь  $u_i := \phi_i(1)$ ,  $\theta_i := \phi_i'(1)$ , и  $\phi_i(x)$  выбираются таким образом, что  $\phi_i(1) > 0$ .

Прежде чем переходить к доказательству, мы проиллюстрируем суть наших рассуждений в простом случае.

Рассмотрим определитель

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix};$$

так как он может быть записан в виде

$$\phi(x) = \sum_{i=2}^4 c_i \phi_i(x),$$

то по теореме 13.3.1 получаем, что он обладает по крайней мере одним узлом на  $(0, 1)$  и не более чем 3 нулями на  $(0, 1]$ . На самом деле, так как



$\phi(1) = 0 = \phi'(1) = \phi''(1) = \phi'''(1)$ , она имеет четырехкратный корень при  $x = 1$ . Так как теорема 13.3.1 не показывает, как вычислить такой кратный нуль, мы должны рассмотреть нули  $\phi'(x)$  и  $\phi''(x)$ . Известно, что  $\phi(x)$  имеет один узел на  $(0, 1)$  и имеет нули в  $0$  и  $1$ . Пусть  $\phi(x)$  имеет два нуля  $a_1, a_2$  на  $(0, 1)$ . Используя теорему 13.2.3, получим, что

$\phi'(x)$  обладает нулями  $0, b_1, b_2, b_3, 1$

$M(x) := r\phi''(x)$  обладает нулями  $c_1, c_2, c_3, c_4, 1$ .

Однако  $M(x) = \sum_{i=2}^4 c_i M_i(x)$ , и, согласно пункту 4) теоремы 13.3.1,  $M(x)$  обладает не более, чем тремя нулями на  $[0, 1)$ . Получено противоречие;  $\phi(x)$  обладает только одним нулем, узлом, на  $(0, 1)$ .

$\phi_i(x)$  имеет в точности  $i-1$  перемен знака на  $(0, 1)$ , значит,  $\phi_i(1) > 0$  дает  $(-1)^{i-1}\phi_i(0+) > 0$ . Теперь мы докажем теорему индукцией по порядку миноров. Предположим, что все  $2 \times 2$ -миноры  $P$  являются положительными, тогда, так как

$$(-)\phi_2(0+) > 0, \quad (-1)^2\phi_3(0+) > 0, \quad (-1)^3\phi_4(0+) > 0,$$

мы получаем, раскладывая определитель  $\phi(x)$  по первой строке, что  $(-)\phi(0+) > 0$  и, значит,  $\phi(1-) > 0$ . Теперь, раскладывая  $\phi(x)$  для малого  $x$  в ряд Тейлора около  $x = 1$ :

$$\phi(1-x) = \frac{x^4}{4!}\phi^{(4)}(1) + O(x^5),$$

так что

$$\phi^{(4)}(1) = \begin{vmatrix} \lambda_2 u_2 & \lambda_3 u_3 & \lambda_4 u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_3 u_3 & \lambda_4 u_4 \end{vmatrix} > 0.$$

Мы можем рассматривать

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} \phi'_2(x) & \phi'_3(x) & \phi'_4(x) \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_3 u_3 & \lambda_4 u_4 \end{vmatrix}$$

в точности аналогично:  $\psi(x)$  имеет только один ноль, являющийся узлом, на  $(0, 1)$ ;  $\phi'_i(1) > 0$  дает  $(-1)^{i-1}\phi'_i(0+) > 0$ ,  $(-)\psi(0+) > 0$  и, следовательно,  $\psi(1-) > 0$ . Однако

$$\psi(1-x) = \frac{x^4}{4!}\psi^{(4)}(1) + O(x^5)$$

и

$$\psi^{1\nu}(1) = \begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \lambda_2 u_2 & \lambda_3 u_3 & \lambda_4 u_4 \\ \lambda_2 \theta_2 & \lambda_3 \theta_3 & \lambda_4 \theta_4 \end{vmatrix} > 0.$$

Теперь мы обобщим эти рассуждения для того, чтобы получить формальное доказательство теоремы.

**Доказательство.** Будем использовать следствие к теореме 6.8.2 для доказательства теоремы индукцией по порядку миноров. Все миноры порядка 1 являются положительными; предположим, что все миноры порядка  $p$  являются положительными; мы покажем, что все миноры порядка  $p+1$ , содержащие последовательные строки и столбцы, являются положительными. Так как строки матрицы  $P$  повторяются, то достаточно рассмотреть только два типа миноров: те, которые начинаются с  $u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ , и те, которые начинаются с  $\theta_m, \theta_{m+1}, \theta_n$ . Как мы показали, в примере, они оба допускают аналогичные рассуждения; мы рассмотрим только первый тип.

Возьмем

$$\phi(x) = \begin{vmatrix} \phi_m(x) & \phi_{m+1}(x) & \dots & \phi_n(x) \\ u_m & u_{m+1} & \dots & u_n \\ \theta_m & \theta_{m+1} & \dots & \theta_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = \sum_{i=m}^n c_i \phi_i(x).$$

Рассмотрим  $n = m + p$ . Если  $p$  является четным, т. е.  $p = 2q$ , то последняя строка имеет вид  $\lambda_m^{q-1} \theta_m, \dots, \lambda_n^{q-1} \theta_n$ ; если  $p$  является нечетным т. е.  $p = 2q - 1$ , то последняя строка имеет вид  $\lambda_m^{q-1} u_m, \dots, \lambda_n^{q-1} u_n$ . Теорема 13.3.1 утверждает, что  $\phi(x)$  обладает по крайней мере  $(m-1)$  узлами на  $(0, 1)$  и не более  $(n-1)$  нулями на  $(0, 1)$ . Пусть  $p$  является четным, тогда  $\phi(x)$  имеет нуль кратности  $2p$  в 1. Пусть  $\phi(x)$  обладает  $j$  нулями на  $(0, 1)$ , где  $j \geq m-1$ . Значит,  $\phi(x)$  имеет нули  $0, a_1, a_2, \dots, a_j, 1$ ;  $\phi'(x)$  имеет нули  $0, b_1, \dots, b_{j+1}, 1$ ;  $M(x)$  имеет нули  $c_1, c_2, \dots, c_{j+2}, 1$ . Теперь введем обозначение

$$M_{,1} := M', \quad M_{,2} := a^{-1}(x)M'', \quad M_{,3} := (a^{-1}M'')', \quad M_{,4} := r(a^{-1}M'')'',$$

тогда уравнение (13.3.3) утверждает, что  $M_{i,4} = \lambda_i M_i$ . Теперь расширим это обозначение: если  $k = 4s + t$ , то  $M_{i,k} := (M_{,4s})_{,t}$ , значит,  $M_{i,k} = (M_{i,4s})_{,t} = \lambda_i^s M_{i,t}$ . Очевидно, что мы можем получить из теоремы 13.2.3, что существует нуль  $M_{,k+1}$  между любыми двумя нулями  $M_{,k}$ .

Теперь можно расширить наше исследование нулей.

$$\begin{aligned} M(x) &\text{ имеет нули } c_1, c_2, \dots, c_{j+2}, 1, \\ M_{,1}(x) &\text{ имеет нули } d_1, d_2, \dots, d_{j+2}, 1, \\ M_{,2}(x) &\text{ имеет нули } 0, e_2, \dots, e_{j+2}, 1, \\ M_{,3}(x) &\text{ имеет нули } 0, f_2, \dots, f_{j+3}, 1, \\ M_{,4}(x) &\text{ имеет нули } g_1, \dots, g_{j+4}, 1, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В каждом 4-цикле два нуля появляются при  $x = 0$ , для  $M_{,4s+2}$  и  $M_{,4s+3}$ . Следовательно,  $M_{,4q-4}$  имеет  $j+2q$  нулей на  $[0, 1)$ . Однако  $M_{i,4q} = \lambda_i^q M_i$ , значит,

$$M_{,4q-4} = \sum_{i=m}^n \lambda_i^{q-1} c_i M_i$$

и, следовательно, в силу части 4) теоремы 13.3.1,  $M_{,4q-4}$  может иметь не более  $n - 1 = m + 2q - 1$  нулей на  $[0, 1)$ . Следовательно,  $j + 2q \leq m + 2q - 1$ , и  $j \leq m - 1$ , значит,  $j = m - 1$ :  $\phi(x)$  имеет только  $m - 1$  нулей, все они узлы, на  $(0, 1)$ .

Продолжим наши рассуждения аналогично проделанным в примере. Предположим, что все миноры  $P$  порядка  $p$  являются положительными. Так как  $\phi_i(1) > 0$ , получим  $(-1)^{i-1} \phi_i(0+) > 0$ , и, раскрывая  $\phi(x)$  по первой строке, имеем,  $(-1)^{m-1} \phi(0+) > 0$ , а значит, так как  $\phi(x)$  имеет только  $m - 1$  перемен знака на  $(0, 1)$ ,  $\phi(1-) > 0$ . Теперь разложим  $\phi(1-x)$  для малого  $x$ :

$$\phi(1-x) = \frac{x^{2p}}{(2p)!} \phi^{2p}(1) + O(x^{2p+1}),$$

откуда

$$\phi^{2p}(1) = \begin{vmatrix} u_m & u_{m+1} & \dots & u_n \\ \theta_m & \theta_{m+1} & \dots & \theta_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_m^q u_m & \lambda_{m+1}^2 u_{m+1} & \dots & \lambda_n^q u_n \end{vmatrix} > 0.$$

Это минор порядка  $(p+1)$  в  $P$ . Так как все другие случаи могут быть исследованы аналогичным способом, мы делаем вывод, что все миноры  $P$ , содержащие  $(p+1)$  последовательных строк и столбцов, являются положительными; следствие к теореме 6.8.1 утверждает, что матрицы со свойством  $P$  обладают также свойством ТР. ■

### Упражнения 13.4

- 1) Проведите обобщение рассуждений, использовавшихся для  $\psi(x)$  в уравнении (13.4.1).

## 13.5. Спектр балки

Предположим, что балка из уравнения (13.1.1), имеющая длину  $L$ , площадь поперечного сечения  $A(x)$  и второй момент в поперечном сечении  $I(x)$ , преобразуется в балку длины  $L^*$  с площадью поперечного сечения  $A^*(x^*)$  и вторым моментом  $I^*(x^*)$ , где

$$x^* = \gamma x, \quad I^*(x^*) = \alpha I(x), \quad A^*(x^*) = \beta A(x), \quad L^* = \gamma L, \quad (13.5.1)$$

тогда спектр новой балки при любой комбинации краевых условий (13.1.5)–(13.1.8) будет таким же, как и для исходной балки, если

$$\gamma^4 = \alpha/\beta. \quad (13.5.2)$$

С этим соотношением уравнение (13.5.1) определяет двухпараметрическое семейство изоспектральных балок.

Теперь рассмотрим балку, закрепленную при  $x = 0$  и находящуюся под действием концентрированной статической силы  $F$  и вращательного момента  $M$  на ее свободном конце  $x = L$ . Отклонение задается уравнением

$$(I(x)u''(x))'' = 0 \quad (13.5.3)$$

при условиях

$$u(0) = 0 = u'(0), \quad (I(x)u''(x))'_{x=L} = -F, \quad I(L)u''(L) = M, \quad (13.5.4)$$

откуда

$$u(x) = F \int_0^x \frac{(x-s)(L-s)}{I(s)} ds + M \int_0^x \frac{(x-s)ds}{I(s)}, \quad (13.5.5)$$

краевое смещение и наклон определяются уравнениями

$$u(L) = G_2 F + G_1 M, \quad u'(L) = G_1 F + G_0 M,$$

где динамические характеристики  $G_i$  задаются формулами

$$G_i = \int_0^L \frac{(L-s)^i ds}{I(s)}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Для преобразованной балки динамические характеристики имеют вид

$$G_i^* = \frac{\gamma^{i+1}}{\alpha} G_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Напоследок отметим, что уравнение (13.5.2) и любые два из четырех уравнений

$$L^* = L, \quad G_i^* = G_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (13.5.6)$$

требуют того, чтобы  $\alpha = 1 = \beta = \gamma$ , поэтому балки идентичны.

Теперь воспользуемся результатами параграфа 13.4 для упорядочивания собственных значений балки, закрепленной в  $x = 0$  и при различных краевых условиях в точке  $x = 1$ . (Мы будем работать с безразмерным уравнением (13.1.4) и использовать упорядочивание 1,2,3,...) Рассмотрим вариационную задачу нахождения стационарных значений функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 r(x)(u''(x))^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 a(x)u^2(x) dx - Fu(1) - Mu'(1). \quad (13.5.7)$$

Заменим  $u$  на  $u + \delta u$  и найдем  $\delta J := J(u + \delta u) - J(u)$ ; после двух интегрирований по частям получим

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_0^1 \{(ru'')'' - \lambda au\} \delta u dx + [r(1)u''(1) - M] \delta u'(1) \\ & - [(r(x)u''(x))'_{x=1} + F] \delta u(1), \end{aligned} \quad (13.5.8)$$

значит, смещение, которое делает  $J$  стационарным, удовлетворяет уравнению (13.1.4) и краевым условиям

$$r(1)u''(1) = M, \quad (r(x)u''(x))'_{x=1} = -F, \quad (13.5.9)$$

т. е. оно является смещением консоли под действием концентрированной статической силы  $F$  и момента  $M$ , примененным в точке  $x = 1$ .

Теперь воспользуемся собственными функциями  $(\phi_i(x))_1^\infty$  консоли для нахождения другого выражения этого смещения. Собственные функции консоли полны в  $L^2(0, 1)$ . Запишем

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x)$$

и воспользуемся упр. 13.1.3, чтобы получить

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \{F u_i + M \theta_i\},$$

где  $u_i = \phi_i(1)$ ,  $\theta_i = \phi_i'(1)$  и собственные функции отнормированы таким образом, что

$$\int_0^1 a(x) \phi_i^2(x) dx = 1.$$

$J(u)$  является стационарным, если

$$(\lambda_i - \lambda) c_i = F u_i + M \theta_i,$$

т. е.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(F u_i + M \theta_i)}{\lambda_i - \lambda} \phi_i(x).$$

Это дает *концевые динамические характеристики*  $\alpha_{x1}, \alpha_{x1'}, \alpha_{x'1}, \alpha_{x'1'}$  для балки со свойствами

$$u(x) = \alpha_{x1} F + \alpha_{x1'} M, \quad u'(x) = \alpha_{x'1} F + \alpha_{x'1'} M;$$

$$\alpha_{x1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i \phi_i(x)}{\lambda_i - \lambda}, \quad \alpha_{x1'} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i \phi_i(x)}{\lambda_i - \lambda}, \quad (13.5.10)$$

$$\alpha_{x'1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i \phi_i'(x)}{\lambda_i - \lambda}, \quad \alpha_{x'1'} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i \phi_i'(x)}{\lambda_i - \lambda}. \quad (13.5.11)$$

Теперь мы воспользуемся этими представлениями для получения уравнений на собственные значения балки, отвечающие различным условиям при  $x = 1$ .

Собственные значения закрепно-шарнирной балки являются значениями  $\omega^2$ , для которых в случае применения только концевой силы  $F$  (т. е.  $M = 0$ ) отсутствует концевое смещение, т. е.  $u(0) = 0$ . Следовательно, они являются корнями уравнения  $\alpha_{11} = 0$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2}{\lambda_i - \lambda} = 0. \quad (13.5.12)$$

Мы будем их обозначать через  $(\mu_i)_1^\infty$ . Так как  $u_i > 0$ , они удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i < \mu_i < \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Аналогично собственные значения  $(\sigma_i)_1^\infty$  закрепно-скользящей балки являются значениями  $\omega^2$ , для которых только  $M$  (т. е.  $F' = 0$ ) не вызывает концевых наклонов, т. е.  $u'(1) = 0$ . Они являются корнями  $\alpha_{11'} = 0$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i^2}{\lambda_i - \lambda} = 0, \quad (13.5.13)$$

и, так как  $\theta_i > 0$ , они удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i < \sigma_i < \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Антирезонансные собственные значения  $(\nu_i)_1^\infty$  являются теми, при которых  $F'$  в одиночку не дает наклона, или, что эквивалентно,  $M$  в одиночку не приводит к смещению; они являются корнями  $\alpha_{11''} = 0$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i \theta_i}{\lambda_i - \lambda} = 0. \quad (13.5.14)$$

Так как  $u_i \theta_i > 0$  (теорема 13.3.2), они удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i < \nu_i < \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Мы можем упорядочить  $\mu_i, \sigma_i, \nu_i$ , посредством использования теоремы 8.4.2 и полной положительности матрицы  $P$  в теореме 13.4.1:  $u_j \sigma_i - u_i \sigma_j > 0$  для  $i > j$  дает упорядочение

$$\sigma_i < \nu_i < \mu_i. \quad (13.5.15)$$

Так как условие закрепленных концов может быть получено добавлением новых ограничений  $u'(1) = 0$  к условию шарнирных концов,

а с другой стороны, добавлением ограничения  $u(1) = 0$  к условию скользких концов, закрепленные-закрепленные собственные значения  $(\gamma_i)_1^\infty$  удовлетворяют

$$\mu_i < \gamma_i < \mu_{i+1}, \quad \sigma_i < \gamma_i < \sigma_{i+1}.$$

Рассматривая все эти неравенства вместе, мы получим

$$\lambda_1 < \sigma_1 < \nu_1 < \mu_1 < (\lambda_2, \gamma_1) < \sigma_2 < \nu_2 < \mu_2 < (\lambda_3, \gamma_2) \dots \quad (13.5.16)$$

Как и для дискретной балки (см. упр. 8.5.3) относительное положение  $\gamma_i$  и  $\lambda_{i+1}$  неизвестно. Таблицы 7.2(b), (c) из книги Бишоп и Джонсона (Bishop, Johnson) [34] (1960) показывают, что для однородной балки  $\gamma_1 > \lambda_2$ ,  $\gamma_2 < \lambda_3$ ,  $\gamma_3 > \lambda_4$  и т. д., поэтому  $\gamma_i$  и  $\lambda_{i+1}$  являются вертикально идентичными.

Для того, чтобы найти асимптотическую форму собственных значений, отвечающих различным краевым условиям, мы будем использовать WKV-метод, см., например, работу Карриера, Крука и Пирсона (Carrier, Krook, Pearson) [49] (1966), стр. 291. Для начала сделаем замену независимой переменной:

$$s = \int_0^x \left( \frac{a(t)}{r(t)} \right)^{\frac{1}{4}} dt$$

и запишем

$$b(s) = \left( \frac{a(x)}{r(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad c^2(s) = (r^3(x)a(x))^{\frac{1}{4}},$$

тогда

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{dx} = \left( \frac{a(x)}{r(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{d}{ds} = b(s) \frac{d}{ds}$$

и

$$r(x) \frac{d^2}{dx^2} = r(x) b(s) \frac{d}{ds} \left( b(s) \frac{d}{ds} \right) = c^2(s) \frac{d}{ds} \left( b(s) \frac{d}{ds} \right).$$

Следовательно, уравнение (13.3.1) принимает вид

$$b \frac{d}{ds} \left( b \frac{d}{ds} \left( c^2 \frac{d}{ds} \left( b \frac{du}{ds} \right) \right) \right) = \lambda b^3 c^2 u,$$



так как  $a = b^3 c^2$ . Следовательно, полагая  $' = d/ds$ , получим

$$(b(c^2(bu')'))' = \lambda b^2 c^2 u, \quad 0 \leq s \leq L, \quad (13.5.17)$$

где

$$L = \int_0^1 \left( \frac{a(t)}{r(t)} \right)^{\frac{1}{4}} dt. \quad (13.5.18)$$

Новые краевые условия принимают вид

$$u(0) = 0 = u'(0), \quad (13.5.19)$$

$$(bu')'(L) = 0 = (c^2(bu')')(L). \quad (13.5.20)$$

Теперь предположим, что  $\lambda$  является большим положительным числом, рассмотрим  $\lambda = z^4$  и разложим левую часть уравнения (13.5.17), чтобы получить

$$\begin{aligned} p^2(s)u''(s) + 2p(s)p'(s)u'''(s) + \\ + f_1(s)u''(s) + f_2(s)u'(s) = z^4 p^2(s)u(s), \end{aligned} \quad (13.5.21)$$

где

$$p = bc, \quad f_1 = p'' + bc^2 b'' + 2bcb'c', \quad f_2 = (b(c^2 b'))'.$$

Для большого  $z$  первые два слагаемых из формулы (13.5.21) будут доминировать. Будем искать решения в виде:

$$U(s) = \exp \left( \int (z\psi_1(s) + \psi_2(s)) ds \right).$$

После подстановки в (13.5.21) и оставления только слагаемых, содержащих  $z^4$  и  $z^3$ , имеем

$$\psi_1^4 = 1, \quad p^2(6\psi_1^2\psi_1' + 4\psi_1^3\psi_2) + 2pp'\psi_1^3 = 0,$$

так что  $\psi_1 = \pm 1, \pm i$  и  $2p\psi_2 + p' = 0$ , т. е.  $\exp(\psi_2(s)) = p^{-\frac{1}{2}}(s)$ .

Следовательно, существует четыре решения, отвечающих четырем значениям  $\psi_1$ , и можно записать

$$u(s) = p^{-\frac{1}{2}}(s) \{A \cos zs + B \sin zs + C \cosh zs + D \sinh zs\}. \quad (13.5.22)$$

Помимо множителя  $p^{-\frac{1}{2}}(s)$ , оно имеет тот же вид, что и уравнение однородной балки, значит, для большого  $z$  уравнение на собственные значения будет тем же, что и для однородной балки эквивалентной длины  $L$ . Следовательно, для консоли четыре крайних условия (13.5.19); (13.5.20) дадут уравнение на собственные значения, приведенное в книге Бишоп и Джонсона [34] (1960), стр. 382:

$$\cos zL \cosh zL + 1 = 0, \quad (13.5.23)$$

значит,

$$\cos zL = -\operatorname{sech} zL \simeq -2 \exp(-zL)$$

и

$$z_i L \simeq (2i - 1) \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

или

$$\lambda_i \simeq (2i - 1)^4 \pi^4 / (16L^4).$$

Аналогично получим

$$\mu_i \simeq (4i + 1)^4 \pi^4 / (256L^4),$$

$$\nu_i \simeq (i - 1)^4 \pi^4 / L^4,$$

$$\sigma_i \simeq (4i - 1)^4 \pi^4 / (256L^4),$$

$$\gamma_i \simeq (2i + 1)^4 \pi^4 / (16L^4).$$

Заметим, что они подчинены условиям чередования (13.5.15) и что  $\gamma_i \simeq \lambda_{i+1}$ . Заметим также, что, учитывая замену обозначений, значения  $\mu_i, \nu_i, \gamma_i$  согласуются со значениями, найденными Барсилоном в [21] (1982); его значения для  $\sigma_r^2, \omega_r^2$  (наши  $\sigma_i, \lambda_i$ ), являются некорректными.

### Упражнения 13.5

- 1) Проверьте утверждение (13.5.2).
- 2) Проведите интегрирование от уравнений (13.5.3), (13.5.4) к (13.5.5).
- 3) Найдите представления для  $\delta J$  в уравнении (13.5.7), заменяя  $u$  на  $u + \delta u$ , в (13.5.6) игнорируя слагаемые второго порядка и дважды интегрируя по частям.

- 4) Покажите, что асимптотическая форма уравнения на собственные значения закрепленной-закрепленной балки имеет вид  $\cos zL \times \cosh zL - 1 = 0$ , и используйте это уравнение вместе с уравнением (13.5.23), чтобы установить, что для больших значений  $i$ , величина  $\gamma_i$  попеременно больше и меньше величины  $\lambda_{i+1}$ .

### 13.6. Формулировка обратной задачи

Обратные задачи для колеблющейся балки Эйлера–Бернулли, возможно, впервые изучались в работе Ниордсона (Niordson) [250] (1967). Его не интересовало восстановление единственной балки по достаточно-мному количеству данных в смысле, описанном ниже. Его интересовало построение такой балки в классе с  $n$  произвольными параметрами, которая имеет  $n$  конкретных собственных значений, являющихся возмущениями собственных значений однородной консольной балки.

Исследование обратной задачи для колеблющейся балки Эйлера–Бернулли началось с работы Барсилона. Он осознал, что существует три вопроса, на которые необходимо ответить. Во-первых, какие спектральные (и другие) данные требуются для нахождения свойств (площади поперечного сечения  $A(x)$  и второго момента сечения  $I(x)$ ) балки? В работах [15] (1974b) и [16] (1974c) он показывает, что требуется три спектра, отвечающих трем различным краевым условиям. Во-вторых, каковы необходимые и достаточные условия на данные, которые гарантируют, что свойства балки будут реалистичными, т. е.  $A(x) > 0, I(x) > 0$ ? Барсилон боролся с этим вопросом в работе [21] (1982), однако он не был полностью решен вплоть до работы Глэдвелла [110] (1986d). В-третьих, как восстановить балку? Барсилон ответил на этот вопрос в работе [18] (1976) в случае, когда спектры являлись малыми возмущениями однородной балки, однако, по сути, метод восстановления был неизвестен вплоть до работы МакЛафлин (McLaughlin) [227] (1984b).

В качестве следствия рассуждений, описанных в параграфе 13.5, мы можем утверждать, что существует только двухпараметрическое семейство балок, которые обладают тремя заданными спектрами  $\{\lambda_i, \mu_i, \sigma_i\}_1^\infty$  (или  $\{\lambda_i, \mu_i, \nu_i\}_1^\infty$ , или  $\{\lambda_i, \nu_i, \sigma_i\}_1^\infty$ ). Конкретный элемент этого семейства можно найти согласно (13.5.1). Спектры  $\{\lambda_i, \mu_i, \sigma_i\}_1^\infty$  должны будут удовлетворять некоторым условиям, среди которых имеются асимптотические. Рассуждения из параграфа 13.5 показывают, что задание  $\{\lambda_i, \mu_i, \sigma_i\}_1^\infty$  и некоторых подходящих асимптотических условий эквивалентно заданию  $\{\lambda_i, u_i, \theta_i\}_1^\infty$  и некоторых других асимптотических усло-

вий. Мы можем обойти и обойдем асимптотические условия посредством метода, используемого на практике, предполагая, что только  $(\lambda_i, u_i, \theta_i)_1^n$  являются заданными, тогда как остальные выбираются так, чтобы

$$(\lambda_i, u_i, \theta_i)_{n+1}^\infty = (\lambda_i^o, u_i^o, \theta_i^o)_{n+1}^\infty, \quad (13.6.1)$$

где величины  $^o$  относятся к известной балке, которая, без ограничения общности, может считаться однородной.

В этом случае уравнение (13.5.12), например, может быть записано в виде:

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{\lambda_i - \lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{u_i^{o^2}}{\lambda_i^o - \lambda} + \sum_{i=1}^\infty \frac{u_i^{o^2}}{\lambda_i^o - \lambda} = 0. \quad (13.6.2)$$

Бесконечная сумма является динамической характеристикой концов равномерной балки и может быть представлена в замкнутой форме. В самом деле, Бишоп и Джонсон (1960) [34] показали, что если  $u_i^o = 1$ , то

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{u_i^{o^2}}{\lambda_i^o - \lambda} = \frac{\cos \phi \sinh \phi - \sin \phi \cosh \phi}{4\phi^3(\cos \phi \cosh \phi + 1)}, \quad \phi = \lambda^{\frac{1}{4}}.$$

Следовательно, утверждение о том, что (13.6.2) выполнено для  $\lambda = (\mu_i)_1^n$ , дает  $n$  линейных уравнений для  $(u_i^2)_1^n$ . Первое множество необходимых условий имеет следующий вид:

- 1)  $\mu_i \neq \lambda_j$ ,  $\mu_i \neq \lambda_j^o$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots$ . Это гарантирует, что матрица коэффициентов в уравнениях на  $(u_i^2)_1^n$  является невырожденной, и правые части корректно определены;
- 2) решение  $(u_i^2)_1^n$  должно быть положительным (см. упр. 13.6.1). Аналогично, если  $(\theta_i^2)_1^n$  определяются из уравнения (13.5.13) то нам необходимо:
- 3)  $\sigma_i \neq \lambda_j$ ,  $\sigma_i \neq \lambda_j^o$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots$
- 4) решение  $(\theta_i^2)_1^n$  должно быть положительным.

Если эти условия выполнены, т. е.  $(u_i, \theta_i)_1^n$  можно найти, то мы покажем, что положительность миноров  $P$  из теоремы 13.4.1, которая, как это было установлено, является необходимым условием, также является достаточным условием для построения единственной реальной балки.

Наши рассуждения показывают, что три подходящим образом выбранных спектра требуются для однозначного восстановления балки. Готтлиб (1987b) [140] проделал исчерпывающие исследования балок, имеющих один или два общих спектра и/или одинаковых с равномерной балкой, для различных комбинаций краевых условий. Его исследования подчеркивают необходимость трех (подходящим образом выбранных) спектров. См. также работу Готтлиба (1988) [142].

### Упражнения 13.6

1) Оставляя (13.6.2) в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2}{\lambda_i - \lambda} = 0,$$

покажите, что  $u_i^2 > 0$  если корни (13.6.2) чередуются с  $\lambda_i$ , т.е.  $\lambda_i < \mu_i < \lambda_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

### 13.7. Метод восстановления

Метод является, по существу, аналогичным методу из главы 11 для колеблющегося стержня и принадлежит МакЛафлин (McLaughlin), см. ее работы [223] (1976), [224] (1978), [225] (1981), [226] (1984a), [227] (1984b). Папаникалао и Кравваритис (Papancalaou, Kravvaritis) в работе [262] (1997) рассматривают частный случай,  $a(x)r(x) = 1$ ; в этом случае задача допускает эффективную редукцию к задаче второго порядка. См. также работу Глэдвелла (1991d) [119]. Мы будем использовать оператор преобразования, как это было описано в параграфе 11.3.

Предположим, что требуется построить консольную балку, т.е. функции  $r(x)$  и  $a(x)$  такие, что уравнение

$$(r(x)u''(x))'' = \lambda a(x)u(x) \quad (13.7.1)$$

при краевых условиях

$$u(0) = 0 = u'(0), \quad u''(1) = 0 = u'''(1) \quad (13.7.2)$$

обладает заданными собственными значениями  $(\lambda_i)_1^\infty$  и собственными функциями  $(\phi_i(x))_1^\infty$ , нормированными относительно функции  $a(x)$ ,

т. е. так, что

$$\int_0^1 a(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

который имеет заданные значения для  $(\phi_i(1), \phi_i'(1))_1^\infty$ .

Для начала сделаем замену независимой переменной, подобную той, которая использовалась в параграфе 13.5:

$$s = \int_x^1 \left( \frac{a(t)}{r(t)} \right)^{\frac{1}{4}} dt, \quad (13.7.3)$$

и запишем

$$b(s) = \left( \frac{a(x)}{r(x)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad c^2(s) = (r^3(x)a(x))^{\frac{1}{4}}, \quad (13.7.4)$$

$$p(s) = b(s)c(s), \quad (13.7.5)$$

тогда уравнение (13.7.1) принимает вид:

$$(b(c^2(bu')'))' - \lambda b^2 c^2 u = 0, \quad 0 \leq s \leq L, \quad (13.7.6)$$

где  $' \equiv d/ds$  и

$$L = \int_0^1 \left( \frac{a(t)}{r(t)} \right)^{\frac{1}{4}} dt, \quad (13.7.7)$$

тогда краевые условия принимают вид:

$$(bu')'(0) = 0 = (c^2(bu')'))'(0), \quad (13.7.8)$$

$$u(L) = 0 = u'(L). \quad (13.7.9)$$

Без ограничения общности мы предположим, что  $b(0) = 1 = c(0)$ .

Так же как и при процессе восстановления Штурма–Лиувилля, мы введем основную задачу

$$(b_0(c_0^2(b_0v')'))' - \lambda b_0^2 c_0^2 v = 0, \quad (13.7.10)$$

$$(b_0v')'(0) = 0 = (c_0^2(b_0v')'))'(0), \quad (13.7.11)$$

$$v(L) = 0 = v'(L), \quad (13.7.12)$$

где  $b_0(s), c_0(s)$  известны, (например,  $b_0(s) = 1 = c_0(s)$ )  $b_0(1) = 1 = c_0(0)$  и  $p_0(s) = b_0(s)c_0(s)$ . Эта основная задача обладает некоторым множеством собственных значений  $(\lambda_i^0)_1^\infty$ , и их собственные функции  $\phi_i^0(s)$ , ортонормированные так, что

$$\int_0^L p_0^2(s) \phi_i^0(s) \phi_j^0(s) ds = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (13.7.13)$$

будут иметь краевые значения  $(\phi_i^0(0), \phi_j^{0'}(0))_1^\infty$ .

Для заданных значений  $\lambda, \xi, \eta$  можно определить единственную функцию

$$v(s; \lambda, \xi, \eta) \equiv v(s), \quad (13.7.14)$$

которая является решением уравнения (13.7.10), удовлетворяющим

$$v(0) = \xi, \quad v'(0) = \eta, \quad (bv')'(0) = 0 = (c_0^2(bv')')'(0). \quad (13.7.15)$$

Очевидно, что

$$v(s; \lambda_i^0, \phi_i^0(0), \phi_i^{0'}(0)) = \phi_i^0(s). \quad (13.7.16)$$

Собственные функции  $\{\phi_i^0(s)\}_1^\infty$  ортогональны весовой функции  $p_0^2(s)$ , как показано в уравнении (13.7.13). Собственные функции  $\{\phi_i(s)\}_1^\infty$  для уравнений (13.7.6)–(13.7.9) должны быть ортогональны относительно функции  $p^2(s)$ , т. е.

$$\int_0^L p^2(s) \phi_i(s) \phi_j(s) ds = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (13.7.17)$$

Следовательно, повторяя (11.3.5), мы построим (13.7.6) таким образом, что решение (13.7.16) для уравнения (13.7.10) преобразуется в решение уравнения (13.7.6), удовлетворяющего

$$u(0) = \xi, \quad u'(0) = \eta, \quad (bu')'(0) = 0 = (c^2(bu')')'(0) \quad (13.7.18)$$

при помощи уравнения

$$p(s)u(s) = p_0(s)v(s) + \int_0^s K(s, t) p_0^2(t)v(t) dt. \quad (13.7.19)$$

Собственные функции уравнений (13.7.6)–(13.7.9) имеют вид

$$\phi_i(s) = u(s; \lambda, \phi_i(s)|_{s=0}, \phi_i'(s)|_{s=0}),$$

и мы заметим, что:

$$\phi_i(s)|_{s=0} = \phi_i(x)|_{x=1}, \quad \left. \frac{d\phi_i(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \left. \frac{d\phi_i(x)}{dx} \right|_{x=1}.$$

Если собственные значения  $\lambda_i$  и краевые значения  $\phi_i(0)$ ,  $\phi_i'(0)$  (с переменными  $s$ ) выбраны так, что

$$\lambda_i = \lambda_i^0, \quad \phi_i(0) = \phi_i^0(0), \quad \phi_i'(0) = \phi_i^{0'}(0), \quad i = n+1, \dots,$$

тогда система  $\{\phi_i(s)\}_1^\infty$  будет образовывать полное ортогональное множество с весом  $p^2(s)$  тогда и только тогда, когда  $K(x, s)$  удовлетворяет аналогу уравнения (11.5.20), т. е.

$$K(r, s) + \int_0^r p_0^2(t) K(r, t) F(t, s) dt + p_0(r) F(r, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq r, \quad (13.7.20)$$

где

$$F(r, s) = \sum_{i=1}^n \{v_i(r)v_i(s) - v_i^0(r)v_i^0(s)\} \quad (13.7.21)$$

и

$$v_i(s) = v(s; \lambda_i, \phi_i(0), \phi_i'(0)), \\ v_i^0(s) = v(s, \lambda_i^0, \phi_i^0(0), \phi_i^{0'}(0)) \equiv \phi_i^0(s).$$

Заметим, что

$$u(s; 0, 1, 0) = 1, \quad v(s; 0, 1, 0) = 1,$$

значит, уравнение (13.7.19) дает

$$p(s) = p_0(s) + \int_0^s K(s, t) p_0^2(t) dt. \quad (13.7.22)$$

С другой стороны, если

$$q(s) = \int_0^s \frac{dt}{b(t)}, \quad q_0(s) = \int_0^s \frac{dt}{b_0(t)}, \quad (13.7.23)$$



то

$$u(s; 0, 0, 1) = q(s), \quad v(s; 0, 0, 1) = q_0(s),$$

значит,

$$p(s)q(s) = p_0(s)q_0(s) + \int_0^s K(s, t)p_0^2(t)q_0(t)dt. \quad (13.7.24)$$

Следовательно, процедура восстановления выглядит следующим образом:

- решить уравнение (13.7.20) для  $K(s, t)$
- найти  $p(s), q(s)$  из уравнений (13.7.22), (13.7.24)
- найти  $b(s), c(s)$  из уравнений (13.7.4), (13.7.5)
- найти  $x, a(x), r(x)$  из уравнений (13.7.3), (13.7.4).

Для обоснования этого метода нам необходимо проверить, что когда  $p(s), q(s)$  задаются формулами (13.7.22), (13.7.24), тогда

- 1)  $p(s), q(s)$  являются корректно определенными и положительными и  $q(s)$  является возрастающей функцией.
- 2)  $u(s)$  удовлетворяет краевым условиям при  $s = 0$ .
- 3)  $u(s)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (13.7.6).
- 4)  $u_i(s)$  удовлетворяет краевым условиям при  $s = L$ .

Мы будем рассматривать эти пункты в порядке 2, 3, 4, 1.

Уравнение (13.7.22) дает  $p(0) = p_0(0) = 1$ , тогда как уравнение (13.7.19) дает  $p(0)u(0) = u(0) = p_0(0)v(0) = v(0) = \xi$ . Дифференцируя уравнение (13.7.22), получим

$$p'(0) = p_0'(0) + K(0, 0),$$

тогда как дифференцируя уравнение (13.7.19), мы получим

$$p'(0)u(0) + p(0)u'(0) = p_0'(0)v(0) + p_0(0)v'(0) + K(0, 0)p_0^2(0)v(0),$$

что дает:

$$u'(0) = v'(0) = \eta.$$

Продолжая это дифференцирование, мы можем установить 2) и 3).

Как в параграфе 11.5, решение уравнения (13.7.20) имеет вид:

$$K(r, s) = \sum_{i=1}^n \{F_i(r)v_i(s) - G_i(r)v_i^0(s)\}, \quad (13.7.25)$$

где  $F_i(r), G_i(r)$  удовлетворяют

$$p_0(r)v_i(r) + F_i(r) + \sum_{i=1}^n \{b_{ij}F_j(r) - c_{ij}G_j(r)\} = 0, \quad (13.7.26)$$

$$p_0(r)v_i^0(r) + G_i(r) + \sum_{i=1}^n \{c_{ji}F_j(r) - d_{ij}G_j(r)\} = 0, \quad (13.7.27)$$

где

$$b_{ij}(r) = \int_0^r p_0^2(t)v_i(t)v_j(t)dt, \quad c_{ij}(r) = \int_0^r p_0^2(t)v_i(t)v_j^0(t)dt$$

$$d_{ij}(r) = \int_0^r p_0^2(t)v_i^0(t)v_j^0(t)dt.$$

При рассмотрении пункта 4) нам потребуется обсудить два случая,  $i \leq n$  и  $i > n$ . В первом случае мы заметим, что, подставляя (13.7.25) в (13.7.19) и используя (13.7.27), мы получаем

$$p(s)u_i(s) = -F_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.7.28)$$

Однако уравнение (13.7.27) при  $r = L$  и условиях ортогональности  $d_{ij}(L) = \delta_{ij}$  ( $v_i^0(t)$  являются ортонормированными собственными функциями для основной задачи) дает

$$\sum_{i=1}^n c_{ji}(L)F_j(L) = 0, \quad (13.7.29)$$

так как  $v_i^0(L) = 0$ . Следовательно, если  $\mathbf{C} = (c_{ij}(L))$  является невырожденной и  $p(L) \neq 0$ , то

$$F_j(L) = 0 = u_j(L).$$

Дифференцируя (13.7.27), мы получим при тех же самых условиях следующие равенства:

$$F'_j(L) = 0 = u'_j(L), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Мы вернемся к условию  $p(L) \neq 0$  позднее.

Если  $i > n$ , тогда  $v_i(L) = v_i^0(L) = \phi_i^0(L) = 0$ , поэтому из уравнения (13.7.19) следует:

$$p(L)u_i(L) = \int_0^L K(L, t)p_0^2(t)v_i^0(t)dt,$$

тогда, подставляя  $K(L, t)$  из уравнения (13.7.25), получим

$$p(L)u_i(L) = \sum_{j=1}^n \{F_j(L) \int_0^L p_0^2(t)v_j(t)v_i^0(t)dt - G_j(L) \int_0^L p_0^2(t)v_j^0(t)v_i^0(t)dt\}.$$

Однако, так как  $i > n$ ,  $v_i^0(t)$  являются ортогональными ко всем  $\{v_j^0(t)\}_1^n$ . Значит снова, если  $F_j(L) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ , и  $p(L) \neq 0$ , то  $u_i(L) = 0$ . Справедливость  $u_i^0(L) = 0$  можно проверить аналогичным образом (упр. 13.7.3).

Теперь обсудим пункт 1). Первый шаг состоит в определении  $F_i(s), G_i(s)$  из уравнений (13.7.26), (13.7.27). Рассуждения, использованные в параграфе 11.5, показывают, что матрица коэффициентов в этих уравнениях является невырожденной, исключая ситуацию, когда  $r = L$ . Следовательно, остается только случай  $r = L$ . Тогда матрица коэффициентов из уравнений (13.7.26), (13.7.27) принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{B}, & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

значит,  $\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{C})^2$ . Следовательно,  $\det \mathbf{C} \neq 0$  является необходимым и достаточным условием для  $F_i(r), G_i(r)$ , а значит,  $p(s)$  корректно определено. Теперь нас интересует, когда  $p(s) > 0$ . Пусть  $p(s) = 0$  для  $s \in [0, L]$ , то (13.7.28) и подобное уравнение

$$p(s)u_i^0(s) = p(s)u(s; \lambda_i^0, \phi_i^0(0), \phi_i^{0'}(0)) = -G_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

показывает, что  $F_i(s) = 0 = G_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n$ , и, следовательно, имея в виду (13.7.26), (13.7.27),  $p_0(s)v_i(s) = 0 = p_0(s)v_i^0(s), \quad i = 1, 2, \dots, n$ . Однако  $p_0(s)$ , отвечающее реальной балке, всегда является

положительным, и единственным общим нулем  $v_i^0(s)$  является  $s = L$ . Следовательно, единственным возможным нулем  $p(s)$  является  $s = L$ . При  $s = L$  уравнение (13.6.27) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n c_{ji}(L)F_j(L) = 0,$$

а значит, если  $\det \mathbf{C}(L) \neq 0$  то,  $F_j(L) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда (13.6.26) принимает вид:

$$p_0(L)v_i(L) - \sum_{i=1}^n c_{ij}(L)G_j(L) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.7.30)$$

Уравнения (13.7.22), (13.7.25) дают

$$p(L) = p_0(L) - \sum_{i=1}^n G_j(L) \int_0^L p_0^2(t)v_j^0(t)dt. \quad (13.7.31)$$

Возьмем

$$\mathbf{C} = (c_{ij}(L)), \quad \mathbf{g} = [G_1(L), \dots, G_n(L)], \quad \mathbf{v} = [v_1(L), \dots, v_n(L)],$$

тогда (13.7.30) принимает вид

$$p_0(L)\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{g},$$

откуда, домножая (13.7.31) на  $\mathbf{v}$ , получим

$$p(L)\mathbf{v} = p_0(L)\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{g} = p_0(L)(\mathbf{C} - \mathbf{H})\mathbf{g},$$

где

$$c_{ij} - h_{ij} = \int_0^L p_0^2(t)(v_i(t) - v_i(L))v_j^0(t)dt = e_{ij}.$$

Следовательно,

$$p(L)\mathbf{v} = p_0(L)\mathbf{E}\mathbf{g}.$$

Это означает, что если  $\mathbf{E}$  является невырожденной, то  $p(L) \neq 0$ . Если  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{E}$  являются невырожденными, то все указанные операции для получения  $p(s)$ ,  $q(s)$  можно произвести, а значит, и получить  $b(s)$ ,  $c(s)$ . Так

как  $b(s), c(s)$  не обращается в ноль и  $b(0)c(0) = p(0) = 1$ , то  $b(s), c(s)$  всегда являются положительными, тогда  $a(x), r(x) > 0$ .

Лоуе (Lowe) [217] (1993) рассматривает частный случай уравнения (13.7.1), в этом случае  $r(x) = [a(x)]^2$ , и использует конструкцию, основанную на рядах Фурье для  $a(x)$ .

### Упражнения 13.7

- 1) Проведите преобразование уравнений (13.7.1), (13.7.2) к (13.7.6)–(13.7.9). Покажите, что условия (13.7.8) являются эквивалентными равенству

$$q'(0)u''(0) - q''(0)u'(0) = 0 = q'(0)u'''(0) - q'''(0)u'(0).$$

- 2) Покажите, что если  $v(s)$  удовлетворяет

$$q'_0(0)v''(0) - q''_0(0)v'(0) = 0 = q'_0(0)v'''(0) - q'''_0(0)v'(0),$$

тогда  $u$  удовлетворяет условиям из упр. 13.7.1.

- 3) Мы доказали, что  $u_i(L) = 0 = u'_i(L)$  для  $i \leq n$ ; докажите это для  $i > n$ .

### 13.8. Достаточность вполне положительности матрицы $\mathbf{P}$

В параграфе 13.4 мы показали, что собственные значения  $(\lambda_i)_1^\infty$  и краевые значения  $u_i, \theta_i$  консольной балки делают бесконечную матрицу  $\mathbf{P}$  из теоремы 13.4.1 вполне положительной. В параграфе 13.7 мы нашли некоторые достаточные условия для восстановления реальной балки по этим данным. Мы теперь покажем, что вполне положительность матрицы  $\mathbf{P}$  является не только необходимым, но и достаточным условием.

Как было показано в параграфе 13.7, восстановление будет возможно совершить, если матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{E}$  являются невырожденными. Здесь

$$c_{ij} = \int_0^L p_0^2(s) v_i(s) v_j^0(s) ds, \quad e_{ij} = \int_0^L p_0^2(s) v_i^0(s) [v_j(s) - v_j(L)] ds$$

и  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Предположим, если это возможно, что  $\mathbf{C}$  является вырожденной. Ее строки будут линейно зависимыми, т. е. существуют множители  $(\alpha_i)_1^n$ , не все равные нулю, для которых

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i c_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\int_0^L p_0^2(s) \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(s) \right\} v_j^0(s) ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13.8.1)$$

Однако, так как  $\{v_j^0(s)\}_1^\infty$ , являясь собственной функцией для основной задачи, образует полное ортогональное множество весовых функций  $p_0^2(s)$ , уравнение (13.8.1) означает, что сумма подынтегральных выражений является линейной комбинацией оставшихся  $\{v_j^0(s)\}_{n+1}^\infty$ . Следовательно,

$$f(s) := \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(s) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i v_i^0(s) = 0.$$

В частности,  $f(s)$  и все ее производные должны быть нулевыми при  $s=0$ , случай свободного конца. Рассмотрим случай  $b_0(s) \equiv 1 \equiv c_0(s)$ . Теперь

$$\begin{aligned} v_i(s)|_{s=0} &= \phi_i(x)|_{x=1} = u_i, \\ b(s)v_i'(s)|_{s=0} &= v_i'(s)|_{s=0} = -\frac{d\phi_i(x)}{dx}|_{x=1} = -\theta_i, \end{aligned}$$

тогда как уравнение (13.7.10) дает

$$v_i^{iv}(0) = \lambda_i v_i(0) = \lambda_i u_i, \quad v_i^v(0) = -\lambda_i \theta_i.$$

Следовательно,

$$v_i^{(m)}(0) = 0 = v_i^{0(m)}(0) \text{ для } m = 2, 3; 6, 7; \dots,$$

значит,  $f^{(m)}(0)$  является тождественно нулевой при этих значениях  $m$ . Уравнения, полученные, если положить  $f^{(m)}(0)$  нулем, для оставшихся значений  $0, 1; 4, 5; \dots$ , имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^j u_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^j \theta_i \alpha_i = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (13.8.2)$$

Здесь нами использован тот факт, что  $u_i^0 = u_i$ ,  $\theta_i^0 = \theta_i$  для  $i = n + 1, \dots$ . Однако, матрица коэффициентов для уравнений (13.8.2) является матрицей  $\mathbf{P}$  из теоремы 13.4.1, и каждый минор матрицы  $\mathbf{P}$  является положительным, а значит, матрица  $\mathbf{P}$  имеет бесконечный ранг. Следовательно, все  $\alpha_i$  являются нулевыми, что противоречит предположению о вырожденности матрицы  $\mathbf{C}$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{C}$  является невырожденной. Если  $b_0(s)$ ,  $c_0(s)$  не равны тождественно единице, то строки матрицы являются линейными комбинациями строк  $\mathbf{P}$ , а значит, вывод остается справедливым.

Аналогичные рассуждения показывают, что если  $\mathbf{E}$  является вырожденной матрицей, то существуют множители  $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$ , не все равные нулю, такие, что

$$g(s) := \sum_{i=1}^n \beta_i \{v_i(s) - v_i(0)\} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i v_i^0(s) = 0,$$

т. е.

$$g'(s) = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i'(s) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_i v_i^0'(s) = 0.$$

Если  $b_0(s) = 1 = c_0(s)$ , то матрица коэффициентов для уравнений, которые получаются, если положить  $g^{(m)}(0)$  равным нулю для  $m = 1; 4, 5; 8, 9; \dots$ , является матрицей, образованной строками 2, 3, ... матрицы  $\mathbf{P}$ . Мы получаем, что  $\beta_i$  являются тождественно нулевыми и что  $\mathbf{E}$  является невырожденной. Откуда полная положительность матрицы  $\mathbf{P}$  является необходимым и достаточным условием для восстановления реальной балки.

Заметим, что этот вывод справедлив при условии (13.6.1) и что полная положительность матрицы  $\mathbf{P}$  гарантирует только, что  $a(x)$ ,  $r(x)$  будут *положительными*; они все еще могут сильно меняться вдоль балки, и в этом случае колебание балки описывается уравнением Эйлера–Бернулли, которое применимо только к утонченным балкам, т. е. к таким балкам, для которых значения  $a(x)$ ,  $r(x)$  не отличаются сильно от соответствующих значений для однородной балки. Если балка не является однородно тонкой, т. е. если

$$a^* = \frac{\max a(x)}{\min(a(x))}, \quad r^* = \frac{\max r(x)}{\min(r(x))}, \quad x \in [0, 1]$$

не близки к единице, то колебание балки подвержено влиянию эффектов утолщения и простая модель Эйлера–Бернулли не является адекватной.

См. работу Глэдвелла, Ингланда (England) и Уонга (Wang) [112] (1987). Заметим также, что экспериментальное изучение собственных частот даже для утонченной однородной балки показывает, что собственные частоты начинают отличаться от классических значений Эйлера–Бернулли где-то после четвертой или пятой частоты. Это означает, что, хотя изучение обратной задачи дает значимые вклады в поведение балки Эйлера–Бернулли, оно со многих точек зрения должно рассматриваться как академическое упражнение и должно использоваться только для нахождения балки, которая близка к однородной, и только очень немногие частоты могут быть изменены, причем только на малые величины. Для таких задач методы возмущения, примененные совместно с методами наименьших квадратов, дают альтернативный подход к проблеме. Однако эти численные методы находятся за пределами нашей цели в этой книге.



---

---

## ГЛАВА 14

# Непрерывные спектры колебаний и узлы

Если бы человека не окружала такая тьма, он не чувствовал бы всей своей порочности, если бы в этой тьме совсем не было света, он не надеялся бы на очищение.

Блез Паскаль *Мысли*, 585

### 14.1. Введение

На протяжении большинства предшествующих глав предпочтение отдавалось собственным значениям; в этой главе наше внимание сосредоточено на собственных формах колебаний, в частности, на узлах собственных форм. Мы получим, что в противоположность обратной задаче *собственных значений* не существует легко поставленных обратных *узловых* задач. Имеются некоторые результаты о единственности, относящиеся к узлам, большинство этих результатов принадлежит МакЛафлин и Хольду (Hald); существуют также некоторые аппроксимационные решения для обратных узловых задач, снова по большей части принадлежащие МакЛафлин и Хольду; оба эти направления изучаются в параграфе 14.4. Однако, как мы должны заметить с самого начала, невозможно рассмотреть все эти результаты о единственности или аппроксимационные методы решения в объеме этой главы; все, что мы можем сделать, — это привести введение в опубликованные работы, обсудить используемые методы и некоторые полученные результаты.

Пользуясь случаем, мы подчеркиваем фундаментальное отличие между собственными значениями и узлами непрерывной системы и соответственно между обратной задачей собственных значений и обратной узловой задачей. Собственные значения являются *глобальными* величинами; они являются свойствами системы в целом, в то время как узел, в частности положение узла, связано со свойствами системы около узла; т. е. это *локальное* свойство.

Мы начнем наше обсуждение форм колебаний и узлов со ссылки на теорему Штурма об узлах уравнения второго порядка. Эти теоремы имеют широкое применение, легко доказываются и дают значимый вклад в изучение свойств решений систем Штурма–Лиувилля. Сами результаты Штурма появились в 1836 году. Наиболее полный перечень приводится в работе Бохера (Bôcher) [37] (1917). Детальный обзор также дается в главе X работы Инка (Ince) [185] (1927).

## 14.2. Теоремы Штурма

В параграфе 10.1 мы ввели три уравнения, (10.1.1), (10.1.3) и (10.1.11), которые возникают в теории колебаний. Все эти уравнения содержат частотный параметр  $\lambda$ , и все они должны быть дополнены краевыми условиями для того, чтобы получить корректно поставленные задачи о собственных значениях. Теоремы Штурма могут быть сформулированы для более широкого класса уравнений, который включает (10.1.1), (10.1.3) и (10.1.11) и применяется к уравнениям вне зависимости от краевых условий.

Рассмотрим уравнение

$$(Ay')' + By = 0 \quad (14.2.1)$$

и предположим, что  $A(x), A'(x)$  и  $B(x)$  являются непрерывными и  $A(x) > 0$  на промежутке  $[a, b]$ . Эти условия не обязательно носят ограничительный характер; мы можем предположить, что они являются кусочно-непрерывными с конечным множеством точек разрыва или даже принадлежат более широкому классу. Мы оставляем эти вопросы для изучения заинтересованному читателю.

Для начала наших обсуждений заметим, что если  $y(x)$  является непрерывным решением (14.2.1) и  $y(c) = 0 = y'(c)$ , для некоторого  $c \in [a, b]$ , то  $y$  является тождественно нулевым. Если  $A, B$  обладает производными всех порядков, то  $y(c) = 0 = y'(c)$  дает  $y''(c) = 0 = y'''(c) \dots$ , значит, тейлоровское разложение  $y(x)$  является тождественно нулевым. Только в случае, когда  $A, A', B$  являются непрерывными, мы можем получить это же утверждение, переводя (14.2.1) в интегральное уравнение. Иначе, мы можем аппроксимировать  $A, B$  с любой заданной точностью посредством  $\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)$ , которые обладают производными всех порядков, и получить тот же результат.

Из этого результата мы можем получить, что *каждый нуль (узел) решения (14.2.1) является простым*: если  $y(c) = 0$ , то  $y'(c) \neq 0$  и  $y$  пересекает ось в точке  $x = c$ .

Мы также можем получить, что *нет непрерывных решений* (14.2.1), *которые могут иметь бесконечное число узлов на  $[a, b]$* . Иначе, если существует бесконечное число нулей, то, по теореме Больцано–Вейерштрасса, они будут иметь по крайней мере одну предельную точку  $c \in [a, b]$  и мы можем показать (упр. 14.2.1), что в точке  $c$  не только  $y(c) = 0$ , но и  $y'(c) = 0$ , т. е.  $y \equiv 0$ .

Теперь предположим, что  $u, v$  являются двумя решениями уравнения (14.2.1), для которых справедливо

$$(Au)' + Bu = 0 = (Av)' + Bv.$$

Домножая первое из них на  $v$ , второе на  $u$ , вычитая и переупорядочивая, получим

$$(A(vu' - uv'))' = 0,$$

откуда

$$A(vu' - uv') = \text{constant} = C. \quad (14.2.2)$$

Так как, по предположению  $A(x) > 0$ , константа является нулевой тогда и только тогда, когда вронскиан,  $vu' - uv'$ , является нулевым, т. е. тогда и только тогда, когда решения являются пропорциональными,  $u = kv$ . Следовательно, мы будем говорить, что два решения  $u, v$  являются *одинаковыми*, если  $u = kv$ , *различными*, если не существует такого  $k$ , что  $u = kv$ . Отсюда мы сразу можем получить:

**Теорема 14.2.1.** *Два различных решения (14.2.1) не могут иметь общей ноль.*

**Доказательство.**  $u(c) = 0 = v(c)$  дает  $C = 0$  в (14.2.2). ■

**Теорема 14.2.2.** *Узлы двух вещественных различных решений (14.2.1) отделяют друг друга.*

**Доказательство.** Для начала отметим, что необходимо включить слово «вещественный» в формулировку, так как

$$y(x) = \cos x + i \sin x$$

является решением уравнения  $y'' + y = 0$  и не обладает нулями на вещественной оси.

Теперь предположим, что одно решение (14.2.1),  $u$ , обладает двумя узлами,  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , а  $v$  является вторым, отличным, решением. По теореме 14.2.1,  $v(x_1), v(x_2) \neq 0$ . Пусть функция  $v(x)$  не имеет узлов

на  $(x_1, x_2)$ , значит, она должна иметь постоянный знак на  $[x_1, x_2]$ , например, положительный знак. Это означает, что  $z = u(x)/v(x)$  является непрерывной, имеет непрерывную производную на  $[x_1, x_2]$  и обращается в ноль на концах  $x_1$  и  $x_2$ . Следовательно, по теореме Ролля  $z'(\xi) = 0$ , для некоторого  $\xi \in (x_1, x_2)$ . Однако

$$z' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Числителем в этом выражении является вронскианиан, который не является нулевым, так как  $u, v$  являются различными, а знаменатель равен  $v^2$  — положителен по предположению. Следовательно,  $z' \neq 0$  на  $(x_1, x_2)$ . Это противоречие позволяет заключить, что  $v$  обладает узлом на  $(x_1, x_2)$ . ■

**Следствие 14.2.1.** Если  $u, v$  являются различными решениями (14.2.1), то число узлов функций  $u, v$  на промежутке  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  не может отличаться более чем на 1.

Теоремы 14.2.1, 14.2.2 относятся к двум различным решениям, одного и того же уравнения (14.2.1); следующие результаты относятся к решениям двух различных уравнений.

**Теорема 14.2.3.** Пусть  $u(x)$  является решением для

$$(Ay')' + B_1y = 0,$$

и  $v(x)$  является решением для

$$(Ay')' + B_2y = 0,$$

где  $B_1 \leq B_2$  на  $[a, b]$  и  $B_1(x) < B_2(x)$  для некоторого  $x \in [a, b]$ , тогда  $v(x)$  обладает узлом между любыми двумя узлами  $u(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2$  являются последовательными нулями  $u$ , и предположим, если это возможно, что  $v$  не имеет узла на  $(x_1, x_2)$ . Без ограничения общности мы можем предположить, что  $u(x), v(x) > 0$  на  $(x_1, x_2)$ . Уравнения  $(Au')' + B_1u = 0$ ,  $(Av')' + B_2v = 0$  дают, как и ранее:

$$-u(Av')' + v(Au')' = (B_2 - B_1)uv,$$

значит:

$$-(A(uv' - vu'))' = (B_2 - B_1)uv,$$

откуда при интегрировании получаем

$$-[A(uv' - vu')]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (B_2 - B_1)uwdx. \quad (14.2.3)$$

Так как  $u(x_1) = 0 = u(x_2)$ , левая часть имеет вид

$$P \equiv -A(x_1)v(x_1)u'(x_1) + A(x_2)v(x_2)u'(x_2).$$

Так как  $u(x) > 0$  на  $(x_1, x_2)$ , мы получим  $u'(x_1) > 0$ ,  $u'(x_2) < 0$ , значит,  $P \leq 0$ .

$P$  может быть нулевым, только если  $v(x_1) = 0 = v(x_2)$ , в этом случае вронскиан  $u$  и  $v$  является нулевым,  $u$  и  $v$  являются совпадающими решениями на  $[x_1, x_2]$  и

$$\int_{x_1}^{x_2} (B_2 - B_1)uwdx = 0.$$

Так как  $uv > 0$  на  $(x_1, x_2)$  и  $B_1, B_2$  являются непрерывными, это дает равенство  $B_1 = B_2$  на  $(x_1, x_2)$ . Иначе,  $P < 0$  и  $B_1 \leq B_2$  позволяет заключить, что правая часть (14.2.3) является неотрицательной ( $\geq 0$ ). Это противоречие показывает, что  $v(x)$  имеет узел между  $x_1$  и  $x_2$ . ■

Пиконе (Picone) обобщил теорему Штурма (теорему 14.2.3), чтобы получить

**Теорема 14.2.4.** Пусть  $u(x)$  является решением уравнения

$$(A_1y')' + B_1y = 0,$$

и  $v(x)$  является решением уравнения

$$(A_2y')' + B_2y = 0,$$

где  $A_1 \geq A_2 > 0$ ,  $B_1 \leq B_2$  на  $[a, b]$  и  $A_1(\xi) > A_2(\xi)$ ,  $B_1(\eta) < B_2(\eta)$  для некоторых  $\xi, \eta \in [a, b]$ . Тогда  $v(x)$  имеет узел между любыми двумя узлами  $u(x)$ .

**Доказательство.** Пиконе заметил, что

$$\left(\frac{u}{v}(A_1u'v - A_2uv')\right)' = (B_2 - B_1)u^2 + (A_1 - A_2)u'^2 + A_2\left(u' - \frac{uv'}{v}\right)^2. \quad (14.2.4)$$

Предположим, что как и ранее  $x_1, x_2$  являются последовательными узлами  $u$ ,  $u(x) > 0$  на  $(x_1, x_2)$ , т. е.  $u'(x_1) > 0, u'(x_2) < 0$ . Пусть  $v$  не обладает узлом на  $(x_1, x_2)$  и  $v(x_1), v(x_2) > 0$ . Интегрируя (14.2.4) по  $(x_1, x_2)$ , получим:

$$\left[ \frac{u}{v} (A_1 u' v - A_2 u v') \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (B_2 - B_1) u^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} (A_1 - A_2) u'^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2 \left( u' - \frac{u v'}{v} \right)^2 dx. \quad (14.2.5)$$

Левая часть является нулевой, так как  $u(x_1) = 0 = u(x_2)$ , в то время как правая часть является положительной. Это противоречие позволяет заключить, что  $v$  обладает узлом на  $(x_1, x_2)$ . Левая часть остается нулевой, если даже  $v(x)$  обращается в ноль в одной или обеих точках  $x_1, x_2$ . Иначе, если  $v(x)$  обращается в ноль, скажем в  $x_1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{u}{v} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)},$$

значит,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \left[ \frac{u}{v} (A_1 u' v - A_2 u v') \right]_x = (A_1 - A_2) u u' |_{x_1} = 0.$$

Заметим, что в исключительных случаях, обсужденных в упр. 14.2.2, правая часть может обнулиться, в этих случаях нам потребуется немного изменить наши рассуждения. ■

Мы будем использовать формулу (14.2.4), полученную Пиконе, для доказательства двух теорем отделимости. Первая имеет вид:

**Теорема 14.2.5.** Пусть  $u(x)$  является решением уравнения

$$(A_1 u')' + B_1 u = 0 \quad (14.2.6)$$

при

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \alpha', \quad (14.2.7)$$

и  $v(x)$  является решением для

$$(A_2 v')' + B_2 v = 0$$

при

$$v(a) = \beta, \quad v'(a) = \beta'.$$

Сделаем следующие допущения:

- 1)  $A_1 \geq A_2 > 0$ ,  $B_1 \leq B_2$  на  $[a, b]$ .
- 2)  $\alpha, \alpha'$  оба не являются нулевыми, также и  $\beta, \beta'$ .
- 3) Если  $\alpha \neq 0$ , то

$$\frac{A_1(a)\alpha'}{\alpha} \geq \frac{A_2(a)\beta'}{\beta},$$

что дает  $\beta \neq 0$ .

- 4) Тождество  $A_1 \equiv 0 = A_2$  не является справедливым на любой конечной части  $[a, b]$ .

Если  $u(x)$  имеет  $n$  узлов на  $(a, b]$ , то  $v(x)$  имеет по крайней мере  $n$  узлов на  $(a, b]$ , и  $i$ -тый узел  $v(x)$  меньше  $i$ -того узла  $u(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются узлами для  $u(x)$  на  $(a, b]$ , тогда

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

По теореме Штурма (теорема 14.2.4) получаем, что  $v(x)$  имеет узел между любыми двумя последовательными узлами  $x_i, x_{i+1}$ . Следовательно, теорема справедлива, если мы можем показать, что  $v(x)$  имеет узел между  $a$  и  $x_1$ .

Если  $u(x)$  является нулевой в левой конечной точке, то по теореме 14.2.4  $v(x)$  имеет узел между  $a$  и  $x_1$ . Следовательно, мы будем предполагать, что  $\alpha \neq 0$ , условие 3) дает  $\beta \neq 0$ . Проинтегрировав формулу Пиконе (14.2.4) от  $a$  до  $x_1$  и предполагая, что  $v(x)$  не имеет узлов на  $(a, x_1)$ , получим

$$\left[ \frac{u}{v} (A_1 u' v - A_2 u v') \right]_a^{x_1} = -u^2(a) \left( \frac{A_1(a)\alpha'}{\alpha} - \frac{A_2(a)\beta'}{\beta} \right),$$

эта величина, в силу условия 3), является отрицательной. Интеграл в правой части (14.2.4) является положительным. Это противоречие позволяет заключить, что  $v(x)$  имеет узел между  $a$  и  $x_1$ . ■

Последняя теорема позволяет нам понять, что происходит с узлами  $u(x)$ , которая является решением уравнений (14.2.6), (14.2.7), при непрерывно убывающем  $A(x)$  и непрерывно возрастающем  $B(x)$ , тогда как  $\alpha$  и  $\alpha'$  остаются инвариантными: каждый новый узел возникает при  $x = b$  и движется в направлении  $x = a$ .

### Упражнения 14.2

- 1) Пусть  $y(x)$  обладает бесконечным количеством узлов на  $[a, b]$  с предельной точкой  $c$ . Используйте теорему о среднем значении, чтобы показать, что  $y'(c) = 0$ .
- 2) Разберитесь, как правая часть (14.2.5) может в действительности обнулиться. Покажите, что она не обращается в ноль при дополнительном условии о том, что  $B_1$  и  $B_2$  не являются тождественно нулевыми на любой конечной части  $(a, b)$ .
- 3) Рассмотрите, как узлы  $y'' + \omega^2 y = 0$ ,  $y(0) = \alpha$ ,  $y'(0) = \alpha'$  на  $[0, 1]$  перемещаются от 1 к 0 при возрастании  $\omega$ .

## 14.3. Приложения теорем Штурма

Теоремы Штурма описывают, что происходит с узлом решения уравнения (14.2.1), когда  $A(x)$  или  $B(x)$  меняются. В этом параграфе мы рассматриваем обратный вопрос: что мы можем утверждать об изменениях  $A(x)$ ,  $B(x)$ , зная изменения положения узлов?

Для начала рассмотрим натянутую струну, описываемую уравнением (10.1.1), а именно

$$u'' + \lambda \rho^2 u = 0. \quad (14.3.1)$$

Напомним, что  $\lambda = \omega^2$ ,  $\rho^2(x)$  является массой на единицу длин и краевые условия имеют вид

$$u'(0) - hu(0) = 0 = u'(1) + Hu(1).$$

Уравнение (14.3.1) имеет вид (14.2.1) при

$$A(x) = 1, B(x) = \lambda \rho^2(x).$$

Разберемся, что получится, если некоторую малую массу удалить из струны в некоторой внутренней точке  $c$ . Мы можем себе представлять,



что масса удаляется непрерывно на малом интервале  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Удаление массы увеличивает (или, по крайней мере, не уменьшает) собственную частоту. Обозначим новую собственную частоту через  $\omega^*$ ,  $\lambda^* = \omega^{*2}$ , новое распределение массы — через  $\rho^{*2}(x)$ , и пусть  $v$  — решение следующего уравнения:

$$v'' + \lambda^* \rho^{*2} v = 0$$

при условиях

$$v'(0) - hv(0) = 0 = v'(1) + Hv(1).$$

Пусть  $u$  имеет узел  $\xi \in (0, c - \varepsilon]$ , применим теорему 14.2.5 к  $[0, c - \varepsilon]$ . На этом промежутке  $A_1 = A_2$ ,  $\rho^* = \rho$  и  $B_1 = \lambda \rho^2 \leq \lambda^* \rho^2 = B_2$ . Следовательно,  $v$  имеет узел  $\eta \in (0, c - \varepsilon]$  и  $\eta \leq \xi$ . Если  $u$  обладает  $n$  узлами  $(\xi_i)_1^n \in (0, c - \varepsilon]$ , то  $v$  имеет по меньшей мере  $n$  узлов  $(\eta_i)_1^n \in (0, c - \varepsilon]$ , и  $\eta_i \leq \xi_i$ . Следовательно, узлы, лежащие влево от  $c - \varepsilon$ , двигаются влево. Посредством физического поворота струны вокруг себя, мы видим, что узлы, находящиеся вправо от  $c + \varepsilon$ , будут двигаться вправо: узлы *будут двигаться от  $c$* . Заметим, что результат остается справедливым, если масса удаляется на *любом* промежутке, малом или нет. (Однако, теорема не дает информации о передвижениях узлов *на* любом интервале.) Также, если масса *добавляется*, а не *удаляется*, то узлы будут двигаться в *направлении* добавляемой массы.

Мы можем сделать вывод относительно обратного процесса: если узлы отодвигаются от (пододвигаются к) промежутка, то масса на этом промежутке удаляется (добавляется). Это справедливо только для одного промежутка; если существуют два или более промежутков, на которых удаляется или добавляется масса, то будет иметь место взаимодействие между этими двумя эффектами.

Заметим, что в теореме 14.2.5 и в наших рассуждениях в этом параграфе мы предсказывали перемещение узлов влево от  $c - \varepsilon$ , рассматривая только решение дифференциального уравнения и краевые условия в левой части

$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = h\alpha.$$

Мы можем сделать грубую оценку для количества массы, добавленной и удаленной на малом интервале, если есть возможность идентифицировать соседние узлы  $x_1, x_2$  для колебания с частотой  $\omega$  таким образом, что после того как масса добавлена, узел  $x_1$  двигается вправо к  $x_1^*$ , а  $x_2$  влево к  $x_2^*$ , при этом частота убывает до  $\omega^*$ . Предположим, что исходная масса на единичную длину между  $x_1$  и  $x_2$  была постоянной,  $\rho^2$ ,

и, после того как масса была добавлена, она равняется  $(\rho + \sigma)^2$ . Так как  $x_1, x_2$  являются последовательными узлами первоначального колебания,

$$\omega\rho(x_2 - x_1) = \pi$$

и, аналогично,

$$\omega^*(\rho + \sigma)(x_2^* - x_1^*) = \pi.$$

Это означает, что, зная  $x_2 - x_1, x_2^* - x_1^*, \omega$  и  $\omega^*$ , мы можем найти  $(\rho + \sigma)/\rho$ :

$$\frac{\rho + \sigma}{\rho} = \frac{\omega}{\omega^*} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2^* - x_1^*} > 1.$$

Для того чтобы сформулировать немного более интересную задачу, давайте рассмотрим действие точечной деформации на стержень при продольном колебании, следуя Глэдвеллу и Морасси (1999) [128]. Напомним, что для недеформированного стержня с площадью поперечного сечения  $A(x)$  определяющие уравнения имеют вид (10.1.3), (10.1.4):

$$(Au')' + \lambda Au = 0, \quad (14.3.2)$$

$$u'(0) - hu(0) = 0 = u'(1) + Hu(1). \quad (14.3.3)$$

Заметим, что слагаемое «жесткости»,  $(Au')'$ , имеет то же распределение,  $A$ , как и слагаемое «инерции»  $Au$ . Если деформация стержня заключается в нанесении небольшой зарубки в точке  $x = c$ , то жесткость подвергается серьезному изменению, тогда как слагаемое инерции почти не изменится. В силу этой причины, будем моделировать зарубку, как такую пружину, для которой в точке  $c$  справедливо

$$[u'(c)] = 0, \quad (14.3.4)$$

$$k[u(c)] = A(c)u'(c), \quad (14.3.5)$$

где  $[f(c)] := f(c+) - f(c-)$ . Неповрежденный стержень отвечает случаю  $k \rightarrow \infty$ , т.е.  $\varepsilon = 1/k \rightarrow 0$ . Мы можем показать, как это и ожидалось, что собственные частоты являются возрастающими функциями от  $k$ , т.е. убывающими функциями  $\varepsilon$ . Мы можем найти вариацию первого рода с параметром  $\varepsilon$  для собственных частот, рассматривая

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon v(x), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\mu$$

в уравнениях (14.3.2)–(14.3.5). Получим, что

$$(Au'_0)' + \lambda_0 Au_0 = 0, \quad (14.3.6)$$

$$(Av')' + \lambda_0 Av + \mu Au_0 = 0, \quad (14.3.7)$$

$$[v'(c)] = 0, \quad (14.3.8)$$

$$[v(c)] = A(c)u'_0(c). \quad (14.3.9)$$

Умножая (14.3.6) на  $v$ , (14.3.7) на  $u_0$  и вычитая, далее интегрируя от 0 до 1, воспользовавшись формулой (14.3.3), мы получим

$$(A(c)u'_0(c))^2 + \mu \int_0^1 Au_0^2 dx = 0,$$

что, вместе с условием нормализации

$$\int_0^1 Au_0^2 dx = 1,$$

дает

$$\mu = -(A(c)u'_0(c))^2. \quad (14.3.10)$$

Это уравнение показывает, что собственные частоты меняются вместе с  $\varepsilon$ . Теперь покажем, как формы колебаний, и в частности узлы, меняются вместе с  $\varepsilon$ . Чтобы это продемонстрировать, воспользуемся снова теоремой 14.2.4. Будем рассматривать часть стержня, находящуюся влево от  $c$ ; тогда смещение задается решением уравнения (14.3.2) и первым из уравнений (14.3.3) при  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\mu < \lambda_0$ . Мы будем отождествлять  $B_2$  в неповрежденном случае ( $B_2 = \lambda_0 A$ ) и  $B_1$  в поврежденном случае ( $B_1 = \lambda A$ ). Согласно теореме 14.2.5, узлы, отвечающие  $B_2$ , лежат влево от узлов, отвечающих  $B_1$ . Т.е. при повреждении узлы двигаются в сторону повреждения.

Теперь мы найдем замену первого рода в расположении узлов. Чтобы сделать это, оценим замену первого рода для узлов  $u$  влево от  $c$ . Это означает, что мы рассматриваем замену первого рода в решении уравнений

$$\begin{aligned} (A\theta')' + \lambda A\theta &= 0, \\ \theta'(0) - h\theta(0) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что мы записываем зависимую переменную как  $\theta$ , чтобы подчеркнуть, что мы не рассматриваем собственную форму колебаний,

а только решение, удовлетворяющее краевому условию для левого конца. Это решение определено единственным образом, с точностью до произвольной мультипликативной константы. Возьмем

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\psi, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\mu$$

и найдем

$$(A\psi')' + \lambda_0 A\psi + \mu A\theta_0 = 0, \quad (14.3.11)$$

$$\psi'(0) - h\psi(0) = 0. \quad (14.3.12)$$

Для решения этих уравнений мы будем использовать метод *вариации параметров*: запишем  $\psi = \theta_0 f$ . После некоторых преобразований мы получаем, что условия (14.3.11), (14.3.12) выполняются, если

$$(A\theta_0^2 f')' + \mu A\theta_0^2 = 0,$$

$$f'(0) = 0.$$

Следовательно,

$$A\theta_0^2 f' + \mu \int_0^x A\theta_0^2 dx = 0. \quad (14.3.13)$$

Если  $x_0$  является узлом для  $\theta_0$ , то соответствующий узел  $\theta$  имеет вид:  $x_0 + \varepsilon\xi$ , где, с точностью первого порядка,

$$\begin{aligned} 0 = \theta(x_0 + \varepsilon\xi) &= \theta_0(x_0 + \varepsilon\xi) + \varepsilon\psi(x_0) \\ &= \theta_0(x_0) + \varepsilon\xi\theta'_0(x_0) + \varepsilon\psi(x_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi = -\psi(x_0)/\theta'_0(x_0). \quad (14.3.14)$$

Далее,  $\psi(x) = \theta_0(x)f(x)$ , и, так как  $\theta_0(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , мы получим, что  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Следовательно, нам необходимо вычислить  $\psi(x_0)$  при помощи замены  $f(x) = 1/g(x)$ , и, используя правило Лопиталья, получим:

$$\psi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\theta_0(x)}{g(x)} = \frac{\theta'_0(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Рассматривая  $f = 1/g$  в (14.3.13), найдем

$$-\frac{A\theta_0^2(x)}{g^2(x)}g'(x) + \mu \int_0^x A\theta_0^2 dx = 0$$

и, рассматривая предел при  $x \rightarrow x_0$ , получим

$$-A(x_0) \left( \frac{\theta'_0(x_0)}{g'(x_0)} \right)^2 g'(x_0) + \mu \int_0^{x_0} A\theta_0^2 dx = 0. \quad (14.3.15)$$

Для нахождения изменений на множестве узлов волны рассмотрим  $\theta_0(x) = u_0(x)$  и будем одновременно использовать (14.3.15), (14.3.14), (14.3.10), чтобы получить

$$\varepsilon\xi = \varepsilon[A(c)u'_0(c)]^2 \int_0^{x_0} Au_0^2 dx / (A(x_0)[u'_0(x_0)]^2) \quad (14.3.16)$$

при изменении позиции узла от  $x_0$  к  $x_0 + \varepsilon\xi$ ; как и ожидалось,  $\xi > 0$ .

В частном случае однородного свободно-свободного стержня, для которого  $A = 1$ ,  $u_0 = \sqrt{2} \cos[(n-1)\pi x]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , мы получим, что  $m$ -е колебание двигается от  $x_0 = (2m-1)/(2n-2)$ ,  $m = 1, \dots, n-1$ , к  $x_0 + \varepsilon\xi$ , где

$$\varepsilon\xi = \varepsilon x_0 \sin^2[(n-1)\pi c].$$

Соответствующие изменения узлов вправо от  $c$  имеют вид:

$$\varepsilon\xi = -\varepsilon(1-x_0) \sin^2[(n-1)\pi c].$$

Эти результаты показывают, что для заданного колебания изменения положений узлов возрастают, если узел  $x_0$  приближается к месту повреждения. Пропорциональные изменения для тех узлов, которые расположены влево от точки  $c$ , т. е. имеют вид  $\varepsilon\xi/x_0$ , и для тех, которые вправо,  $-\varepsilon\xi/(1-x_0)$ , одинаковы для всех узлов; они зависят только от места зарубки. Это означает, что для нахождения положения поврежденной точки мы рассматриваем узлы волны, движущиеся навстречу друг другу; повреждение находится между осн узлов.

Экспериментальные исследования, основанные на этих результатах, можно найти в работе Глэдвелла и Морасси [128] (1999), в ней также приводятся ссылки на литературу, имеющую отношение к этому вопросу.

#### 14.4. Исследования Хольда и МакЛафлин

Оле Хольд и Джойс МакЛафлин, помимо остальных вопросов, много лет изучали обратные задачи. В этом параграфе мы даем быстрый отчет по их совместным исследованиям *обратных узловых задач*.

Обратные узловые задачи отличаются от обратных задач для собственных значений, которые составляют предмет изучения в большей части этой книги, использованием большого количества сложных методов. Мы уже отметили, что в то время как собственное значение, собственная частота, отражает свойства системы в целом, положение узлов связано со свойствами системы *около* узловой точки. Однако существуют и другие различия на пути от исходных данных к свойствам системы. Если данными являются собственные значения (и, возможно, некоторые нормировочные константы), то обычно существует некоторый алгоритм, дающий точные значения для множества параметров, определяющих свойства единственной системы, имеющей такие спектральные данные. В отличие от этого, каждый исследователь, пытающийся подойти к обратной узловой задаче, вскоре осознает, что положение узлов, множество всех положений узлов для всех главных колебаний, дает *слишком много информации*. Например, для струны, зафиксированной на концах, первая волна не имеет узлов, следующая имеет один узел и так далее; первые  $n$  волн имеют всего  $n(n - 1)/2$  узлов. На некотором этапе нам потребуется сделать выбор: выбрать все узлы для одной волны или выбрать по одному узлу на каждой из волн. Очевидно, что различные варианты выбора дадут различные модели. Ситуация становится более сложной, так как непрерывная система, например струна, имеет бесконечное число волн, а следовательно, и узлов. С математической точки зрения было бы более надежно, если бы было известно, что если выбирать случайным образом узлы из большего и большего числа волн, то полученная система будет *сходиться* в каком-то смысле к единственной системе, и что можно привести численные оценки для ошибки посредством использования конечного числа  $n$  подходящим образом выбранных узлов.

Следовательно, существует три различных этапа для «решения» обратной узловой задачи: нахождение аппроксимирующей системы, которая имеет заданное расположение узлов, для некоторой(ых) волн(ы); обоснование того, что если задано произвольное бесконечное множество узлов, выбранное каким-то образом, то существует не более одной колебательной системы определенного вида, которая обладает этими узлами для некоторых своих волн; построение оценок для ошибки при усечении бесконечного множества узлов при некотором значении  $n$ . Первая часть является сравнительно простой; Хольд и МакЛафлин приводят алгоритмы для различных типов систем Штурма–Лиувилля, описанных в параграфе 10.1. Оставшиеся две части являются сложными и требуют устрашающего массива аналитических методов; следовательно, мы

ограничим себя схемами используемых методов и доказанных теорем; заинтересованный читатель может посмотреть оригинальные статьи, находящиеся в широком доступе.

Нашей стартовой точкой является фундаментальная статья МакЛафлин [231] (1988). В ней рассматривается вторая часть описанной задачи, т. е. единственность. МакЛафлин рассматривает уравнение Штурма–Лиувилля (10.1.14) с краевыми условиями в форме Дирихле:

$$y'' + (\lambda - q)y = 0, \quad (14.4.1)$$

$$y(0) = 0 = y(1), \quad (14.4.2)$$

где  $q \in L^2(0, 1)$ .

Для начала напомним, что если  $q_1, q_2$  являются двумя потенциалами с условием  $q_2 = q_1 + c$ , где  $c$  является константой, тогда, замечая, что

$$\lambda - q_2 = (\lambda - c) - q_1,$$

мы получим, что собственные значения этих двух задач отличаются на  $c$ , тогда как собственные функции, а следовательно, и узлы собственных функций остаются одинаковыми. Это означает, что информация об узлах, сама по себе, дает  $q$  только с точностью до произвольной аддитивной константы: любая теорема единственности, связанная с информацией об узлах, должна содержать дополнительную информацию

$$\int_0^1 q_1(x) dx = \int_0^1 q_2(x) dx. \quad (14.4.3)$$

МакЛафлин доказывает, что если два потенциала  $q_1, q_2$  удовлетворяют равенству (14.4.3) и собственные функции  $y_n(q_1, x), y_n(q_2, x)$  обладают общим множеством узлов, т. е. *плотным* на  $(0, 1)$  (см параграф 10.3, для определения понятия плотности), то  $q_1 = q_2$  в  $L^2(0, 1)$ . Схема доказательства такова.

Для начала рассмотрим (14.4.1), (14.4.2) при  $q \equiv 0$ . Собственные значения имеют вид  $\lambda_n = (n\pi)^2, n = 1, 2, \dots$ ; собственные функции имеют вид  $y_n(x) = y_n(0, x) = \sin n\pi x$ ; узлы  $y_n(x)$  имеют вид  $x_{n,j}(0) = j/n, j = 1, 2, \dots, (n-1)$ . Заметим, что  $y_1(x)$  не имеет узлов.

Теперь сгруппируем числа 2, 3, 4, ..., следующим образом: 2; 4; 3; 8; 7; 6; 5; ... Это эквивалентно записи

$$n = 2^{k+1} - m; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, 2^k - 1. \quad (14.4.4)$$

$(m + 1)$ -й узел  $n$ -ого колебания имеет вид

$$x_{n,m+1}(0) = (m + 1)/(2^{k+1} - m), \quad (14.4.5)$$

и множество чисел  $x_{n,m+1}(0)$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, \dots, 2^k - 1$  является плотным на  $(0, 1)$ ; эти числа таковы:  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{6}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\dots$ . Теорема единственности формулируется следующим образом:

**Теорема 14.4.1.** Пусть  $q_1, q_2 \in L^2(0, 1)$ , и рассмотрим задачи нахождения собственных значений

$$y'' + (\lambda - q_i)y = 0,$$

$$y(0) = 0 = y(1),$$

$i = 1, 2$ . Для каждого  $n \geq 2$  предположим, что положение узлов, выбранных согласно (14.4.5), удовлетворяет условию

$$x_{n,j}(q_1) = x_{n,j}(q_2), \quad n = 2, 3, \dots$$

и

$$\int_0^1 q_1(x) dx = \int_0^1 q_2(x) dx,$$

тогда  $q_1 = q_2$  на  $L^2(0, 1)$ .

МакЛафлин противопоставляет эту обратную узловую задачу обратным задачам собственных значений для уравнения Штурма–Лиувилля и напоминает, что два спектра, отвечающие двум различным краевым условиям на одном конце (или какие-либо эквивалентные данные, например, нормировочные константы) необходимы для нахождения  $q$ . Она приводит следующий комментарий: «То что можно доказать... так это, что положение одного узла, хотя бы и правильно выбранного, для каждой собственной функции,  $n \geq 2$ , является более чем исчерпывающей информацией для определения  $q$  единственным (с точностью до константы) образом. Есть впечатление, что положения узлов, в некотором смысле, содержат «больше» информации о потенциале  $q$ , чем множество собственных значений или множество нормировочных констант».

Тогда как МакЛафлен [231] (1988) исследует только вторую часть, единственность, Нольд и МакЛафлен (1989) [167] рассматривают все



три аспекта: аппроксимацию, единственность и оценки погрешностей. Они рассматривают уравнение общего вида со свободными краевыми условиями:

$$(pv')' + \omega^2 \rho^2 v = 0, \quad (14.4.6)$$

$$v'(0) = 0 = v'(1). \quad (14.4.7)$$

Если  $p \equiv 1$ , то это уравнение струны (10.1.1) (с плотностью  $\rho^2$ ). Если  $p \equiv \rho^2$ , это уравнение стержня (10.1.3) при  $A \equiv p \equiv \rho^2$ .

Одна из задач, которую они рассматривают, связана со струной ( $p \equiv 1$ ), имеющей свободные концы. Они строят струну с кусочно-постоянной плотностью следующим образом. Пусть узлы  $n$ -й ( $n \geq 2$ ) волны  $v_n(x)$  имеют вид  $(x_j)_1^{n-1}$ , где  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < 1$ . Рассмотрим  $v_n(x)$  на интервале  $(x_{j-1}, x_j)$ . На этом интервале  $v_n(x)$  является фундаментальной волной струны, зафиксированной в концах,  $x_{j-1}$  и  $x_j$ , а  $\omega_n$  является собственной частотой; на  $(0, x_1)$  и  $(x_{n-1}, 1)$  она является фундаментальной волной для струны, свободной в 0 и зафиксированной в  $x_1$  (фиксированной в  $x_{n-1}$ , свободной в 1). Допустим, следовательно, что неоднородная струна заменяется струной с однородной плотностью  $\rho_j^2$  на интервале  $(x_{j-1}, x_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где  $x_0 = 0, x_n = 1$ . Для  $j$ -й ( $2 \leq j \leq n-1$ ) части струны определяющее уравнение имеет вид:

$$v'' + \omega_n^2 \rho_j^2 v = 0,$$

$$v(x_{j-1}) = 0 = v(x_j),$$

откуда

$$v(x) = \sin\{\pi(x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1})\}$$

и

$$\rho_j = \pi/(\omega_n(x_j - x_{j-1})), \quad j = 2, \dots, n-1. \quad (14.4.8)$$

Для первого промежутка  $(0, x_1)$  справедливы краевые условия  $v'(0) = 0 = v(x_1)$ , откуда

$$v(x) = \cos(\pi x/(2x_1))$$

и

$$\rho_1 = \pi/(2\omega_n x_1). \quad (14.4.9)$$

Аналогично на последнем промежутке  $(x_{n-1}, 1)$ :

$$\rho_n = \pi/(2\omega_n(1 - x_{n-1})). \quad (14.4.10)$$

Это является аппроксимацией в частном случае  $p \equiv 1$  и при краевых условиях (14.4.7). Если краевые условия имеют вид  $v(0) = 0 = v(1)$ , то уравнение (14.4.8) справедливо также для  $j = 1, n$ .

Хольд и МакЛафлин предлагают похожие алгоритмы для вычисления аппроксимаций  $p$  и  $\rho$  в других случаях и для потенциалов Штурма–Лиувилля  $q$ . Для уравнения стержня, в котором  $p = \rho^2$ , они вначале находят потенциал  $q$  и затем обращают преобразование, приводящее к (10.1.14), для нахождения  $A(x)$ . Они также обращают внимание на фундаментальное отличие между узлами уравнения струны (10.1.3) и уравнения стержня или уравнения Штурма–Лиувилля (10.1.14): возмущение  $\rho$  в уравнении струны может привести к (относительно) большим изменениям в расположении узлов; однако возмущения для  $A(x)$  или  $q$  могут привести лишь к незначительным изменениям для узлов колебания с достаточно большим порядковым номером. Они отмечают: «... информация о расположении нулей, которую мы используем для аппроксимации... функции импеданса ( $A(x)$ ), находится гораздо глубже в массиве данных, чем информация о плотности (струны)».

Эти замечания касаются части решения, а именно, построения аппроксимаций. Большая часть работы Хольда и МакЛафлин [167] (1989) касается оценок погрешностей и теорем единственности. Например, в простом случае струны со свободными концами, они показывают, что приведенный выше метод дает аппроксимацию второго порядка для плотности в средних точках внутренних интервалов, т.е.  $\rho((x_j + x_{j-1})/2) = \rho_j$ , однако только аппроксимацию первого порядка в концевых интервалах. Они приводят точную оценку погрешности, которая показывает, как оценка сходимости с ростом  $n$  зависит от гладкости плотности. Авторы разбирают многочисленные случаи, изученные в этой работе, а также в работе Хольда и МакЛафлин (1988) [166].

Теоремы единственности, которые они получили, являются обобщениями теорем единственности, найденных в работе МакЛафлин (1988) [231]. Типичным примером является

**Теорема 14.4.2.** Пусть  $p \equiv 1$ , и предположим, что вторая производная функции  $\rho$  интегрируема. Тогда  $\rho$  определяется единственным образом (с точностью до мультипликативной константы) произвольным плотным множеством узлов.

В работе [169] (1988) Хольд и МакЛафлин возвращаются к обратной узловой задаче и развивают теорию управляющей аппроксимации, изучают единственность и оценки погрешности для уравнения (14.4.6)

с краевыми условиями Дирихле, где  $p$  и  $\rho$  — функции ограниченной вариации.

В 1996, в работе [168], Хольд и МакЛафин изучают обратную узловую задачу для неоднородных прямоугольных мембран. Объем книги не позволяет нам рассмотреть эти проблемы. Мы только заметим, что авторы указывают на две трудности.

Рассмотрим однородную прямоугольную мембрану со сторонами  $a, b$ , колеблющуюся с зафиксированным ребром. Ее собственные числа равняются

$$\lambda = \omega^2 = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2.$$

Пусть  $\alpha = a/b$ . Если  $\alpha^2$  рационально, то существуют кратные собственные числа, и можно найти собственное число, кратность которого превышает любое заданное число. Если  $\alpha^2$  иррационально, то все собственные числа различны, однако можно найти пару сколь угодно близких собственных значений. Эта близость создает проблемы при нахождении оценок погрешности.

Вторая трудность связана с формой узловых областей, т. е. регионов, ограниченных узловыми линиями. Узловые области однородной прямоугольной мембраны оказываются прямоугольниками. Собственная функция, соответствующая  $\lambda_{m,n}$ , делит прямоугольник на  $mn$  равных прямоугольников, как показано на рис. 14.4.1а. Однако если плотность мембраны является возмущенной по отношению к ее однородному значению, то узловые области могут кардинально меняться, как показано на рис. 14.4.1б. Это усложняет поиск приближения для плотности. Хотелось бы получить ситуацию, которая обобщает соответствующую ситуацию для струны, возмущенная узловая область — приблизительно прямоугольник. Тогда можно предположить, что плотность постоянна в этом прямоугольнике, и использовать тот факт, что собственная функция является фундаментальной собственной функцией в области, ограниченной узловыми линиями. Основным вкладом работы [168] Хольда и МакЛафин (1996) является то, что они показали, как можно обойти обе эти трудности: как найти хорошие приближения для плотности и как получить теоремы единственности. В 2000-м году в работе [232] МакЛафин еще раз рассматривает обратную задачу для прямоугольной мембраны. Она рассматривает три различных подхода к проблеме: в первом даны множества уровня формы колебания и частоты; во втором — частоты и граничные измерения формы колебания; в третьем даны частоты четырех различных краевых задач. Результаты о локальном

существовании и теоремы единственности доказываются вместе с численными результатами для приближенных решений.

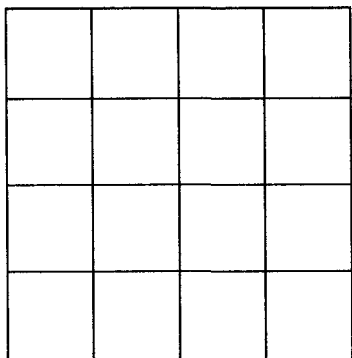
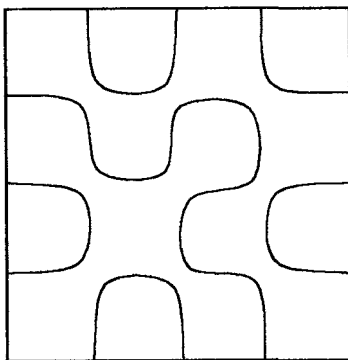
*a)**b)*

Рис. 14.4.1. Узловые области меняются от прямоугольников вплоть до нерегулярных фигур

---

---

## ГЛАВА 15

# Выявление дефектов

Случай порождает мысли, и случай удаляет их; никакое искусство не может задержать их или овладеть ими. Мысль покинула меня. Я хотел записать ее. Я записал вместо этого, что она покинула меня.  
Блез Паскаль. «Мысли», 585.

### 15.1. Введение

Как уже упоминалось в предисловии, выявление дефектов в колеблющейся структуре по изменениям свойств колебательного процесса является в некотором смысле обратной задачей. Поскольку такое выявление дефектов в принципе имеет важное практическое значение, оно подходит для включения в любое исследование, посвященное обратным задачам. Однако поскольку, по сути, это всего лишь применение техники обратных задач и оно должно быть сопряжено с использованием численных методов, соответствующая задача имеет лишь относительную важность в этой книге, которая, как было сказано в предисловии, посвящена в основном теоретическим и качественным вопросам. Поэтому в этой главе мы ограничимся обзором литературы и перечислением используемых методов, накладываемых предположений и выводов, которые могут быть получены относительно выявления дефектов в некоторых простых случаях.

Начнем наши рассуждения с ряда интуитивно ясных выводов.

*Если структура повреждена, ее колебательное поведение меняется.*

Под *колебательным поведением* мы имеем в виду отклик структуры на некоторую зависящую от времени силу. Мы предполагаем, что структура является недемпфированной, таким образом, можно говорить об *отклике частоты* — отклике структуры на действие синусоидальной силы заданной частоты  $\omega$ . Как обычно, мы уделяем основное внимание собственным частотам и соответствующим собственным колебаниям

структуры. Их можно найти (по крайней мере теоретически), применяя технику стандартного анализа колебаний к отклику частоты в различных точках структуры. Таким образом, мы делаем следующее утверждение.

*Колебательное поведение структуры может быть охарактеризовано ее откликами частоты и соответствующими собственными колебаниями.*

С другой стороны: *повреждение структуры может быть охарактеризовано его местоположением, интенсивностью и типами; далее, мы будем говорить о **конфигурации повреждения**.*

Строго говоря, структура называется поврежденной, если она подверглась изменениям, которые понизили ее жесткость или, более общо, понизили ее энергию деформации. Согласно этому определению, деформация *понижает* собственные частоты структуры или по крайней мере, не *увеличивает* их. Мы ослабим это определение и определим повреждение как (малое) изменение структуры; это определение включает (положительные или отрицательные) изменения жесткости или массы.

Теперь рассмотрим «простую» прямую задачу. *Дана некоторая структура, найти изменения колебательного поведения, вызванные заданным повреждением.*

Решение этой прямой задачи существенным образом зависит от того, что мы возьмем в качестве *моделей* неповрежденной и поврежденной структур, для которых собственные частоты и колебания можно найти существующими методами. Известно, что при некоторых предположениях эта задача может быть корректно поставлена: данные повреждения вызовут единственное множество изменений собственных частот и колебаний; причем эти изменения непрерывно зависят от параметров повреждения.

Однако почти все обратные задачи, в которых кто-то старается найти повреждение (т. е. его расположение, интенсивность и вид), вызвавшее заданные изменения поведения, являются некорректными. А именно может *не* существовать конфигурация повреждения (где повреждение понимается в сильном или слабом смысле), которая давала бы данное множество изменений в структуре колебательного процесса; или может быть *больше одной* конфигурации, которые задают одно и то же множество изменений в поведении; также нет гарантий того, что параметры повреждения будут непрерывно зависеть от изменений поведения.

Возможность существования более одной конфигурации повреждения, дающей заданные изменения собственных частот, следует из того, что собственные частоты являются глобальными конструкциями — они

зависят от всей структуры, распределения масс и жесткостей в ней, способа, которым она поддерживается. Иногда возможно определить конфигурацию повреждения по тому, как заданная конфигурация повреждения действует различными значениями на разные частоты. Придадим точность этому утверждению. Предположим, что нам известно, что структура повреждена только в одном месте, однако само место,  $s$ , и величина,  $d$ , неизвестны. В общем случае для малых  $d$  изменения  $i$ -й частоты,  $\delta\omega_i$ , имеют следующий вид:

$$\delta\omega_i = d \cdot f_i(s) : \quad (15.1.1)$$

они зависят линейным образом от  $d$  и нелинейным образом от расположения. Следовательно, если расположение,  $s$ , известно, то изменения  $\delta\omega_i$  одной частоты может оказаться достаточно для того, чтобы определить  $d$  (при условии того, что нам известно  $f_i(s)$ ). Если  $s$  неизвестно, то рассмотрим отношение изменений двух частот:

$$\frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j} = \frac{f_i(s)}{f_j(s)}. \quad (15.1.2)$$

Тогда если вид  $f_i(s)$  как функции от  $s$  известен, то может оказаться возможным найти значение  $s$ , соответствующее заданному значению  $\delta\omega_i/\delta\omega_j$ .

В каждом конкретном случае будет необходимо установить, существуют ли, и если да, то одно или больше одного, значения  $s$ , удовлетворяющие (15.1.2). Если (одно или больше) значения  $s$  известны, то  $d$  можно найти из (15.1.1). Ясно, что если повреждение не ограничено единственностью места повреждения, то процедура его идентификации очень сложной.

Мы разделим наши рассмотрения на две части: выявление дефектов в стержнях и в балках.

## 15.2. Выявление дефектов в стержнях

Для стержня, совершающего продольные колебания, мы моделируем дефект как трещину, которая остается открытой; следуя работам Фрюнда и Херрманна (Freund, Herrmann) [91] (1976) или Кабиба, Фредди, Морасси и Персивале (Cabib, Freddi, Morassi, Percivale) [47] (2001), мы моделируем трещину как продольную пружину жесткости  $k$  и пишем  $1/k = d$ . В одной из ранних статей [2] (1978) Адамс, Кэли, Пи

и Стоун (Adams, Cawley, Pye, Stone) (см. также работы Кэли и Адамса [50] (1979); и Хирна и Теста (Hearn, Testa) [170] (1991), касательно ссылок на инженерные исследования) рассматривали поврежденную одномерную систему (обобщенный стержень), смоделированный как две части,  $B$  и  $C$ , связанные посредством пружины жесткости  $k$ . Если  $\beta_{ss} := \beta_{ss}(s, \omega)$  и  $\gamma_{ss} := \gamma_{ss}(s, \omega)$  являются прямыми динамическими характеристиками (см. книгу Бишопа и Джонсона (1960) [34]) для  $B$  и  $C$  при  $x = s$ , то обычное исследование динамических характеристик задает уравнение для частоты поврежденной системы в виде:

$$\beta_{ss}(s, \omega) + \gamma_{ss}(s, \omega) + d = 0.$$

Следовательно, если  $\omega_m = \omega_m^0 + \delta\omega_m$ ,  $\omega_n = \omega_n^0 + \delta\omega_n$ , где  $\omega_m^0, \omega_n^0$  являются неповрежденными частотами, то

$$\begin{aligned} \beta_{ss}(s, \omega_m) + \gamma_{ss}(s, \omega_m) &= \beta_{ss}(s, \omega_m^0) + \gamma_{ss}(s, \omega_m^0) + \delta\omega_m \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ &\{\beta_{ss}(s, \omega) + \gamma_{ss}(s, \omega)\}|_{\omega=\omega_m^0}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое является нулевым, так как  $\omega_i^0$  является собственной частотой неповрежденной системы ( $d = 0$ ). Следовательно,

$$\delta\omega_m \frac{\partial}{\partial \omega} \{\beta_{ss}(s, \omega) + \gamma_{ss}(s, \omega)\}|_{\omega=\omega_m^0} + d = 0,$$

откуда получаем вид (15.1.1). Наркис (Narkis) [247] (1994) использовал этот метод для равномерного свободно-свободного стержня. Для стержня общего вида исследование возмущений из параграфа 14.3 показывает, что если  $\lambda = \omega^2$ , то

$$\delta\lambda_m = \mu\varepsilon = \mu d = -(A(s)u'_m(s))^2 d. \quad (15.2.1)$$

Морасси (Morassi) (2001) [237] (2001) существенно использовал этот результат. Он показал, что задача нахождения положения  $s$  по изменениям двух собственных частот в общем случае является некорректно поставленной: если система является симметричной, то повреждения в любой точке множества симметричных точек приведет к аналогичным изменениям собственных частот. Даже если система не является симметричной, ущерб в различных точках все равно может породить аналогичные изменения двух собственных частот.

Морасси (2003) [238] получает частичные результаты для равномерных стержней при различных краевых условиях и определяет случаи, в которых знание  $\delta\lambda_m, \delta\lambda_n$  позволяет и не позволяет единственным



образом найти положение  $s$ . Следовательно, например, для стержня со свободными краевыми условиями он определяет

$$C_m^F = \frac{-\delta\lambda_m^F}{2m^2\pi^2}.$$

$m$ -я ( $m \geq 1$ ) форма колебания имеет вид  $u_m(x) = \sqrt{2}\cos(m\pi x)$ , откуда (15.2.1) дает

$$\delta\lambda_m = -2m^2\pi^2 \sin^2(m\pi s)d,$$

значит

$$C_m^F = d \sin^2(m\pi s).$$

Теперь воспользуемся тригонометрическими тождествами, чтобы получить, что

$$\begin{aligned} \sin^2(2m\pi s) &= (2 \sin m\pi s \cdot \cos m\pi s)^2 = \\ &= 4 \sin^2 m\pi s - 4 \sin^4 m\pi s, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$d(4C_m^F - C_{2m}^F) = 4(C_m^F)^2$$

значит, размер и местоположение ущерба имеет вид:

$$d = \frac{C_m^F}{1 - C_{2m}^F/(4C_m^F)}, \quad \sin^2 m\pi s = \frac{C_m^F}{d}.$$

Аналогично он показывает, что  $d$  и  $\sin^2 m\pi s$  могут быть однозначно найдены по  $C_{m+1}^F$  и  $C_m^S$ , которые определяются следующим образом:

$$C_{m+1}^F = \frac{-\delta\lambda_{m+1}^F}{2(m+1)^2\pi^2}, \quad C_m^S = \frac{-\delta\lambda_m^S}{2m^2\pi^2}, \quad (15.2.2)$$

где  $\lambda_m^S$  является  $m$ -той собственной частотой стержня в случае, когда он оперт с обоих концов (упр. 15.2.1).

Морасси и Дилена (2002) [239] рассматривают аналогичную задачу определения высоты и положения *точечной массы*, прикрепленной к тонкому стержню по ее воздействию на собственные частоты. В работе [236] (1997) Морасси ставит задачу определения трещины в стержне как обратную задачу, в духе главы 11, следуя работе Хольда [165] (1984). Он показывает, что положение трещины однозначно определяется по асимптотическому виду спектра. Бисконтин, Морасси и Виндель в [32]

(1998) изучают асимптотический вид спектра для однородного свободно-свободного стержня единичной длины с пружиной, имеющей жесткость  $k$  при  $x = c$ . Собственные значения  $\lambda (= \omega^2)$  являются корнями

$$p(\lambda) = \lambda \sin \lambda c \sin \lambda(1 - c) - k \sin \lambda. \quad (15.2.3)$$

Мы можем рассматривать два вида асимптотик: для большого  $k$  и для малого  $k$ . Для  $k \rightarrow \infty$  две части стержня жестко связаны вместе: стержень является невозмущенным, свободно-свободным, его собственные значения равны  $\lambda_m = m\pi$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Для больших  $k$ , т.е. малых  $\varepsilon = 1/k$ ,  $m$ -тое собственное значение имеет вид:  $\lambda_m = m\pi + \varepsilon\mu_m$ , где (упр. 15.2.2)

$$\mu_m = (-1)^m \sin m\pi c \sin m\pi(1 - c).$$

Это напоминает малое изменение, которое мы уже наблюдали в приведенных выше рассмотренных. Для малого  $k$  асимптотическая форма сосредоточена вокруг  $k = 0$ ; теперь стержень разбивается на свободные-свободные стержни, один из них имеет длину  $c$ , другой длину  $1 - c$ ; имеются две ветви

$$\lambda_{m_1} = m_1\pi/c, \quad \lambda_{m_2} = m_2\pi/(1 - c).$$

Мы теперь подвергнем ветви возмущению и будем искать собственные значения в виде:  $\lambda = \lambda_{m_1} + k\nu_{m_1}$ ,  $\lambda = \lambda_{m_2} + k\nu_{m_2}$ , мы найдем (упр. 15.2.2) с точностью до первого порядка, что

$$\nu_{m_1} = 1/(m_1\pi), \quad \nu_{m_2} = 1/(m_2\pi).$$

Это дает асимптотическую форму обеих ветвей в виде:

$$\lambda_{m_1} = \frac{m_1\pi}{c} + \frac{k}{m_1\pi} + o\left(\frac{1}{m_1}\right),$$

$$\lambda_{m_2} = \frac{m_2\pi}{(1 - c)} + \frac{k}{m_2\pi} + o\left(\frac{1}{m_2}\right).$$

Бисконтин (Biscontin) и другие экспериментально обнаружили очевидность двух таких ветвей для некоторых стальных стержней. Наши рассуждения к этому моменту касались распознавания ущерба по его воздействию на собственные частоты. Мы обсуждали воздействие на положения узлов для стержня в параграфе 14.3. Это, по существу, количественный результат, который может быть полезен в экспериментальных/численных исследованиях, см. работу Глэдвелла и Морасси (1999) [128].

Ву и Фрике (Wu, Fricke) в работах [335] (1989), [336] (1990) и [337] (1991) обсуждают задачу поиска одного или нескольких небольших затворов в канале.

### Упражнения 15.2

- 1) Рассмотрим однородный стержень единичной длины с опертым краевым условием ( $S$ ) и свободным ( $F$ ). Определим  $C_{m+1}^F, C_m^S$  как в (15.2.2). Покажите, что если дефект,  $d$ , располагается в точке  $x = s$ , то

$$d = C_{m+1}^F + C_m^S, \quad \cos[2(m+1)\pi s] = -1 + \frac{2}{1 + C_{m+1}^F/C_m^S}.$$

- 2) Проверьте уравнение для собственных чисел (15.2.3) для равномерного свободно-свободного стержня, подчиняющегося уравнению

$$u'' + \lambda^2 u = 0, \quad u'(0) = 0 = u'(1),$$

если существует пружина жесткости  $k$ , связывающая части слева и справа от  $x = c$  (см. уравнение (14.3.5)). Найдите асимптотический вид для собственных значений при малых и больших  $k$  в однородной трубе, используя измеренные сдвиги собственной частоты.

### 15.3. Выявление дефектов в балках

Многочисленные ранние статьи, включая работы Кэли и Адамса (Cawley, Adams) (1979) [50] и Херна и Тесты (Hearn, Testa) (1991) [170], использовали анализ чувствительности, основанный на общем дискретном уравнении

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (15.3.1)$$

Допустим, что жесткость и матрица масс возмущены как  $\mathbf{K} + \delta \mathbf{K}, \mathbf{M} + \delta \mathbf{M}$ , соответственно, и решением является  $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \lambda + \delta \lambda$ . Тогда

$$(\mathbf{K} + \delta \mathbf{K} - (\lambda + \delta \lambda)(\mathbf{M} + \delta \mathbf{M}))(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

и, переходя к уравнениям первого порядка, получаем

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{u} + (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{K} - \lambda \delta \mathbf{M})\mathbf{u} - \delta \lambda \mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Теперь, домножая слева на  $\mathbf{u}^T$  и используя (15.3.1) и равенство  $\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1$ , найдем

$$\delta \lambda = \mathbf{u}^T \delta \mathbf{K} \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}^T \delta \mathbf{M} \mathbf{u}.$$

В частности, если изменилась только жесткость структуры, то

$$\delta \lambda = \mathbf{u}^T \delta \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (15.3.2)$$

Это уравнение показывает, что если изменения  $\mathbf{K}$  известны, то изменения собственных частот можно найти. Одним из способов решения обратной задачи является, наоборот, вычисление изменений различных частот, вызванных изменениями всех элементов конечно-элементной модели рассматриваемой структуры, а затем определение, изменения какого элемента вызывают изменения множества частот, ближайшие (или по виду, или в смысле оценок наименьших квадратов) к найденным или заданным. Колей и Адамс (Cawley, Adams) [50] (1979), Юэн (Yuen) [341] (1985), Морасси и Ровир (Morassi, Rovere) [241] (1997), Вестрони и Капеччи (Vestroni, Capocchi) [327] (1996), Вестрони и Капеччи [328] (2000) следуют этому общему подходу. См. работу Шеня и Тэйлора (Shen, Taylor) [304] (1991) для аккуратного и детального изучения инженерной составляющей этой проблемы, исследованной в смысле оценок наименьших квадратов. Также см. работы Линга, Ху и Чоя (Liang, Hu, Choy) [213] (1992a) и [214] (1992b), Давини, Гатти и Морасси (Davini, Gatti, Morassi) [72] (1993), Кэрри и Вестрони (Cerri, Vestroni) [51] (2000), а также Капеччи и Вестрони [48] (1999).

Существует большое количество статей, в которых обсуждается много различных способов моделирования удара балки, подверженной колебаниям изгиба, включая работы Фрюнда и Херрманна (Freund, Herrmann) [91] (1976), Хондроса и Димарогонаса (Chondros, Dimarogonas) [55] (1980), Гудмандсона (Gudmundson) [157] (1982), Кристидиса и Барра (Christides, Barr) [54] (1984), Шеня и Пьерра (Shen, Pierre) [303] (1990), Ризоса, Аспарагатоса и Димарогонаса (Rizos, Aspragathos, Dimarogonas) [291] (1990), Осташковича и Кравчука (Ostachowicz, Krawczuk) [255] (1991), Хондроса, Димарогонаса и Ыао (Chondros, Dimarogonas, Yao) [56] (1998) и другие работы, цитируемые в этих статьях. Простейшей моделью удара является вращательная пружина жесткости  $k$ ; см. работы Хондроса и Димарогонаса [55] (1980), Наркиса (Narkis) [247] (1994), или Болтезара, Странкара и Кюхеля (Boltezar, Strancar, Kuhelj) [38] (1998). Каждый из этих исследователей подходит к проблеме своим собственным путем, наиболее

типичным является подход Болтезара и др., устанавливающих уравнение для определения частоты однородной балки, смоделированной как вращательная пружина жесткости  $k$ , подвергшейся действию удара во внутренней точке  $R$ , и находящих значение  $R$ , которое вызывает ту же самую жесткость  $k$ , которая получена из измеренных (на самом деле численно предсказанных) изменений первых шести собственных частот. См. также работу Ву [338] (1994), в которой изложен другой подход, и обзорную работу Натке и Кэмпела (Natke, Cempel) [248] (1991).

Следуя Морасси [235] (1993), мы рассмотрим анализ методов возмущений для балки с вращательной пружиной жесткости  $k$ , расположенной в  $s$ , где  $d := 1/k = \varepsilon$  мало. Мы следуем основным направлениям, установленным в главе 13.1 для стержней. Балка определяется уравнением (13.1.4) с краевыми условиями (13.1.12), (13.1.13) и условиями на скачок в точке  $x = s$ :

$$[u] = 0 = [ru''] = [(ru'')'], \quad r(s)u''(s) = k[u'],$$

где, как всегда,  $[f] := f(s+) - f(s-)$ .

Записывая

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon v(x), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \mu,$$

в (13.1.4) мы найдем

$$(ru_0'')'' = \lambda_0 a u_0, \quad (15.3.1)$$

$$(rv'')'' = \lambda_0 a v + \mu a u_0, \quad (15.3.2)$$

где обе функции  $u_0$  и  $v$ , удовлетворяют краевым условиям (13.1.12), (13.1.13) и  $v$  удовлетворяет условиям на скачок

$$[v] = 0 = [rv''] = [(rv'')'], \quad [v'] = r(s)u_0''(s)..$$

Умножая (15.3.2) на  $u_0$  и (15.3.1) на  $v$ , вычитая и интегрируя вдоль  $(0,1)$ , мы найдем (упр. 15.3.1), используя краевые условия и условие на скачок, что

$$\mu = -(r(s)u_0''(s))^2, \quad (15.3.3)$$

таким образом, изменение  $m$ -той собственной частоты равняется

$$\delta \lambda_m = -(r(s)u_m''(s))^2 d. \quad (15.3.4)$$

Морасси в работе [235] (1993) отметил, что это показывает, что изменения  $\lambda_m (= \omega_m^2)$  пропорциональны потенциальной энергии, запасенной

в месте  $s$  неповрежденной балки; также они пропорциональны квадрату кривизны неповрежденной балки в  $s$ . В работе [238] (2003) Морасси использует (15.2.4) так же, как он использовал соответствующее уравнение (15.2.1) для стержня. Например, он показывает, что жесткость и расположение повреждения однородной свободно опертой балки определяется единственным образом (за исключением симметрии) изменениями  $m$ -той и  $2m$ -той частот. Альтернативное отождествление задается изменениями  $m$ -той частоты балки со свободно опертыми граничными условиями и  $(m + 1)$ -й частоты балки со скользящими краевыми условиями, см. упр. 15.3.2. Ясно, что он использует эти условия потому, что они являются единственными, для которых форма колебания является отдельно синусоидальной или косинусоидальной; в общем случае форма колебания включает как синусоидальные, так и косинусоидальные слагаемые. Предложенную процедуру легко обобщить на случай изменений частот под действием других краевых условий. Морасси и Ролло (Morassi, Rollo) в работе [240] (2001) используют (15.3.4) для оценки расположения двух ударов в балке со свободно опертыми концами.

Было также написано несколько работ, посвященных распознаванию дефектов по другим воздействиям, а именно искривлению, изменению формы волны и узловых точек. Так, Пандей, Бисуас и Самман (Pandey, Biswas, Samman) заметили в [260] (1991), что кривизна основной волны поврежденной балки возрастает в области, расположенной близко к зоне повреждения; это отличалось от простого изменения формы колебания, которое в общем случае не локализуется возле зоны повреждения, см. работу Ризоса, Аспарагатоса и Димарогонаса [291] (1990). Пандей и др. использовали этот эффект для локализации повреждения.

Дилена и Морасси (Dilena, Morassi) в работе [80] (2002) и Дилена в работе [78] (2003) провели систематическое изучение для того, чтобы понять, можно ли обобщить вывод Глэвелла и Морасси, см. [128] (1999), для стержня, согласно которому *узловые точки сближаются к местоположению дефекта*, и применить его к гибко вибрирующей балке. Результат для стержня следует из теоремы Штурма, как описано в главе 14.3. Форма колебания балки подчиняется уравнению (13.1.4) четвертого порядка, а не простому уравнению второго порядка (14.3.2), описывающему стержень. Как показали Лейтон и Нехари (Leighton, Nehari) в своем массивном авторитетном исследовании [206] (1958) осцилляторных свойств уравнений четвертого порядка, не существует простых обобщений результатов Штурма на такие уравнения. Существуют точки, называемые идентичными точками, и можно пока-

зять, что эти точки сближаются к месту дефекта, но идентичные точки не имеют ясной физической интерпретации. В подтверждение этого вывода Дилена и Морасси построили в работе [80] (2002) контрпримеры, показывающие, что узлы *не* всегда сближаются к месту дефекта.

Простейший контрпример показан на рис. 15.3.1, он взят из работы [80] и упрощен. Рис. 15.3.1(а) показывает первое (собственное) изгибающее колебание (т. е. колебание типа 3) балки с двумя свободными концами. Оно имеет две узловые точки:  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Рис. 15.3.1(б) показывает знак изменения позиции  $\xi_1$  в зависимости от дефекта величины  $d$  (измеренной некоторым образом) и позиции  $s$ . Заметим, что знак зависит почти всецело от  $s$ . Узел  $\xi_1$  расположен приблизительно в 0.2; из чертежа видно, что если  $s < 0.41$ , то узел смещается влево (знак отрицателен), тогда как если  $s > 0.41$ , то он смещается вправо (знак положителен). Это означает, что если  $s$  лежит в интервале (0.2; 0.41), то узловые точки смещаются «неправильно». Рис. 15.3.1(в) показывает наличие аналогичного интервала в окрестности второй узловой точки, в этом интервале дефект вызывает «неправильное» смещение узлов. Для соответствующей осевой вибрации балки изменение знака происходит в точности в узловой точке: если дефект расположен слева от узла (неповрежденного стержня), то узел будет двигаться влево (знак отрицателен); а если справа, то вправо (знак положителен). Для балки, оказывается, можно утверждать следующее: *«удаленный» от узла дефект вызывает смещение узла в направлении дефекта*. Дилена и Морасси в работе [79] (2002) расширили свой анализ на колебания более высоких типов и нашли, что существуют различия в действии повреждения на, так называемые *внешние* и *внутренние* узлы; внешний узел является крайним узлом, ближайшим к концу стержня. Они дополняют свои исследования практическими примерами.

### Упражнения 15.3

- 1) Получите уравнение (15.3.4) для замены собственного значения при ущербе  $d(= 1/k)$  в точке  $s$ .
- 2) Найдите изменение  $m$ -того собственного значения для свободно закрепленной и для скользящей однородных балок, находящихся под воздействием вращательной пружины с жесткостью  $k$  при  $x = s$ .

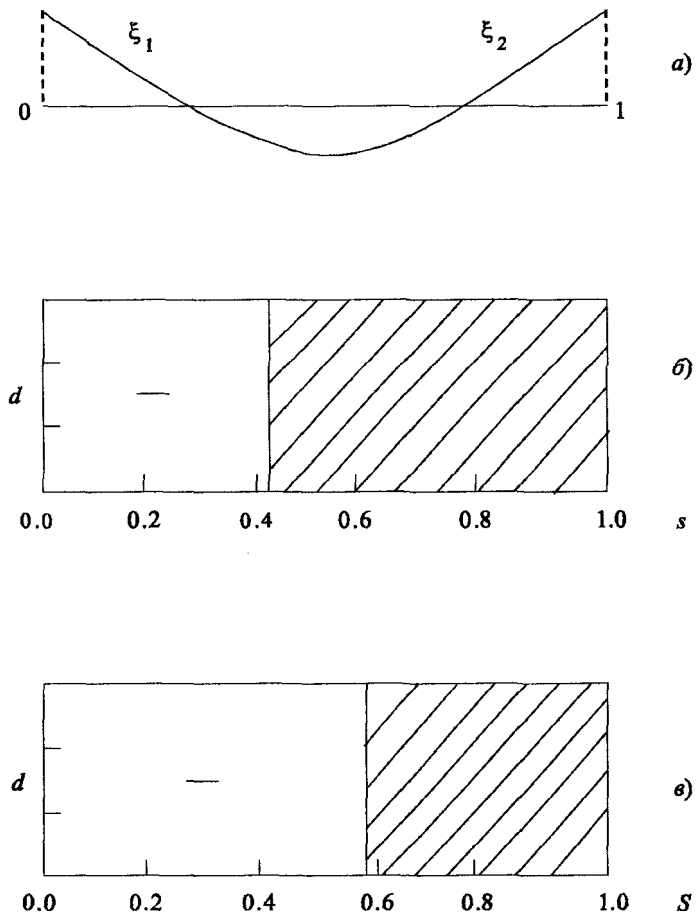


Рис. 15.3.1. Если ущерб находится в незаштрихованной (заштрихованной) области, то узел движется влево (вправо)



---

---

## Предметный указатель

- G-L-M, 395
- NTP, 182
- O, 182
- PD, 174  
— условие, 176
- STP, 182
- TP, 182
- $\pi$ -линия, 89
- акустический резонатор  
— конечноэлементная модель, 55
- алгебраическое дополнение, 29
- алгоритм Ланцоша, 99
- асимптотическое поведение, 371
- балка  
— Эйлера-Бернулли, 493  
— поперечные колебания, 47
- блочный алгоритм Ланцоша, 147
- Больцано-Вейерштрасса теорема, 327, 540
- Вандермонда определитель, 87
- ведущий минор, 165
- Веерштрасса теорема, 338
- вектор  
—  $L_2$  норма, 25  
—  $L_2$ -норма, 24  
— неотрицательный, 178  
— положительный, 178  
— столбец, 21  
— строка, 21
- векторы  
— ортогональность, 24
- верхние и нижние оценки, 488
- вершина  
— внутренняя, 294  
— граничная, 293  
— не граничная, 293  
— приграничная, 294  
— присоединенная, 293  
— узловая, 293
- вес, 82
- весовая функция, 82
- вибрация  
— струны, 311
- внешний узел, 568
- внутренний узел, 568
- внутренний элемент, 294
- внутренняя вершина, 294
- волновое уравнение, 55
- Вольтерры интегральное уравнение, 400
- восприимчивость, 122
- вполне ограниченное, 327
- вполне положительная, 182
- вращение, 138
- вронскианиан, 540
- гармонический, 390

- гармонический спектр, 476  
 гауссова исключения процедура, 33  
 Гейне-Бореля теорема, 327  
 главный (-ая)  
 — диагональ, 21  
 Грама-Шмидта метод, 84  
 граничная вершина, 293  
 граф, 132, 133  
 — неориентированный, 133  
 — простой, 133  
 — связный, 135  
 — системы, 491  
 граф знака, 296  
 — сильного, 296  
 — слабого, 296  
 граф путей, 133  
 Грина матрица, 137, 345  
 Гупилларда среда, 450  
 Гурса задача, 400  
  
 Дарбу лемма, 465  
 двойной узел, 352  
 делители нуля, 23, 32  
 дерево, 137  
 — остовное, 137  
 диагональ, 53  
 — главная, 21  
 динамические характеристики, 518  
 дискретный принцип максимума, 279  
 дифференциальное уравнение, описывающее, 212  
 добавление  
 — осциллятора к, 489  
 добавление осциллятора, 488  
 дуальная плотность, 479  
  
 евклидова норма, 179  
 задача Коши, 446  
  
 задача на собственные значения  
 — несимметричная матрица, 41  
 замкнутое множество, 75, 323  
 звезда, 134  
 знаково-обратная, 194  
 знаково-осцилляторная, 195  
 знаково-осцилляторная матрица, 163  
 знакопостоянства  
 — область, 298  
 — — сильного, 298  
 — — слабого, 298  
  
 изоспектральное семейство, 211  
 изоспектральные, 210, 461  
 изоспектральные струны, 477  
 изоспектральный поток, 211, 212  
  
 квадратичная форма, 36, 174  
 квазиведущий минор, 191  
 кодиагональ, 46  
 колебание  
 — собственное, 61  
 — стержня, 312  
 колебание твердого тела, 315  
 колебания  
 — вращения, 312  
 колебательное поведение, 558  
 кольцо, 134  
 компактное  
 — множество, 326  
 компактности  
 — критерий, 327  
 компактный  
 — оператор, 327  
 конечноэлементная модель, 14  
 конфигурация повреждения, 559  
 координаты  
 — главные, 65  
 — обобщенные, 50

- Коши последовательность, 323  
 Коши задача, 400  
 критерий компактности Хаусдорфа, 327
- Лагранжа уравнения, 50  
 Ланцоша алгоритм  
 — блочный, 147  
 лестничная  
 — матрица, 185  
 — последовательность, 185  
 лестничная структура, 239  
 Ли группа, 479
- максимум модуля, 451  
 максимума модуля принцип, 451  
 матрица, 19  
 — PD, 174  
 — Грина, 345  
 — ассоциированный граф, 133  
 — верхняя треугольная, 34  
 — вполне положительная, 182  
 — диагональная, 21  
 — знаково-осцилляторная, 163  
 — инерции, 46  
 — квадратная, 20  
 — лестничная, 185  
 — массы, 46  
 — минор, 28  
 — невырожденная, 32  
 — неотрицательная, 178  
 — неразложимая, 136  
 — нижняя треугольная, 34  
 — обратимая, 31  
 — обратная, 32  
 — окаймленная диагональная, 134  
 — окаймляющая, 167  
 — ортогональная, 100, 139  
 — осцилляторная, 162, 182  
 — откликов  
 — — дискретной системы, 67  
 — персимметричная, 109  
 — положительная, 178  
 — положительно определенная, 35, 174, 176, 177  
 — положительно полуопределенная, 36, 177  
 — присоединенная, 30, 168  
 — пятидиагональная, 49  
 — разложимая, 136  
 — симметричная, 20  
 — смежности, 133  
 — строго вполне положительная, 182  
 — транспонированная, 20  
 — трехдиагональная, 53  
 — усеченная, 102
- матрицы  
 — равенство, 20  
 — разность, 22  
 — сумма, 22  
 — умножение, 22
- матричное произведение  
 — некоммутативность, 24
- маятник  
 — составной, 47
- мембрана  
 — конечноэлементная модель, 55
- метод вариации параметров, 549  
 метод конечных элементов  
 — стержень, 50  
 — тетраэдрические элементы, 59  
 — треугольный элемент, 56
- метод ортогонализации Грамма—Шмидта, 213
- метрическое пространство, 323  
 — полное, 323
- минимакса метод, 76  
 минимаксная процедура для операторов, 365

- минор, 164
  - ведущий, 165
  - главный, 37
  - квазиведущий, 191
  - угловой, 170
- многочлен, 491
- множества
  - замыкание, 323
- множество
  - вполне ограниченное, 327
  - замкнутое, 323
  - компактное, 326
  - открытое, 323
  - плотное, 323
  - предкомпактное, 328
- мульти-сегментные струны, 477
- независимый метод, 76
- неориентированный граф, 133
- неотрицательная
  - матрица, 178
- неотрицательный
  - вектор, 178
- неравенство Коши-Шварца, 325
- норма
  - $L_1$ , 179
  - $L_2$ , 179
  - Фробениуса, 179
  - евклидова, 179
  - матрицы, 179
- нормировочные константы, 371, 381
- о деформации лемма, 473
- область
  - оператора, 324
- область знакопостоянства, 289
- обобщенная задача на собственные значения, 35
- обобщенная сила, 50
- обобщенные координаты, 50
- образ
  - оператора, 324
- обратная теорема
  - вынужденное колебание, 67
- обратные узловые задачи, 550
- окаймленная диагональная матрица, 134
- окаймляющая матрица, 167
- оператор, 324
  - Эйлера-Бернулли, 495
  - компактный, 327
  - конечномерный, 328
  - линейный, 324
  - непрерывный, 324
  - непрерывный линейный, 324
  - самосопряженный, 329
  - сопряженный к, 329
- оператора
  - резольвентное множество, 330
  - норма, 324
  - область, 324
  - образ, 324
  - собственное значение, 329
  - спектр, 330
  - ядро, 324
- определитель, 26
  - Вандермонда, 87
- правила вычисления, 26
- произведение матриц, 31
- разложение Лапласа, 170
- ортогональная матрица, 139
- ортогональное
  - преобразование, 138
- ортогональное разложение, 325
- ортогональность
  - дискретная, 83
  - непрерывная, 83
- ортогональные многочлены, 82
- остовное дерево, 137

- осцилляторная, 182  
 — система векторов, 199  
 осцилляторная матрица, 162  
 осцилляторное  
 — ядро, 344  
 отклик частоты, 558  
 открытое множество, 323  
 отношение Рэлея, 37, 68  
 — глобальный минимум  
 — — глобальный максимум, 69  
 — итерационное определение собственных значений, 74  
 — независимое определение собственных значений, 76  
 — стационарные значения, 69  
 отображение, 324  
  
 Парсевалья равенство, 326  
 перемены знака, 199  
 периодическая якобиева матрица, 134  
 Перронов корень, 179  
 Персимметрическая система, 122  
 персимметричная матрица, 109  
 плотное, 323  
 поверхностные координаты, 57  
 подвижные точки, 344  
 подобия преобразование, 138  
 положительная  
 — матрица, 178  
 положительная определенность  
 — условие, 37  
 положительная полуопределенность  
 — условие, 38  
 положительная система балки, 494  
 положительность, 491  
 положительный  
 — вектор, 178  
 полюса и нули, 122  
  
 порядок  
 — матрицы, 19  
 последовательности  
 — предел, 323  
 последовательность  
 — Коши, 323  
 — Чебышева, 351  
 последовательность Чебышева, 351  
 последовательность Штурма, 80  
 предельные точки, 323  
 предкомпакт, 328  
 преобразование  
 — Хаусхолдера, 139  
 — ортогональное, 138  
 — подобия, 138  
 приграничными вершинами, 294  
 принцип Рэлея, 68  
 принцип максимума, 294  
 — дискретная форма, 279  
 присоединенная вершина, 293  
 присоединенная матрица, 168  
 присоединенное ядро, 361  
 произведение Адамара, 246  
 простой граф, 133  
 простой узел, 352  
 пространства  
 — нормированные линейные, 324  
 пространство  
 — гильбертово, 325  
 — евклидово (эрмитово), 325  
 — линейное, 324  
 — метрическое, 323  
 — полное, 323  
 — со скалярным произведением, 325  
 лучок матриц, 137  
 пятидиагональная матрица  
 — ассоциированный граф, 135

- равномерно распределенный спектр, 390
- разложение Лапласа, 170
- резольвентное множество  
— оператора, 330
- рекуррентное соотношение, 41, 61  
— трехчленное, 83
- решение Дюамеля, 372
- решетка Тоды, 218
- Ролля теорема, 501
- самосопряженный, 329
- связи  
— влияние на собственные частоты, 73  
— несвободные колебания, 70
- связность, 491
- сила  
— обобщенная, 50
- сильного  
— граф знака, 296  
— знакопостоянства область, 298
- символ Кронекера, 21
- скалярное произведение, 83
- скобка, 465
- слабого  
— граф знака, 296  
— знакопостоянства область, 298
- собственная частота, 61
- собственное значение  
— действительное, 36  
— матрицы, 35  
— оператора, 329  
— пары матриц, 35  
— положительное, 41  
— положительность, 38
- собственные векторы  
— линейная независимость, 39
- собственные весторы  
— ортогональность, 39
- собственный вектор, 35  
— нормированный, 39
- сопряженный оператор, 329
- спектр  
— гармонический, 390, 476  
— матрицы, 102  
— оператора, 330  
— равномерно распределенный, 390, 477
- спектральный пробел, 489
- стержень  
— крутильные колебания, 43  
— продольные колебания, 43
- стержня  
— колебания вращения, 312  
— продольное колебание, 312
- строго вполне положительная, 182
- строгой вполне положительности  
— проверка, 198
- струна  
— мульти-сегментная, 477  
— поперечные колебания, 44  
— ступенчатая, 475
- струны  
— вибрация, 311  
— изоспектральные, 477
- ступенчатая струна, 475
- теорема  
— Больцано-Вейерштрасса, 327, 540  
— Веерштрасса, 338  
— Вейерштрасса, 75  
— Гейне-Борель, 327  
— Коши-Бине, 168  
— Куранта о последовательности узлов, 288  
— Перрона, 179  
— Рисса, 326  
— — о представлении, 326

- Ролля, 501, 541
- Руше, 374
- Сильвестра, 167
- о дополнении, 324
- об однозначном продолжении, 291
- теоремы Штурма, 539
- теория графов, 132
- трехчленное рекуррентное соотношение, 83
  
- угловой минор, 170
- узел, 501
  - двойной, 352
  - простой, 352
- узловая вершина, 293
- узловая область, 289
- узловая точка, 501
- узловое множество, 289
- узловой промежуток, 501
- узловые линии, 289
- умножение матриц
  - некоммутативность, 22
- уравнение Гельмгольца, 289
- усечения условие, 414
- усеченная матрица, 102
  
- форма колебания твердого тела, 494
- формула Пиконе, 543
  
- фробениусова норма, 179
- функции Грина
  - симметрия, 321
- функционал, 324
- функция Грина, 319, 496
- функция смены знака, 80
  
- характеристические координаты, 400
- характеристическое уравнение, 35
- Хаусхолдера преобразование, 139
  
- частотная функция отклика, 122
- чередование
  - собственных значений, 73, 82
- чередование узлов, 63
  
- Шварца лемма, 457
- шпренгель, 135
  
- элемент
  - внутренний, 294
- ядро, 324
  - осцилляторное, 344
  - присоединенное, 361
- якобиева матрица
  - ассоциированный граф, 133
  - обратная задача, 99
  - периодическая, 134
  - собственные векторы, 88

---

---

## Литература

1. Abrate, S. (1995) Vibration of non-uniform rods and beams. [47], **185**, 703-716. 483.
2. Adams, R.D., Cawley, P., Pye, C.J. and Stone, B.J. (1978) A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. [44], **20**, 93-100. 560.
3. Ambarzumian, V. (1929) Über eine Frager der Eigenwerttheorie. [92], **53**, 690-695. 389.
4. Ando, T. (1987) Totally positive matrices. [57], **90**, 165-219. 164, 183, 187, 197, 197, 197, 198, 199, 231.
5. Andersson, L.-E. (1970) On the effective determination of the wave operator in the case of a difference equation corresponding to a Sturm-Liouville differential equation. [41], **29**, 467-497. 394.
6. Andersson, L.-E. (1988a) Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients. [29], **4**, 353-397. 409, 428.
7. Andersson, L.-E. (1988b) Inverse eigenvalue problems for a Sturm-Liouville equation in impedance form. [9], **4**, 929-971. 409, 428.
8. Andersson, L.-E. (1990) Algorithms for solving inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations in *Inverse Problems in Action*, ed. P.C. Sabatier, Berlin: Springer. 449.
9. Andrea, S.A. and Berry, T.G. (1992) Continued fractions and periodic Jacobi matrices. [57], **161**, 117-134. 147.
10. Andrew, A.L. and Paine, J.W. (1985) Correction of Numerov's eigenvalue estimates. [68], **47**, 289-300. 394.
11. Andrew, A.L. and Paine, J.W. (1986) Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues. [68], **50**, 205-215. 394.



12. Arbenz, P. and Golub, G.H. (1995) Matrix shapes invariant under the symmetric QR algorithm. [67], **2**, 87–93. 232.
13. Ashlock, D.A., Driessel, K.R. and Hentzel, I.R. (1997) On matrix structures invariant under Toda-like isospectral flows. [57], **254**, 29–48. 245.
14. Barcilon, V. (1974a) Iterative solution of the inverse Sturm-Liouville equation. [42], **15**, 429–436. 394.
15. Barcilon, V. (1974b) On the uniqueness of inverse eigenvalue problems. [24], **38**, 287–298. 524.
16. Barcilon, V. (1974c) On the solution of inverse eigenvalue problems of high orders. [24], **39**, 143–154. 391, 524.
17. Barcilon, V. (1974d) A note on a formula of Gel'fand and Levitan. [41], **48**, 43–50. 485.
18. Barcilon, V. (1976) Inverse problems for a vibrating beam. [36], **27**, 346–358. 252, 524.
19. Barcilon, V. (1978) Discrete analog of an iterative method for inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices. [42], **29**, 295–300. 105.
20. Barcilon, V. (1979) On the multiplicity of solutions of the inverse problem for a vibrating beam. [82], **37**, 605–613. 252.
21. Barcilon, V. (1982) Inverse problems for the vibrating beam in the free-clamped configuration. [69], **304**, 211–252. 252, 523, 524.
22. Barcilon, V. (1983) Explicit solution of the inverse problem for a vibrating string. [41], **93**, 222–234. 394, 485.
23. Barcilon, V. and Turchetti, G. (1980) Extremal solutions of inverse eigenvalue problems with finite spectral data. [90], **2**, 139–148. 99.
24. Barcilon, V. (1990) Two-dimensional inverse eigenvalue problem. [29], **6**, 11–20.
25. Bellman, R. (1970) *Introduction to Matrix Analysis*. New York: McGraw-Hill. 179.
26. Benade, A.H. (1976) *Fundamentals of Musical Acoustics*. London: Oxford University Press. 462.

27. Berman, A. (1984) System identification of structural dynamic models - theoretical and practical bounds. [5], 84-0929, 123-129. 487.
28. Biegler-König, F.W. (1980) *Inverse Eigenwertprobleme*. Dissertation, Bielefeld. 150.
29. Biegler-König, F.W. (1981a) A Newton iteration process for inverse eigenvalue problems. [68], 37, 349-354. 150.
30. Biegler-König, F.W. (1981b) Construction of band matrices from spectral data. [57], 40, 79-84. 150.
31. Biegler-König, F.W. (1981c) Sufficient conditions for the solvability of inverse eigenvalue problems. [57], 40, 89-100. 150.
32. Biscontin, G., Morassi, A. and Wendel, P. (1998) Asymptotic separation of the spectrum in notched rods. [53], 4, 237-251. 562.
33. Bishop, R.E.D., Gladwell, G.M.L. and Michaelson, S. (1965) *The Matrix Analysis of Vibration*. Cambridge: Cambridge University Press. 33, 40, 42, 141.
34. Bishop, R.E.D. and Johnson, D.C. (1960) *The Mechanics of Vibration*. Cambridge: Cambridge University Press. 42, 67, 122, 258, 521, 523, 525, 561.
35. Boley, D. and Golub, G.H. (1984) A modified method for reconstructing periodic Jacobi matrices. [60], 42, 143-150. 145, 147.
36. Boley, D. and Golub, G.H. (1987) A survey of matrix inverse eigenvalue problems. [29], 3, 595-622. 145, 147, 148, 150, 150.
37. Bôcher, M. (1917) *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*. Paris. 539.
38. Boltezar, M., Strancar, B. and Kuhelj, A. (1998) Identification of transverse crack locations in flexural vibrations of free-free beams. [47], 211, 729-734. 565.
39. Borg (1946) Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. [1], 78, 1-96. 389, 480.

40. Braun, S.G. and Ram, Y.M. (1991) Predicting the effect of structural modification: Upper and lower bounds due to modal truncation. [27], **6**, 199–211. 488.
41. Brown, B.M., Samko, V.S., Knowles, I.W. and Marletta, M. (2003) Inverse spectral problem for the Sturm-Liouville equation. [29], **19**, 235–252. 436.
42. Bruckstein, A.M. and Kailath, T. (1987) Inverse scattering for discrete transmission-line models. [87], **29**, 359–389. 448, 449, 459.
43. Bube, K.P. and Burrige, R. (1983) The one-dimensional inverse problem of reflection seismology. [86], **25**, 497–559. 448, 449.
44. Burak, S. and Ram, Y.M. (2001) The construction of physical parameters from spectral data. [63], **15**, 3–10. 491.
45. Burrige, R. (1980) The Gel'fand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems. [90], **2**, 305–323. 394, 448.
46. Busacker, R.G. and Saaty, T.L. (1965) *Finite Graphs and Networks: an Introduction with Applications*. New York: McGraw Hill. 294.
47. Cabib, E., Freddi, L., Morassi, A. and Percivale, D. (2001) Thin notched beams. [39], **64**, 157–178. 560.
48. Capecchi, D. and Vestroni, F. (1999) Monitoring of structural systems by using frequency data. [23], **28**, 447–461. 565.
49. Carrier, G.F., Krook, M. and Pearson, C.E. (1966) *Functions of a Complex Variable*. New York: McGraw-Hill. 521.
50. Cawley, P. and Adams, R.D. (1979) The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. [48], **14**, 49–57. 561, 564, 565.
51. Cerri, M.N. and Vestroni, F. (2000) Detection of damage in beams subjected to diffused cracking. [47], **234**, 259–276. 565.
52. Chadan, K. and Sabatier, P.C. (1989) *Inverse Problems in Quantum Scattering*. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag. 448.

- 
53. Cheng, S.Y. (1976) Eigenfunctions and nodal sets. [13], **51**, 43–55. 289.
  54. Christides, S. and Barr, A.D.S. (1984) One-dimensional theory of cracked Euler-Bernoulli beams. [28], **26**, 639–648. 565.
  55. Chondros, T.G. and Dimarogonas, A.D. (1980) Identification of cracks in welded joints of complex structures. [47], **69**, 531–538. 565, 565.
  56. Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J. (1998) A continuous cracked beam vibration theory. [47], **215**, 17–34. 565.
  57. Chu, M.T. (1984) The generalized Toda flow, the QR algorithm and the center manifold theory. [81], **5**, 187–201. 218.
  58. Chu, M.T. (1998) Inverse eigenvalue problems. [86], **40**, 1–39. 150, 161.
  59. Chu, M.T. and Golub, G.H. (2002) Structured inverse eigenvalue problems, [2], **11**, 1–71. 161.
  60. Chu, M.T. and Norris, L.K. (1988) Isospectral flows and abstract matrix factorizations. [85], **25**, 1383–1391. 218.
  61. Coleman, C.F. (1989) Inverse Spectral Problem with a Rough Coefficient. Ph.D. Thesis. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y. 428.
  62. Coleman, C.F. and McLaughlin, J.R. (1993a) Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative I. [8], **46**, 145–184. 409, 428, 464.
  63. Coleman, C.F. and McLaughlin, J.R. (1993b) Solution of the inverse spectral problem for an impedance with an integrable derivative II. [8], **46**, 185–212. 409, 428, 464.
  64. Courant, R. and Hilbert, D. (1953) *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1, New York: Interscience. 77, 289, 323.
  65. Crum, M.M. (1955) Associated Sturm-Liouville systems. [76], **6**, 121–127. 469.
  66. Cryer, C.W. (1973) The LU-factorization of totally positive matrices. [57], **7**, 83–92. 229, 239.

67. Cryer, C.W. (1976) Some properties of totally positive matrices. [57], **15**, 1–25. 229.
68. Dahlberg, B.E.J. and Trubowitz, E. (1984) The inverse Sturm-Liouville problem III. [16], **37**, 255–267. 464.
69. Darboux, G. (1882) Sur la représentation sphérique des surfaces. [17], **94**, 1343–1345. 465.
70. Darboux, G. (1915) *Leçons sur le Théorie Générale des Surfaces et les Applications Géométrique du Calcul Infinitesimal*. Vo. II. Paris: Gauthier Villars. 465.
71. Davies, E.B., Gladwell, G.M.L., Leydold, J. and Stadler, P.F. (2001) Discrete nodal domain theorems. [57], **336**, 51–60. 301, 303.
72. Davini, C., Gatti, F. and Morassi, A. (1993) A damage analysis of steel beams. [62], **28**, 27–37. 565.
73. Davini, C., Morassi, A. and Rovere, N. (1995) Modal analysis of notched bars: tests and comments on the sensitivity of an identification technique. [47], **179**, 513–527.
74. Davini, C. (1996) Note on a parameter lumping in the vibrations of uniform beams. [79], **28**, 83–99. 62.
75. de Boor, C. and Golub, G.H. (1978) The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. [57], **21**, 245–260. 104.
76. de Boor, C. and Saff, E.B. (1986) Finite sequences of orthogonal polynomials connected by a Jacobi matrix. [57], **75**, 43–55. 102, 105.
77. Deift, P., Nanda, T., and Tomei, C. (1983) Ordinary differential equations and the symmetric eigenvalue problem. [85], **20**, 1–22. 218.
78. Dilena, M. (2003) On damage identification in vibrating beams from changes in node positions, in Davini, C. and Viola, E. (Eds) *Problems in Structural Identification and Diagnostics: General Aspects and Applications*. New York: Springer. 567.
79. Dilena, M. and Morassi, A. (2002) Identification of crack location in vibrating beams from changes in node positions. [47], **255**, 915–930. 568.

80. Dilena, M. and Morassi, A. (2002) The use of antiresonances for crack detection in beams. [47], 567, 568, 568.
81. Duarte, A.L. (1989) Construction of acyclic matrices from spectral data. [57], **113**, 173–182. 153, 488.
82. Duval, A.M. and Reiner, V. (1999) Perron-Frobenius type results and discrete versions of nodal domain theorems. [57], **294**, 259–268. 301, 303.
83. Eisner, E. (1976) Complete solution of the ‘Webster’ horn equation. [92], **41**, 1126–1146. 462.
84. El-Badia, A. (1989) On the uniqueness of a bi-dimensional inverse spectral problem. [18], **308**, 273–276.
85. Elhay, S., Gladwell, G.M.L., Golub, G.H. and Ram, Y.M. (1999) On some eigenvector-eigenvalue relations. [84], **20**, 563–574. 371.
86. Fekete, M. (1913) Über ein Problem von Laguerre. [78], **34**, 89–100, 110–120. 183, 197.
87. Ferguson, W.E. (1980) The construction of Jacobi and periodic Jacobi matrices with prescribed spectra. [60], **35**, 1203–1220. 145.
88. Fischer, E. (1905) Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. [65], **16**, 234–249. 77.
89. Fix, G. (1967) Asymptotic eigenvalues of Sturm-Liouville systems. [41], **19**, 519–525. 380.
90. Forsythe, G.E. (1957) Generation and use of orthogonal polynomials for data fitting with a digital computer. [54], **5**, 74–88. 84.
91. Freund, L.B. and Herrmann, G. (1976) Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. [37], **76**, 112–116. 560, 565.
92. Friedland, S. (1977) Inverse eigenvalue problems. [57], **17**, 15–51. 150.
93. Friedland, S. (1979) The reconstruction of a symmetric matrix from the spectral data. [41], **71**, 412–422. 150.
94. Friedland, S. and Melkman, A.A. (1979) Eigenvalues of non-negative Jacobi matrices. [57], **25**, 239–253. 102.

95. Friedland, S., Nocedal, J., and Overton, M. (1987) The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. [85], **24**, 634–667. 161.
96. Friedman, J. (1993) Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions. [22], **69**, 487–525. 302, 303.
97. Gantmacher, F.R. (1959) *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Co. 41, 163, 168, 168, 183.
98. Gantmakher, F.P. and Krein, M.G. (1950) *Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems*. 1961 Translation by U.S. Atomic Energy Commission, Washington, D.C. A revised edition was published in (2002) by AMS Chelsea Publishing, Providence, listing the first author as Gantmacher, not Gantmakher. 78, 96, 118, 163, 183, 183, 317.
99. Gasca, M. and Peña, J.M. (1992) Total positivity and Neville elimination. [57], **165**, 25–44. 189.
100. Gel'fand, I.M. and Levitan, B.M. (1951) On the determination of a differential equation from its spectral function. (In Russian). [31], **15**, 309–360. (In English). [54], **1**, 253–304. 393.
101. Gel'fand, I.M. and Levitan, B.M. (1953) On a simple identity for the characteristic values of a differential operator of the second order (in Russian). [21], **88**, 593–596. 484.
102. Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1977) *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, Springer. 451.
103. Gladwell, G.M.L. (1962) The approximation of uniform beams in transverse vibration by sets of masses elastically connected. *Proceedings of the 4th U.S. Congress of Applied Mechanics*, 169–176, New York: American Society of Mechanical Engineers. 64.
104. Gladwell, G.M.L. (1984) The inverse problem for the vibrating beam. [74], **393**, 277–295. 252.
105. Gladwell, G.M.L. (1985) Qualitative properties of vibrating systems. [74], **401**, 299–315. 261.
106. Gladwell, G.M.L. and Gbadeyan, J. (1985) On the inverse problem of the vibrating string and rod. [77], **38**, 169–174. 122.

107. Gladwell, G.M.L. (1986a) Inverse problems in vibration. [79], **39**, 1013–1018. 161.
108. Gladwell, G.M.L. (1986b) *Inverse Problems in Vibration*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers. 183, 183.
109. Gladwell, G.M.L. (1986c) The inverse mode problem for lumped-mass systems, [77], **39**, 297–307. 274, 282, 284.
110. Gladwell, G.M.L. (1986d) The inverse problem for the Euler-Bernoulli beam. [74], **407**, 199–218. 524.
111. Gladwell, G.M.L. and Dods, S.R.A. (1987) Examples of reconstruction of vibrating rods from spectral data. [47], **119**, 267–276. 428.
112. Gladwell, G.M.L., England, A.H. and Wang, D. (1987) Examples of reconstruction of an Euler-Bernoulli beam from spectral data. [47], **119**, 81–94. 537.
113. Gladwell, G.M.L. and Willms, N.B. (1988) The reconstruction of a tridiagonal system from its frequency response at an interior point. [29], **4**, 1018–1024. 126.
114. Gladwell, G.M.L. and Willms, N.B. (1989) A discrete Gel'fand-Levitan method for band-matrix inverse eigenvalue problems. [29], **5**, 165–179. 150.
115. Gladwell, G.M.L., Willms, N.B., He, B., and Wang, D. (1989) How can we recognise an acceptable mode shape for a vibrating beam? [77], **42**, 303–316. 285, 286, 287, 288, 489.
116. Gladwell, G.M.L. (1991a) Qualitative properties of finite element models I: Sturm-Liouville systems. [77], **44**, 249–265. 252.
117. Gladwell, G.M.L. (1991b) Qualitative properties of finite-element models II: the Euler Bernoulli beam. [77], **44**, 267–284. 252, 261.
118. Gladwell, G.M.L. (1991c) The application of Schur's algorithm to an inverse eigenvalue problem. [29], **7**, 557–565. 449.
119. Gladwell, G.M.L. (1991d) On the scattering of waves in a non-uniform Euler-Bernoulli beam. [72], **205**, 31–34. 93, 526.
120. Gladwell, G.M.L. (1993) *Inverse Problems in Scattering*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 448, 449.



121. Gladwell, G.M.L. (1995) On isospectral spring-mass systems. [29], **11**, 591–602. 219.
122. Gladwell, G.M.L. and Morassi, A. (1995) On isospectral rods, horns and strings. [29], **11**, 533–544. 464.
123. Gladwell, G.M.L. and Movahhedy, M. (1995) Reconstruction of a mass-spring system from spectral data I: Theory. [30], **1**, 179–189. 122.
124. Gladwell, G.M.L. (1996) Inverse problems in vibration-II. [9], **49**, 525–534. 161.
125. Gladwell, G.M.L. (1997) Inverse vibration problems for finite element models. [29], **13**, 311–322. 239.
126. Gladwell, G.M.L. (1998) Total positivity and the QR algorithm. [57], **271**, 257–272. 189, 227, 229, 239.
127. Gladwell, G.M.L. (1999) Inverse finite element vibration problems. [47], **211**, 309–324. 125, 126, 239.
128. Gladwell, G.M.L. and Morassi, A. (1999) Estimating damage in a rod from changes in node positions. [30], **7**, 215–233. 547, 550, 563, 567.
129. Gladwell, G.M.L. (2002a) Total positivity and Toda flow. [57], **350**, 279–284. 247.
130. Gladwell, G.M.L. (2002b) Isospectral vibrating beams. [74], **458**, 2691–2703. 238.
131. Gladwell, G.M.L. and Zhu, H.M. (2002) Courant's nodal line theorem and its discrete counterparts. [77], **55**, 1–15. 60, 303.
132. Golub, G.H. (1973) Some uses of the Lanczos algorithm in numerical linear algebra, in J.H.H. Miller (Ed) *Topics in Numerical Analysis*, New York: Academic Press. 101.
133. Golub, G.H. and Boley, D. (1977) Inverse eigenvalue problems for band matrices, in G.A. Watson (Ed.) *Numerical Analysis* Heidelberg, New York: Springer Verlag, 23–31. 105.
134. Golub, G.H. and Underwood, R.R. (1977) Block Lanczos method for computing eigenvalues, in Rice, J.R. (Ed.) *Mathematical Software* III. New York: Springer, 23–31. 150.

135. Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (1983) *Matrix Computations*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press. 33, 40, 101, 141, 214.
136. Gopinath, B. and Sondhi, M.M. (1970) Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements. [12], 1195–1214. 393, 444.
137. Gopinath, B. and Sondhi, M.M. (1971) Inversion of the telegraph equation and the synthesis of non-uniform lines. [25], 59, 383–392. 393, 393, 444.
138. Gottlieb, H.P.W. (1986) Harmonic frequency spectra of vibrating stepped strings. [47], 108, 63–72 and 345. 390, 390, 475, 475, 477, 480.
139. Gottlieb, H.P.W. (1987a) Multi-segment strings with exactly harmonic spectra. [47], 118, 283–290. 477.
140. Gottlieb, H.P.W. (1987b) Isospectral Euler-Bernoulli beams with continuous density and rigidity functions. [74], 413, 235–250. 480, 483, 526.
141. Gottlieb, H.P.W. (1988a) Isospectral operators: some model examples with discontinuous coefficients. [41], 132, 123–137. 477.
142. Gottlieb, H.P.W. (1988b) Density distribution for isospectral circular membranes. [82], 48, 948–951. 483, 526.
143. Gottlieb, H.P.W. (1989) On standard eigenvalues of variable-coefficient heat and rod equations. [37], 56, 146–148.
144. Gottlieb, H.P.W. (1991) Inhomogeneous clamped circular plates with standard vibration spectra. [37], 58, 729–730. 483.
145. Gottlieb, H.P.W. (1992a) Examples and counterexamples for a string density formula in the case of a discontinuity. [41], 164, 363–369. 486, 486.
146. Gottlieb, H.P.W. (1992b) Axisymmetric isospectral annular plates and membranes. [26], 50, 107–112. 483.
147. Gottlieb, H.P.W. (1993) Inhomogeneous annular plates with exactly beam-like radial spectra. [26], 50, 107–112. 483.

148. Gottlieb, H.P.W. (2000) Exact solutions for vibrations of some annular membranes with inhomogeneous radial densities. [47], **233**, 165–170. 483.
149. Gottlieb, H.P.W. (2002) Isospectral strings. [29], **18**, 971–978. 477.
150. Gottlieb, H.P.W. (2004a) Isospectral circular membranes. [29], **20**, 155–161. 483.
151. Gould, S.H. (1966) *Variational Methods for Eigenvalue Problems*. Toronto: University of Toronto Press. 77.
152. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1965) *Tables of Integrals, Series and Products*, 4th ed., Moscow 1963. English Translation, A. Jeffrey (Ed.) New York: Academic Press. 487.
153. Gragg, W.B. and Harrod, W.J. (1984) Numerically stable reconstruction of Jacobi matrices from spectral data. [68], **44**, 317–335. 150.
154. Gray, L.J. and Wilson, D.G. (1976) Construction of a Jacobi matrix from spectral data. [57], **14**, 131–134. 103.
155. Groetsch, C.W. (1993) *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Braunschweig: Vieweg Verlag. 388.
156. Groetsch, C.W. (2000) *Inverse Problems: Activities for Undergraduates*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America. 388.
157. Gudmundson, P. (1982) Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. [51], **30**, 339–353. 565.
158. Halberg, C.J.A. and Kramer, V.A. (1960) A generalization of the trace concept. [22], **27**, 607–617. 484.
159. Hald, O.H. (1972) *On Discrete and Numerical Inverse Sturm-Liouville Problems*. Ph.D. Thesis, New York University, New York, NY. 394.
160. Hald, O.H. (1976) Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices. [57], **14**, 63–85. 103.
161. Hald, O.H. (1977) Discrete inverse Sturm-Liouville problems. [68], **27**, 249–256. 394.

- 
162. Hald, O.H. (1978a) The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials. [1], **141**, 263–291. 391.
163. Hald, O.H. (1978b) The inverse Sturm-Liouville equation and the Rayleigh-Ritz method. [60], **32**, 687–705. 394.
164. Hald, O.H. (1983) Inverse eigenvalue problems for the mantle, II. [24], **72**, 139–164.
165. Hald, O.H. (1984) Discontinuous inverse eigenvalue problems. [16], **37**, 539–577. 391, 394, 409, 562.
166. Hald, O.H. and McLaughlin, J.R. (1988) Inverse problems using nodal position data — uniqueness results, algorithms, and bounds. *Proceedings, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Special Program in Inverse Problems*, ed. R.S. Anderssen and G.N. Newsam. **17**, 32–58. 555.
167. Hald, O.H. and McLaughlin, J.R. (1989) Solutions of inverse nodal problems. [29], **5**, 307–347. 553, 555.
168. Hald, O.H. and McLaughlin, J.R. (1996) Inverse nodal problems: finding the potential from nodal lines. [64], **119**, 556, 556.
169. Hald, O.H. and McLaughlin, J.R. (1998) Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes. [29], **14**, 245–273. 555.
170. Hearn, G. and Testa, R.B. (1991) Modal analysis for damage detection in structures. [49], **117**, 3042–3063. 561, 564.
171. Herrmann, H. (1935) Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme. [61], **40**, 221–241. 292.
172. Hochstadt, H. (1961) Asymptotic estimates of the Sturm-Liouville spectrum. [16], **14**, 749–764. 380.
173. Hochstadt, H. (1967) On some inverse problems in matrix theory. [10], **18**, 201–207. 102.
174. Hochstadt, H. and Kim, M. (1970) On a singular inverse eigenvalue problem. [11], **37**, 243–254. 389.
175. Hochstadt, H. (1973) The inverse Sturm-Liouville problem. [16], **26**, 715–729. 391, 391.

176. Hochstadt, H. (1974) On the reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. [57], **8**, 435–446. 103.
177. Hochstadt, H. (1975a) On inverse problems associated with Sturm-Liouville operators. [38], **17**, 220–235. 391, 462.
178. Hochstadt, H. (1975b) Well posed inverse spectral problems. [73], **72**, 2496–2497. 391.
179. Hochstadt, H. (1976) On the determination of the density of a vibrating string from spectral data. [41], **55**, 673–685. 391.
180. Hochstadt, H. (1977) On the well posedness of the inverse Sturm-Liouville problem. [38], **23**, 402–413. 391.
181. Hochstadt, H. and Lieberman, B. (1978) An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data. [82], **34**, 676–680. 391, 442.
182. Hochstadt, H. (1979) On the reconstruction of a Jacobi matrix from mixed given data. [57], **28**, 113–115. 109.
183. Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press. 19, 136, 178, 179.
184. Ikramov, Kh.D. and Chugunov, V.N. (2000) Inverse matrix eigenvalue problems. [43], **98**, 51–135. 161.
185. Ince, E.L. (1927) *Ordinary Differential Equations*, London: Longmans, Green. 317, 379, 539.
186. Isaacson, E.L. and Trubowitz, E. (1983) The inverse Sturm-Liouville problem I. [16], **36**, 767–783. 464.
187. Isaacson, E.L., McKean, H.P. and Trubowitz, E. (1984) The inverse Sturm-Liouville problem II. [16], **37**, 1–11. 464.
188. Jerison, D. and Kenig, C. (1985) Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators. [7], **121**, 463–494. 291.
189. Kailath, T. and Lev-Ari, H. (1985) On mappings between covariance matrices and physical systems. [20], **47**, 241–252. 458.
190. Karlin, S. (1968) *Total Positivity*, Vol. 1. Stanford: Stanford University Press. 183.

191. Kato, T. (1976) *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, New York.
192. Kautsky, J. and Golub, G.H. (1983) On the calculation of Jacobi matrices. [57], **52**, 439–455. 101, 102.
193. Kirsch, A. (1996) *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. New York: Springer Verlag. 388, 391.
194. Knobel, R. and McLaughlin, J.R. (1992) A reconstruction method for the two spectra inverse Sturm-Liouville problem, preprint.
195. Knobel, R. and Lowe, B.D. (1993) An inverse Sturm-Liouville problem for an impedance. [36], **44**, 433–450. 428.
196. Knobel, R. and McLaughlin, J.R. (1994) Reconstruction method for a two-dimensional inverse problem. [91], **45**, 794–826.
197. Kobayashi, M. (1988) *Discontinuous Inverse Sturm-Liouville Problems with Symmetric Potentials*. Ph.D. Thesis. University of California at Berkeley. 409.
198. Krein, M.G. (1933) On the spectrum of a Jacobian matrix, in connection with the torsional oscillation of shafts. (in Russian) [59], **40**, 455–466. 96.
199. Krein, M.G. (1934) On nodes of harmonic oscillations of mechanical systems of a certain special type. (in Russian) [59], **41**, 339–348. 96.
200. Krein, M.G. (1951a) Determination of the density of a non-homogeneous symmetric cord from its frequency spectrum. (In Russian). [21], **76**, 345–348. 393.
201. Krein, M.G. (1951b) On the inverse problem for a non-homogeneous cord. (In Russian). [21], **82**, 669–672. 393.
202. Krein, M.G. (1952) Some new problems in the theory of Sturm systems. (In Russian) [71], **16**, 555–563. 96, 393.
203. Lanczos, C. (1950) An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. [46], **45**, 225–232. 101.
204. Landau, H.J. (1983) The inverse problem for the vocal tract and the moment problem. [83], **14**, 1019–1035. 393, 448.

205. Lebedev, L.P., Vorovich, I.I. and Gladwell, G.M.L. (1996) *Functional Analysis: Applications in Mechanics and Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 323.
206. Leighton, W. and Nehari, Z. (1958) On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order. [88], **89**, 325–377. 567.
207. Levinson, N. (1949) The inverse Sturm–Liouville problem. [66], 25–30. 391.
208. Levinson, M. (1976) Vibrations of stepped strings and beams. [47], **49**, 287–291. 475.
209. Levitan, B.M. (1964a) *Generalized Translation Operators and Some of Their Applications*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. Chapters IV, V. 391.
210. Levitan, B.M. (1964b) On the determination of a Sturm-Liouville equation by spectra. (In Russian). [31], **28**, 63–68. (In English) [54], **68**, 1–20. 392.
211. Levitan, B.M. (1987) *Inverse Sturm-Liouville Problems*. Utrecht: VNU Science Press. 381, 391.
212. Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. (1991) *Sturm-Liouville and Dirac Operators*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 317, 379, 393.
213. Liang, R.Y., Hu, J. and Choy, F. (1992a) Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures. [40], **118**, 384–396. 565.
214. Liang, R.Y., Hu, J. and Choy, F. (1992b) Quantitative NDE technique for assessing damages in beam structures. [40], **118**, 1469–1487. 565.
215. Lindberg, G.M. (1963) The vibration of non-uniform beams. [3], **14**, 387–395. 64.
216. Lowe, B.D., Pilant, M. and Rundell, W. (1992) The recovery of potentials from finite spectral data. [83], **23**, 482–504. 430.
217. Lowe, B.D. (1993) Construction of an Euler-Bernoulli beam from spectral data. [47], **163**, 165–171. 534.

218. Marchenko, V.A. (1950) On certain questions in the theory of differential operators of second order. (In Russian). [21], **72**, 457–460. 391, 393.
219. Marchenko, V.A. (1952) Some problems in the theory of one-dimensional second order differential operators I (In Russian). [89], **1**, 327–420. 391.
220. Marchenko, V.A. (1953) Some problems in the theory of one-dimensional second order differential operators II (In Russian). [89], **2**, 3–82. 391.
221. Markham, T. (1970) On oscillatory matrices. [57], **3**, 143–158. 189, 239, 250.
222. Mattis, M.P. and Hochstadt, H. (1981) On the construction of band matrices from spectral data. [57], **38**, 109–119. 150.
223. McLaughlin, J.R. (1976) An inverse problem of order four. [83], **7**, 646–661. 526.
224. McLaughlin, J.R. (1978) An inverse problem of order four - an infinite case. [83], **9**, 395–413. 526.
225. McLaughlin, J.R. (1981) Fourth order inverse eigenvalue problems, in Knowles, I.W. and Lewis, R.T. (Eds) *Spectral Theory of Differential Operators*. New York: North Holland, 327–335. Crum, M.M. (1995) [78], **6**, 121–127. 526.
226. McLaughlin, J.R. (1984a) Bounds for constructed solutions of second and fourth order inverse eigenvalue problems, in I.W. Knowles and T.R. Lewis (Eds) *Differential Equations*. New York: Elsevier/North Holland, 437–443. 526.
227. McLaughlin, J.R. (1984b) On constructing solutions to an inverse Euler-Bernoulli beam problem, in F. Santosa et al (Eds) *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*. Philadelphia: SIAM, 341–347. 524, 526.
228. McLaughlin, J.R. (1986) Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data. [87], **28**, 53–72. 391, 409.



229. McLaughlin, J.R. (1986) Uniqueness theorem for second order inverse eigenvalue equations. [41], **118**, 38–41.
230. McLaughlin, J.R. and Rundell, W. (1987) A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem. [42], **28**, 1471–1472. 409.
231. McLaughlin, J.R. (1988) Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result. [41], **73**, 354–362. 552, 553, 555.
232. McLaughlin, J.R. (2000) Solving inverse problems with spectral data, in Colton, D., Engl, H.W., Louis, A.K., McLaughlin, J.R. and Rundell, W. (Eds) *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*. Vienna, Springer-Verlag. pp. 169–194. 556.
233. McNabb, A., Anderssen, R.S. and Lapwood, E.R. (1976) Asymptotic behaviour of the eigenvalues of a Sturm-Liouville system with discontinuous coefficients. [41], **54**, 741–751. 382.
234. Meirovitch, L. (1975) *Elements of Vibration Analysis*. New York: McGraw-Hill. 42.
235. Morassi, A. (1993) Crack-induced changes in eigenparameters on beam structures. [40], **119**, 1798–1803. 566, 566.
236. Morassi, A. (1997) An uniqueness result on crack localization in vibrating rods. [30], **4**, 231–254. 562.
237. Morassi, A. (2001) Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies. [47], **242**, 577–596. 561.
238. Morassi, A. (2003) The crack detection problem in vibrating beams, in Davini, C. and Viola, E. (Eds) *Problems in Structural Identification and Diagnostics: General Aspects and Applications*. New York: Springer, 163–177. 561.
239. Morassi, A. and Dilena, M. (2002) On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements. [30], **10**, 183–201. 562.
240. Morassi, A. and Rollo, M. (2001) Identification of two cracks in a simply supported beam from minimal frequency measurements. [53], **7**, 729–739. 567.
241. Morassi, A. and Rovere, N. (1997) Localizing a notch in a steel frame from frequency measurements. [40], **123**, 422–432. 565.

- 
242. Movahhedy, M., Ismail, F. and Gladwell, G.M.L. (1995) Reconstruction of a mass-spring system from spectral data II: Experiment. [30], **1**, 315–327. 122.
243. Nabben, R. (2001) On Green's matrices for trees. [84], **22**, 1014–1026. 137.
244. Nachman, A., Sylvester, J. and Uhlmann, G. (1988) An  $n$ -dimensional Borg-Levinson theorem. [14], **115**, 595–605.
245. Nanda, T. (1982) Ph.D. Thesis, New York University, New York. 218.
246. Nanda, T. (1985) Differential equations and the QR algorithm. [85], **22**, 310–321. 218.
247. Narkis, Y. (1994) Identification of crack location in vibrating simply-supported beams. [47], 172, 549–558. 561, 565.
248. Natke, H.G. and Cempel, C. (1991) Fault detection and localisation in structures: a discussion. [45], **5**, 345–356. 566.
249. Newton, R.G. (1983) The Marchenko and Gel'fand-Levitan methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions, in J.G. Bednar, et al. (Eds.) *Conference on Inverse Scattering: Theory and Application*. Philadelphia: SIAM. 1–74. 388.
250. Niordson, F.I. (1967) A method of solving inverse eigenvalue problems, in B. Broberg, J. Hults and F.I. Niordson (Eds) *Recent Progress in Applied Mechanics: The Folke Odqvist Volume*. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 373–382. 524.
251. Nocedal, J. and Overton, M.L. (1983) Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems. [55], **1005**, 212–226. 161.
252. Nylen, P. and Uhlig, F. (1994) Realizations of interlacing by tree-patterned matrices. [58], **38**, 13–37. 161.
253. Nylen, P. and Uhlig, F. (1997a) Inverse eigenvalue problems associated

255. Ostachowicz, W.M. and Krawczuk, M. (1991) Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. [47], **150**, 191–201. 565.
256. Paine, J. (1982) Correction of Sturm-Liouville eigenvalue estimates. [60], **39**, 415–420. 394.
257. Paine, J. (1984) A numerical method for the inverse Sturm-Liouville problem. [81], **5**, 149–156. 394.
258. Paine, J.W. and de Hoog, F.R. (1980) Uniform estimation of the eigenvalues of Sturm-Liouville problems. [33], **21**, 365–383. 394.
259. Paine, J.W., de Hoog, F.R. and Anderssen, R.S. (1981) On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm-Liouville problems. [19], **26**, 123–139. 394.
260. Pandey, A.K., Biswas, M. and Samman, M.M. (1991) Damage detection from changes in curvature mode shapes. [47], **145**, 321–332. 567.
261. Papanicolaou, V.G. (1995) The spectral theory of the vibrating periodic beam. [14], **170**, 359–373. 494.
262. Papanicolaou, V.G. and Kravvaritis, D. (1997) An inverse spectral problem for the Euler-Bernoulli equation for the vibrating beam. [29], **13**, 1083–1092. 526.
263. Parker, R.L. (1977) Understanding inverse theory. [8], **5**, 35–64. 388.
264. Parlett, B.N. (1980) *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 40, 488.
265. Parter, S. (1960) On the eigenvalues of a class of matrices. [54], **8**, 376–388. 157.
266. Pleijel, A. (1956) Remarks on Courant's nodal line theorem. [16], 543–550. 292.
267. Porter, B. (1970) Synthesis of lumped-parameter vibrating systems by an inverse Holzer technique. [44], **12**, 17–19. 281.
268. Porter, B. (1971) Synthesis of lumped-parameter vibrating systems using transfer matrices. [28], **13**, 29–34. 281.

269. Pöschel, J. and Trubowitz, E. (1987) *Inverse Spectral Theory*. Boston: Academic Press. 380, 474.
270. Pranger, W.A. (1989) A formula for the mass density of a vibrating string in terms of the trace. [41], **141**, 399–404. 486.
271. Protter, M.H. and Weinburger, H.F. (1984) *Maximum Principles in Differential Equations*. New York: Springer. 294.
272. Ram, Y.M., Braun, S. and Blech, J.J. (1988) Structural modification in truncated systems by the Rayleigh-Ritz method. [47], **125**, 203–209. 487, 488.
273. Ram, Y.M. and Braun, S.G. (1990a) Structural dynamic modification using truncated data: Bounds for the eigenvalues. [63], **4**, 39–52. 488.
274. Ram, Y.M. and Braun, S.G. (1990b) Upper and lower bounds for the natural frequencies of modified structures based on truncated modal testing results. [47], **137**, 69–81. 488.
275. Ram, Y.M., Blech, J.J. and Braun, S.G. (1990) Eigenproblem error bounds with application to the symmetric dynamic system modification. [84], **11**, 553–564. 488.
276. Ram, Y.M. (1993) Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system. [82], **53**, 1762–1775. 121, 488.
277. Ram, Y.M. and Blech, J.J. (1991) The dynamic behaviour of a vibrating system after modification. [47], **150**, 357–370. 121, 488, 488, 489.
278. Ram, Y.M. and Braun, S.G. (1991) An inverse problem associated with the dynamic modification of structures. [37], **58**, 233–237. 488, 490.
279. Ram, Y.M. and Caldwell, J. (1992) Physical parameters reconstruction of a free-free mass-spring system from its spectra. [82], **52**, 140–152. 488, 490.
280. Ram, Y.M. and Braun, S.G. (1993) Eigenvector error bounds and their application to structural modification. [4], **31**, 759–764. 488.
281. Ram, Y.M. (1994a) Inverse mode problems for the discrete model of a vibrating beam. [47], **169**, 239–252. 489.

282. Ram, Y.M. (1994b) Enlarging a spectral gap by structural modification. [47], **176**, 225–234. 489.
283. Ram, Y.M. (1994c) An inverse mode problem for the continuous model of an axially vibrating rod. [37], **61**, 624–628. 489.
284. Ram, Y.M. and Elhay, S. (1996) The theory of a multi degree of freedom dynamic absorber. [47], **195**, 607–615. 489.
285. Ram, Y.M. and Elhay, S. (1995a) Dualities in vibrating rods and beams: continuous and discrete models. [47], **181**, 583–594. 221, 462, 489.
286. Ram, Y.M. and Elhay, S. (1995b) The construction of band symmetric models for vibrating systems from modal analysis data. [47], **184**, 759–766.
287. Ram, Y.M. and Elhay, S. (1998) Constructing the shape of a rod from eigenvalues. [15], **14**, 597–608. 221, 490.
288. Ram, Y.M. and Elishakoff, I. (2004) Reconstructing the cross-sectional area of an axially-vibrating non-uniform rod from one of its mode shapes. [74]. 491.
289. Ram, Y.M. and Gladwell, G.M.L. (1994) Constructing a finite element model of a vibratory rod from eigendata. [47], **169**, 229–237. 126, 489, 491.
290. Rayleigh, Lord (1984) *The Theory of Sound*. London: Macmillan. 37.
291. Rizos, P.F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A.D. (1990) Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. [47], **138**, 381–388. 565, 567.
292. Rundell, W. and Sacks, P.E. (1992a) Reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems. [60], **58**, 161–183. 430.
293. Rundell, W. and Sacks, P.E. (1992b) The reconstruction of Sturm-Liouville operators. [29], **8**, 457–482. 430.
294. Rundell, W. (1997) Inverse Sturm-Liouville problems, in Chadan, K., Colton, D., Päivärinta, L. and Rundell, W., (Eds.) *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*. Philadelphia: SIAM. 67–131. 380, 430, 437.

295. Sabatier, P.C. (1978) Spectral and scattering inverse problems. [42], **19**, 2410–2425. 388.
296. Sabatier, P.C. (1979a) On some spectral problems and isospectral evolutions connected with the classical string problem. I. Constants of motion. [56], **26**, 477–482. 391.
297. Sabatier, P.C. (1979b) On some spectral problems and isospectral evolution connected with the classical string problem. II. Evolution equations. [56], **26**, 483–486. 391.
298. Sabatier, P.C. (1985) Inverse problems – an introduction. [29], **1**, i–iv. 388.
299. Sakata, T. and Sakata, Y (1980) Vibrations of a taut string with stepped mass density. [47], **71**, 315–317. 475.
300. Schur, J. (1917) Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. [34], **147**, 205–232. 451.
301. Seidman, T. (1985) Convergent approximation scheme for the inverse Sturm-Liouville problem. [29], **1**, 251–262. 391.
302. Seidman, T. (1988) An inverse eigenvalue problem with rotational symmetry. [29], **4**, 1093–1115.
303. Shen, M.-H.H. and Pierre, C. (1990) Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks. [47], **138**, 115–134. 565.
304. Shen, M.-H.H. and Taylor, J.E. (1991) An identification problem for vibrating cracked beams. [47], **150**, 457–484. 565.
305. Sinha, J.K., Friswell, M.I. and Edwards, S. (2002) Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. [47], **251**, 13–38.
306. Sivan, D.D. and Ram, Y.M. (1997) Optimal construction of a mass-spring system from prescribed modal and spectral data. [47], **201** 323–334. 490.
307. Sivan, D.D. and Ram, Y.M. (1999) Physical modifications to vibratory systems with assigned eigendata. [37], **66**, 427–432. 490.
308. Sondhi, M.M. and Gopinath, B. (1971) Determination of vocal-tract shape from impulse response of the lips. [32], **49**, 1867–1873. 444.

309. Sondhi, M.M. (1984) A survey of the vocal tract inverse problem: theory, computation and experiments, in F. Santosa, Y.-H. Pao, W.W. Symes and C. Holland. (Eds.) *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*. Philadelphia: SIAM. 394, 444.
310. Stieltjes, T.J. (1918) *Oeuvres Completes. Vol. 2*, Groningen: Noordhoff. 96.
311. Strang, G. and Fix, G.J. (1973) *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 50.
312. Sussman-Fort, S.E. (1982) Reconstruction of bordered-diagonal and Jacobi matrices from spectral data. [50], **314**, 271–282. 144.
313. Sweet, R.A. (1969) Properties of a semi-discrete approximation to the beam equation with a second order term. [35], **5**, 329–339. 252.
314. Sweet, R.A. (1971) Oscillation properties of a semi-discrete approximation to the beam equation with a second order term. [35], **7**, 119–125. 252.
315. Symes, W.W. (1980) Hamiltonian group actions and integrable systems. [70], **1**, 339–374. 218.
316. Symes, W.W. (1982) The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice. [70], **4**, 275–280. 218.
317. Takewaki, I. and Nakamura, T. (1995) Hybrid inverse mode problems for FEM-shear models. [40], **121**, 873–880. 131.
318. Takewaki, I., Nakamura, T. and Arita, Y. (1996) A hybrid inverse mode problem for fixed-fixed mass-spring models. [52], **118**, 641–648. 131.
319. Takewaki, I. and Nakamura, T. (1997) Hybrid inverse mode problem for structure-foundation systems. [40], **123**, 312–321. 131.
320. Takewaki, I. (1999) Hybrid inverse eigenmode problem for top-linked twin shear building models. [28], **41**, 1133–1153. 131.
321. Takewaki, I. (2000) *Dynamic Structured Design: Inverse Problem Approach*. Southampton, UK: WIT Press. 131.
322. Temple, G. and Bickley, W.G. (1933) *Rayleigh's Principle and its Applications to Engineering*. London: Oxford University Press. 68.

323. Titchmarsh, E.C. (1962) *Eigenfunction Expansions*. Part I. Oxford: Oxford University Press. 371.
324. Toda, M. (1970) Waves in nonlinear lattices. [75], **45**, 174–200. 218.
325. Underwood, R.R. (1975) *An Iterative Block-Lanczos Method for the Solution of Large Sparse Symmetric Eigenproblems*. Ph.D. Thesis, Stanford University. 150.
326. van der Holst, H. (1996) *Topological and Spectral Graph characterizations*. Ph.D. Thesis. Universiteit van Amsterdam. 303.
327. Vestroni, F. and Capecchi, D. (1996) Damage evaluation in cracked vibrating beams using experimental frequencies and finite element models. [53], **2**, 69–86. 565.
328. Vestroni, F. and Capecchi, D. (2000) Damage detection in beam structures based on frequency measurements. [59], **126**, 761–768. 565.
329. Vijay, D.K. (1972) *Some Inverse Problems in Mechanics*. M.A.Sc. Thesis, University of Waterloo. 274.
330. Washizu, K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 3rd Edition, Oxford: Pergamon Press. 68.
331. Watkins, D.S. (1984) Isospectral flows. [87], **26**, 379–391. 218.
332. Weinberger, H. (1974) Variational Methods for Eigenvalue Approximation. Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **15**, SIAM.
333. Willis, C. (1986) An inverse method using toroidal mode data. [29], **2**, 111–130.
334. Willis, C. (1985) Inverse Sturm-Liouville problems with two discontinuities. [29], **1**, 263–289. 409.
335. Wu, Q.L. and Fricke, F. (1989) Estimation of blockage dimensions in a duct using measured eigenfrequency shifts. [47], **133**, 289–301. 564.
336. Wu, Q.L. and Fricke, F. (1990) Determination of blocking locations and cross-sectional area in a duct by eigenfrequency shifts. [32], **87**, 67–75. 564.
337. Wu, Q.L. and Fricke, F. (1991) Determination of the size of an object and its location in a rectangular cavity by eigenfrequency shifts – 1st order approximations. [47], **144**, 131–147. 564.



338. Wu, Q.L. (1994) Reconstruction of crack function of beams from eigenvalue shifts. [47], **173**, 279–282. 566.
339. Xu, S.F. (1998) *An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems*. Braunschweig: Vieweg. 147, 161.
340. Yen, A. (1978) *Numerical Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem*. Ph.D. Thesis, University of California at Berkeley.
341. Yuen, M.M.F. (1985) A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever. [47], **103**, 301–310. 565.
342. Zhu, H.M. (2000) *Courant's Nodal Line Theorem and its Discrete Counterparts*. Ph.D. Thesis, University of Waterloo. 60, 303.
343. Zienkiewicz, O.Z. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*, London: McGraw-Hill. 50.

## Список периодических изданий

	<b>Полное название издания</b>	<b>Сокращенное название издания</b>	<b>Индекс</b>
1	acta mathematica	acta math	QA1 .A185
2	acta numerica	acta numerica	QA297. A327
3	aeronautical quarterly	aeron q	TL501 .R7
4	AIAA journal.	aiaa j	TL501.A688 A2
5	american institute of aeronautics and astronautics paper	am inst aeronaut astronaut pap	TL512. A66
6	american mathematical society translations series 2	amer math soc trans ser 2	QA 1.A522
7	annals of mathematics	ann math	QA1 .A6
8	annual review of earth and planetary sciences	annu rev earth planet sci	QE1 .A674
9	applied mechanics reviews	appl mech rev	TA1 .A639
10	archiv der mathematik	arch math	QA 1.A66
11	archive for rational mechanics and analysis	arch rat mech anal	QA801 .A6
12	bell systems technical journal	bell sys tech j	TK 1.B425
13	commentarii mathematici helvetici	comment math helvetici	QA1 .C7
14	communications in mathematical physics	commun math phys	QC1 .C6
15	communications in numerical methods in engineering	comm numer methods engrg	TA335 .C65
16	communications on pure and applied mathematics	math comm pure appl	QA1 .C718
17	comptes rendus academie des sciences	cr acad sci paris	AS162.P315
18	comptes rendus des seances academie des sciences serie 1 mathematique	cr acad sci paris sec I math	Q46 .A14
19	computing	co	QA 76.C582
20	contemporary mathematicians	contemp mathematicians	monographic series

	<b>Полное название издания</b>	<b>Сокращенное название издания</b>	<b>Индекс</b>
21	doklady akademii nauk sssr	dokl ak sssr	Q60.A3
22	duke mathematical journal	duke math j	QA1 .D8
23	earthquake engineering and structural dynamics	earthquake eng struct dyn	TH1095 .E27x
24	geophysical journal royal astronomical society	geophys j r astr soc	QD96.A643x
25	ieee transactions on sonics and ultrasonics	ieee trans sonics ultrason	QC244 .I53
26	ima journal of applied mathematics	ima j appl math	QA 1.I522
27	international journal of analytical and experimental modal analysis	intl j analyt exptl modal analysis	TA654.15.I56
28	international journal of mechanical sciences	intl j mech sci	TJ1 .I59
29	inverse problems	inverse pr	QA370 .I52x
30	inverse problems in engineering	inverse probl eng	TA347.D45 I582
31	izvestiia akademii nauk sssr seriya matematicheskaya	izv akad nauk sssr ser mat	G 3271 .C55
32	journal acoustical society of america	j acoust soc am	QC 221.A4
33	journal australian mathematical society series b applied mathematics	j austral math soc series b	QA1 .J97645
34	journal fuer die reine und angewandte mathematik	j reine angew math	QA 1.J95
35	journal institute of mathematics and its applications	j inst math appl	QA1 .I552
36	journal of applied mathematics and physics	j appl math phys	QA1 .Z5
37	journal of applied mechanics	j app mech	TA1 .J6
38	journal of differential equations	j diff equa	QA371 .J73
39	journal of elasticity	j elast	QA931 .J6x
40	journal of engineering mathematics	j eng math	TA1 .A5233
41	journal of mathematical analysis and applications	j math anal appl	QA1 .J596
42	journal of mathematical physics	j math phys	QA1 .J598
43	journal of mathematical sciences	j math sci	QA1.J63x

	<b>Полное название издания</b>	<b>Сокращенное название издания</b>	<b>Индекс</b>
44	journal of mechanical engineering science	j mech eng sci	TJ1 .J6
45	journal of mechanical systems and systems processing	mech syst signal processing	TA654 .M38
46	journal of research, united states national bureau of standards, section b. mathematical sciences	j res nat bur standards sect b	QA1 .U571
47	journal of sound and vibration	j sound vib	QC221 .J6
48	journal of strain analysis	j strain anal	TG265 .J6
49	journal of structural engineering asce	j struct eng asce	TA1 .A5235
50	journal of the franklin institute b engineering and applied mathematics	j franklin inst b	T1 .F8
51	journal of the mechanics and physics of solids	j mech phys solids	TA350 .J68
52	journal of vibration and acoustics. Transactions of the asme	j vib accoust trans asme	TJ1 .J68x
53	journal of vibration and control	j vib control	TJ212 .J68x
54	journal society of industrial and applied mathematics	jsiam	QA1 .S73
55	lecture notes in mathematics	lecture notes in math	QA3 .L28
56	lettere al nuovo cimento	lett nuovo c	QC 1.L4
57	linear algebra and its applications	lin alg app	QA 251.L52
58	linear and multilinear algebra	linear multilin algebra	QA251 .L524x
59	matematicheskii sbornik	mat sb	QA1 .M4
60	mathematics of computation	math comp	QA 47.M29
61	mathematische zeitschrift	math z	QA1 .M799
62	meccanica journal of the italian association of theoretical and applied mechanics	meccanica j ital assoc theoret appl mech	QA801 .M4x
63	mechanical systems and signal processing	mech syst signal processing	TA654 .M38
64	memoirs of the american mathematical society	mono series	QA1 .A514

	<b>Полное название издания</b>	<b>Сокращенное название издания</b>	<b>Индекс</b>
65	monatshefte fuer mathematik und physik	monatsh math phys	QA1 .M877
66	nordisk matematisk tidsskrift b	nord mat tidsskr b	QA1 .N83
67	numerical linear algebra with applications	numer linear algebra appl	QA184. N88
68	numerische mathematik	numer math	QA1 .N8
69	philosophical transactions royal society of london series a mathematical and physical sciences	phil trans roy soc lond a	Q 41.L8
70	physica d. nonlinear phenomena	phys d	QC1 .P3834
71	prikladnaya matematika i mekhanika	prik mat mekh	TA350 . U34
72	proceedings of the institution of mechanical engineers	proc inst mech eng	TJ 1.15
73	proceedings of the national academy of science	proc nat acad sci	Q11 .N26
74	proceedings royal society of london series a mathematical and physical science	proc roy soc lond a	Q41 .L72
75	progress of theoretical physics supplement	prog theor phys suppl	QC1 .P8852x
76	quarterly journal of mathematics oxford second series	q j math oxford ser 2	QA1 .Q22
77	quarterly journal of mechanics and applied mathematics	q j mech appl math	QA1 .Q23
78	Rendiconti del Circolo matematico di Palermo	rend circ mat palermo	QA1 .C6
79	rendiconti dell'istituto di matematica dell'universita di trieste	rend istit mat univ trieste	QA1 .T82a
80	shock and vibration digest	shock vib dig	US1 DH 41 S37
81	siam journal on algebraic and discrete methods	siam j alg disc math	QA1 .S732x
82	siam journal on applied mathematics	siam j appl math	QA1 .S73
83	siam journal on mathematical analysis	siam j math anal	QA 1.S25

	<b>Полное название издания</b>	<b>Сокращенное название издания</b>	<b>Индекс</b>
84	siam journal on matrix analysis and applications	siam j matrix anal appl	QA1 .S732x
85	siam journal on numerical analysis	siam j num anal	QA297.S52x
86	siam journal on scientific and statistical computing	siam j sci stat comput	QA264 .S53x
87	siam review	siamr	QA1 .S5
88	transactions of the american mathematical society	n y am mth s t	QA1 .A522
89	trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva	trudy mosk mat obsch	QA1 .M988
90	wave motion	wamod	QA927.W3x
91	zeitschrift fuer angewandte mathematik und physik	zamp	QA1 .Z5
92	zeitschrift fuer physik	z phys	QC1 .Z4

*Грэхэм М. Л. Глэдвелл*

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

*Дизайнер А. В. Луговая*

*Технический редактор А. В. Ширококов*

*Компьютерная верстка Д. В. Панкратов*

*Корректор Г. Г. Тетерина*

Подписано в печать 23.04.2008. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 35,34. Уч. изд. л. 35,14.

Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №26.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru) Тел./факс: (+73412) 500-295

Переплет выполнен в ГУП УР «Ижевский полиграфический комбинат»

426039, г. Ижевск, Воткинское шоссе, 180.

***Уважаемые читатели!***

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин <http://shop.rcd.ru> или по электронной почте [subscribe@rcd.ru](mailto:subscribe@rcd.ru)

**Книги можно приобрести в наших представительствах:**

**МОСКВА**

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: 135-54-37

**ИЖЕВСК**

Удмуртский государственный университет  
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500-295

**Также книги можно приобрести:**

**МОСКВА**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),  
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина  
ГЗ (3-4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

**Магазины:**

**МОСКВА:**

«Дом научно-технической книги»  
Ленинский пр., 40. тел.: 137-06-33

«Московский дом книги»  
ул. Новый Арбат, 8. тел.: 290-45-07

«Библиоглобус»  
м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6. тел.: 928-87-44

**ДОЛГОПРУДНЫЙ:**

Книжный магазин «Физматкнига»  
новый корп. МФТИ, 1 эт. тел.: 409-93-28

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ:**

«Санкт-Петербургский дом книги»  
Невский проспект, 28

Издательство СПбГУ, Магазин №1  
Университетская набережная, 7/9



Грэхэм Глэдвел является почетным профессором университета города Ватерлоо, Онтарио, Канада. Тридцать лет он проработал профессором в Университете города Ватерлоо по специальностям гражданское строительство и прикладная механика. После окончания университетского колледжа в Лондоне в 1954 году по специальности математика, он продолжил свои исследования на пересечении математики и инженерии. Заглавия его книг подчеркивают его основные научные интересы: «Матричный анализ в теории колебаний», совместно с Р. Е. Д. Бишопом и С. Михаэльсоном, 1965 г., «Контактные задачи в теории

эластичности», 1980 г., первое издание монографии «Обратные задачи теории колебаний», 1986 г., «Обратные задачи рассеяния», 1993 г., «Функциональный анализ: приложения в механике и обратных задачах», совместно с Л. П. Лебедевым и И. И. Воровичем, 1997 г. С 1989 года Грэхэм Глэдвел является редактором серии «Механика твердого тела и ее приложения», публиковавшейся ранее издательством Kluwer Academic Publishing, а теперь — издательством Springer.

На момент опубликования русского перевода данной книги профессор Глэдвел редактирует новое, переработанное и дополненное издание монографии «Контактные задачи» академика Л. А. Галина.

интернет-магазин

**OZON.RU**



84255132

ISBN 978-5-93972-660-3



9 785939 726603